Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 45 (1999)

Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA VERSION DE DIAMOND DE LA MÉTHODE DE L'HYPERBOLE DE DIRICHLET

Autor: Balazard, Michel

Kapitel: 4. Une application

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-64448

Enfin,

$$\left|\nu_n(\sqrt{x})\nu(\sqrt{x})\right| \le n2^a K_2 A_0 (2\log\log 3x + K_3)^{n-1}\log^{-a} x\,.$$

L'inégalité fondamentale au rang $n+1$ résulte donc de :

$$\begin{aligned} &nA_0(L+A_1)^{n-1}(L+K_3+K_4) + K_1(L+K_3)^n \\ &\qquad + nK_1K_4(L+K_3)^{n-1} + 2^a K_2 A_0 n (L+K_3)^{n-1} \le (n+1)A_0(L+A_1)^n\,, \end{aligned}$$

où $L := 2\log\log 3x$, et cela est vrai, vu les définitions de A_0 et A_1.

En conclusion,

$$d\Pi = d\tau + (\log c)\delta + td\nu$$

donc

$$dN = e^{d\Pi} = ce^{d\tau} * (te^{d\nu}) = c(\delta + dt) * (te^{d\nu})$$

d'où

$$\begin{aligned} N(x) &= c\int_1^x \Big(\int_1^{x/u} \delta + dt\Big) u e^{d\nu} \\ &= cx\int_1^x e^{d\nu} = cx + cx\sum_{n\ge 1}\frac{\nu_n(x)}{n!}\,. \end{aligned}$$

L'inégalité fondamentale permet de majorer la dernière somme :

$$\sum_{n\ge 1}\frac{\nu_n(x)}{n!} \le A_0\log^{-a} x\sum_{n\ge 1}\frac{(2\log\log 3x + A_1)^{n-1}}{(n-1)!} = A_0 e^{A_1}(\log 3x)^2\log^{-a} x\,,$$

d'où le résultat.

4. Une application

Dans ce paragraphe, nous proposons une variation sur un thème abordé dans [2] à propos de la fonction d'Euler.

THÉORÈME 9. *Soit* $\boldsymbol{\beta}$ *une suite de nombres premiers généralisés telle que* β_n *diffère du n-ème nombre premier usuel* p_n *par une quantité* $O(n^a)$, *où* $0 \le a < 1$. *On a alors, pour tout* c *fixé,* $c < \sqrt{2(1-a)}$,

$$\varepsilon(x) \ll \mathcal{L}(x)^{-c}\,,$$

pour $x \ge 3$, *où* $\mathcal{L}(x) := e^{\sqrt{\log x \log\log x}}$.

Observons que le résultat pour $a = 0$ découle du cas $a > 0$; nous supposons donc $a > 0$ dans la suite. Dans le cas particulier où la différence $\beta_n - p_n$ est constante, la méthode de [3] donne un meilleur résultat, comparable à l'estimation de Korobov et Vinogradov du terme d'erreur dans le théorème des nombres premiers.

La démonstration du théorème repose sur les lemmes suivants.

LEMME 4. *Sous l'hypothèse du théorème 9 et en notant Π_1 et Π_2 les fonctions associées respectivement aux suites (p_n) et (β_n) comme dans la proposition 4, nous avons :*

$$\int_1^x \frac{d(\Pi_2 - \Pi_1)(t)}{t} = \log D + O(x^{a-1})$$

où

$$D = \prod_{n\geq 1} \frac{1 - 1/p_n}{1 - 1/\beta_n}\,.$$

Démonstration. Soit K un nombre entier fixé, supérieur à $1/a$. Nous avons :

$$\begin{aligned}\int_1^x \frac{d(\Pi_2 - \Pi_1)(t)}{t} &= \sum_{\beta_n^k \leq x} \frac{1}{k\beta_n^k} - \sum_{p_n^k \leq x} \frac{1}{kp_n^k}\\ &= \sum_{k=1}^{K-1} \frac{1}{k}\Delta_k(x^{1/k}) + \sum_{n\geq 1,\, k\geq K} \frac{\beta_n^{-k} - p_n^{-k}}{k}\\ &\qquad + O\Big(\sum_{k\geq K,\, \beta_n^k > x} \frac{1}{k\beta_n^k}\Big) + O\Big(\sum_{k\geq K,\, p_n^k > x} \frac{1}{kp_n^k}\Big)\end{aligned}$$

où

$$\Delta_k(t) := \sum_{\beta_n \leq t} \frac{1}{\beta_n^k} - \sum_{p_n \leq t} \frac{1}{p_n^k}\,.$$

La majoration de Tchebycheff pour la fonction de comptage des nombres premiers nous donne :

$$\sum_{k\geq K,\, p_n^k \leq x} \frac{1}{k} \ll \sum_{K\leq k\leq \log x/\log 2} \frac{1}{k}\frac{x^{1/k}}{\log(x^{1/k})} \ll x^{1/K}$$

et de même,

$$\sum_{k\geq K,\, \beta_n^k \leq x} \frac{1}{k} \ll x^{1/K}\,.$$

Par conséquent,

$$\sum_{k\geq K,\beta_n^k>x}\frac{1}{k\beta_n^k}+\sum_{k\geq K,p_n^k>x}\frac{1}{kp_n^k}\ll\int_x^{+\infty}t^{\frac{1}{K}-2}dt\ll x^{\frac{1}{K}-1}\ll x^{a-1}\,.$$

Maintenant,

$$\Delta_k(t)=\sum_{p_n\leq t}(\beta_n^{-k}-p_n^{-k})+O(E_k(t))$$

où

$$E_k(t):=\sum_{p_n\leq t,\beta_n>t}\beta_n^{-k}+\sum_{p_n>t,\beta_n\leq t}\beta_n^{-k}\,.$$

Comme $p_n-\beta_n=O(n^a)$, et $p_n\sim n\log n$, on a, pour une constante positive convenable H et pour tout k fixé:

$$E_k(t)\ll\sum_{|p_n-t|\leq Ht^a}t^{-k}\ll\frac{t^{a-k}}{\log t}$$

d'après l'inégalité de Brun-Titchmarsh. Il en résulte que

$$\sum_{k=1}^{K-1}\frac{1}{k}E_k(x^{1/k})\ll x^{a-1}\,.$$

Comme d'autre part,

$$\sum_{k=1}^{K-1}\frac{1}{k}\sum_{p_n\leq x^{1/k}}(\beta_n^{-k}-p_n^{-k})=\sum_{n\geq 1,1\leq k<K}\frac{\beta_n^{-k}-p_n^{-k}}{k}-\sum_{1\leq k<K}\sum_{p_n^k>x}\frac{\beta_n^{-k}-p_n^{-k}}{k}\,,$$

il suffit pour conclure de vérifier que pour chaque k fixé, on a:

$$\sum_{p_n>x^{1/k}}\left|\beta_n^{-k}-p_n^{-k}\right|\ll x^{a-1}\,.$$

Or $\left|\beta_n^{-k}-p_n^{-k}\right|\ll n^ap_n^{-k-1}$ donc

$$\sum_{p_n>t}\left|\beta_n^{-k}-p_n^{-k}\right|\ll\int_t^{+\infty}u^{a-k-1}du\ll t^{a-k}$$

d'où le résultat. $\square$

LEMME 5. *Soit $d\alpha$ une mesure et b un nombre réel positif tels que*

(i) $\|d\alpha\|_x \ll \log\log 3x, \quad x \geq 1$;

(ii) $\alpha(x) \ll x^{-b}, \quad x \geq 1$.

Soit $d\beta = e^{d\alpha}$, $d\gamma(t) = t d\beta(t)$ et $d\mu = dN_1 * d\gamma$, où $N_1(t) = \lfloor t \rfloor$. Alors, pour toute constante $c < \sqrt{2b}$, on a:

(iii) $\beta(x) = 1 + O(\mathcal{L}(x)^{-c}), \quad x \geq 3$;

(iv) $\gamma(x) \ll x\mathcal{L}(x)^{-c}, \quad x \geq 3$;

(v) $\mu(x) = x + O(\mathcal{L}(x)^{-c}), \quad x \geq 3$.

Démonstration. Le lemme 2 s'applique avec:

$$A(x) = M_1 \log\log 3x\,, \qquad B(x) = M_2\,, \qquad C(u) = e^{-bu}\,,$$

où M_1 et M_2 sont des constantes positives. Nous obtenons:

$$\begin{aligned}\beta(x) &= \int_1^x \sum_{n\geq 0} \frac{(d\alpha)^{*n}}{n!} = 1 + \sum_{n\geq 1} \frac{\alpha_n(x)}{n!}\\ &= 1 + \sum_{n\leq K} + \sum_{n>K}\,,\end{aligned}$$

où K est un paramètre, choisi ultérieurement.

Nous avons pour $n \geq 1$,

$$\frac{|\alpha_n(x)|}{n!} \ll \frac{(M_1 \log\log 3x + O(1))^{n-1}}{(n-1)!} e^{-b\frac{\log x}{n}}\,.$$

La formule de Stirling et un calcul facile montrent que cette dernière quantité est maximale pour

$$n = \sqrt{(2b + o(1))\frac{\log x}{\log\log x}}$$

et est donc, pour tout $n \geq 1$:

$$\ll \mathcal{L}(x)^{-\sqrt{2b}+o(1)}\,.$$

Si nous choisissons $K = \log x$, par exemple, cette dernière estimation se transmet à $\sum_{n\leq K}$. Quant au reste, il est

$$\ll \sum_{n>\log x} \frac{(M_1 \log\log 3x + O(1))^{n-1}}{(n-1)!} \ll \exp\left(-(1 + o(1)) \log x \log\log x\right)$$

donc négligeable: l'assertion (iii) est démontrée.

L'assertion (iv) résulte d'une simple intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_1^x t d\beta(t) &= x\beta(x) - \int_1^x \beta(t)dt \\ &\ll x\mathcal{L}(x)^{-\sqrt{2b}+o(1)} + \int_1^x \mathcal{L}(t)^{-\sqrt{2b}+o(1)}dt \\ &\ll x\mathcal{L}(x)^{-\sqrt{2b}+o(1)} .\end{aligned}$$

Pour démontrer l'assertion (v) nous employons de nouveau la méthode de l'hyperbole :

$$\begin{aligned}\mu(x) &= \int_1^y \gamma\Big(\frac{x}{t}\Big)dN_1(t) + \int_1^{x/y} N_1\Big(\frac{x}{t}\Big)d\gamma(t) - N_1(y)\gamma\Big(\frac{x}{y}\Big) \\ &= \sum_{n\le y} \gamma\Big(\frac{x}{n}\Big) + x\beta\Big(\frac{x}{y}\Big) + O(\|d\gamma\|_{x/y}) + O\big(x\mathcal{L}(x/y)^{-\sqrt{2b}+o(1)}\big)\end{aligned}$$

d'après (iv) et l'égalité

$$N_1\Big(\frac{x}{t}\Big) = \frac{x}{t} + O(1) .$$

Or

$$\|d\gamma\|_z = \int_1^z |td\beta(t)| = \int_1^z t|d\beta|(t) \le z\|d\beta\|_z \le ze^{\|d\alpha\|_z} \le z(\log 3z)^{M_1} ,$$

pour $z \ge 1$. Par suite, en utilisant (iii) et (iv),

$$\mu(x) = x + O(x(\log y)\mathcal{L}(x/y)^{-\sqrt{2b}+o(1)}) + O(x(\log 3x)^{M_1}/y) .$$

En choisissant $y = x^{\varepsilon}$ avec ε positif assez petit, on obtient l'assertion (v). $\square$

Nous pouvons maintenant achever de démontrer le théorème 9. Soit N_2 la fonction de comptage des nombres entiers généralisés engendrés par la suite $\boldsymbol{\beta}$. En utilisant les notations des lemmes 4 et 5, posons :

$$d(\Pi_2 - \Pi_1) = (\log D)\delta + d\lambda ,$$
$$d\alpha(t) = \frac{d\lambda(t)}{t} ,$$

de sorte que, d'une part,

$$\begin{aligned}\|d\alpha\|_x &\le \int_1^x \frac{1}{t}(|\log D|\delta + d\Pi_2 + d\Pi_1)(t) \\ &\le 2\log\log(3x) + O(1) ,\end{aligned}$$

et d'autre part (lemme 4),

$$\alpha(x) \ll x^{a-1} .$$

Or,

$$dN_2 = e^{d\Pi_2} = e^{d\Pi_1} * e^{d\Pi_2 - d\Pi_1} = dN_1 * e^{(\log D)\delta + d\lambda} = DdN_1 * d\gamma$$

où $d\gamma(t) = te^{d\alpha}(t)$. Le théorème résulte donc de l'assertion (v) du lemme 5.

Remerciements

Je remercie: Gautami Bhowmik et Olivier Ramaré pour avoir suscité l'écriture de ce texte en m'invitant à participer au colloque de décembre 1997 à Lille, "Fonctions zêta et énumération"; Harold Diamond pour d'intéressantes suggestions et indications, notamment concernant le théorème 6; et Éric Saias pour d'utiles remarques.

RÉFÉRENCES

[1] BALANZARIO, E. P. On Beurling's theory of generalized primes. Ph. D. thesis, Univ. of Illinois, Urbana-Champaign, 1997.

[2] BALAZARD, M. Une remarque sur la fonction d'Euler. *Rend. Circ. Mat. Palermo (2) 47* (1998), 325–330.

[3] BALAZARD, M. et G. TENENBAUM. Sur la répartition des valeurs de la fonction d'Euler. *Compositio Math. 110* (1998), 239–250.

[4] BATEMAN, P. T. et H. G. DIAMOND. Asymptotic distribution of Beurling's generalized prime numbers. In: *Studies in Number Theory* (W. J. LeVeque, editor), *MAA Studies in Mathematics 6* (1969), 152–210.

[5] BEURLING, A. Analyse de la loi asymptotique de la distribution des nombres premiers généralisés, I. *Acta Math. 68* (1937), 255–291.

[6] DIAMOND, H. G. Characterization of derivations on an algebra of measures, II. *Math. Z. 105* (1968), 301–306.

[7] —— Asymptotic distribution of Beurling's generalized integers. *Illinois J. Math. 14* (1970), 12–28.

[8] —— When do Beurling generalized integers have a density? *J. reine angew. Math. 295* (1977), 22–39.

[9] LEJEUNE DIRICHLET, G. Über die Bestimmung der mittleren Werthe in der Zahlentheorie. In: *Mathematische Werke, vol. 2*, 49–66. Berlin, 1897. (Reprinted by Chelsea Publ. Co.)

[10] HALL, R. S. The prime number theorem for generalized primes. *J. Number Theory 4* (1972), 313–320.