

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 45 (1999)
Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: UNE MAJORATION DE LA LONGUEUR DES POLYNÔMES
CYCLOTOMIQUES
Autor: NICOLAS, Jean-Louis / TERJANIAN, Guy
Kapitel: 1. Introduction
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-64451>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 15.03.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

UNE MAJORATION DE LA LONGUEUR
DES POLYNÔMES CYCLOTOMIQUES

par Jean-Louis NICOLAS et Guy TERJANIAN¹⁾

ABSTRACT. Let us denote by $\beta(m)$ the length of Φ_m , the m -th cyclotomic polynomial, i.e. the sum of the absolute values of its coefficients. We shall prove that for $m \geq 7$ and $m \neq 10$ the following inequality holds: $\beta(m) \leq (\sqrt{2})^{\varphi(m)}$, where φ is the Euler function.

Further, define $P_m(X) = \Phi_m(X) - (X - 1)^{\varphi(m)}$ for $m \geq 2$. We shall deduce from the above inequality that if this polynomial vanishes at some root of unity, then this root of unity is of order 6.

1. INTRODUCTION

Nous noterons φ la fonction d'Euler, μ la fonction de Möbius et Φ_m le m -ième polynôme cyclotomique. On sait que ce polynôme vérifie

$$(1) \quad \Phi_m(X) = \prod_{d|m} (1 - X^{m/d})^{\mu(d)}.$$

Nous définissons les coefficients de Φ_m par

$$(2) \quad \Phi_m(X) = a_{m,0} + a_{m,1}X + \cdots + a_{m,\varphi(m)}X^{\varphi(m)},$$

et nous posons

$$\beta(m) = |a_{m,0}| + |a_{m,1}| + \cdots + |a_{m,\varphi(m)}|.$$

Bateman a donné dans [1] une démonstration très élégante de la majoration

$$(3) \quad \beta(m) \leq m^{\frac{1}{2}d(m)}$$

¹⁾ Recherche partiellement financée par le CNRS, Institut Girard Desargues, UPRES-A 5028 et Laboratoire Émile Picard, UMR 5580.

où $d(m)$ désigne le nombre de diviseurs de m . Il a été démontré par différents auteurs (cf. [2] qui contient un bon historique du sujet) que $\beta(m)$ peut être très grand pour certaines valeurs de m . Cependant, pour les petites valeurs de m , ce phénomène n'apparaît pas. Par exemple, le plus petit m pour lequel

$$\beta(m) > 1 + \varphi(m)$$

est, d'après les calculs d'ordinateurs $m = 1365 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$.

Nous nous proposons de démontrer le résultat suivant :

THÉORÈME 1. *Pour $m \geq 7$ et $m \neq 10$, on a*

$$(4) \quad \beta(m) < (\sqrt{2})^{\varphi(m)}.$$

A partir de la majoration de Wigert (cf. [4], chap. 18)

$$(5) \quad \log d(m) \leq (1 + o(1)) \frac{\log 2 \log m}{\log \log m}, \quad m \rightarrow \infty$$

et de la minoration de $\varphi(m)$ (cf. [4], chap. 18)

$$(6) \quad \varphi(m) \geq (1 + o(1)) e^{-\gamma} \frac{m}{\log \log m}, \quad m \rightarrow \infty$$

où γ désigne la constante d'Euler, il est facile de déduire de (3) que la relation (4) est vérifiée pour $m \geq m_0$. Le calcul de m_0 peut se faire en remplaçant (5) et (6) par les inégalités (cf. [8] et [10])

$$(7) \quad \log d(m) \leq 1,538 \frac{\log 2 \log m}{\log \log m}, \quad m \geq 3$$

$$(8) \quad \varphi(m) \geq \frac{m}{e^{\gamma} \log \log m + 2,51 / \log \log m}, \quad m \geq 3.$$

L'étude (un peu technique) de la fonction de t

$$\frac{t(\log 2)/2}{e^{\gamma} \log \log t + 2,51 / \log \log t} - \frac{\log t}{2} \exp\left(1,538 \frac{\log 2 \log t}{\log \log t}\right)$$

montre qu'elle est positive pour $t \geq 3786$, ce qui prouve le théorème 1 pour $m \geq m_0 = 3786$; il reste à vérifier (4) avec un ordinateur pour $m < m_0$. La démonstration du théorème 1 que nous donnerons est un peu plus longue, mais elle évite au maximum de faire des calculs sur ordinateur.

Soit $\omega(m)$ le nombre de facteurs premiers distincts de m et $\omega'(m)$ le nombre de facteurs premiers impairs distincts de m . Naturellement, on a

$$(9) \quad \omega'(m) \leq \omega(m) \leq \omega'(m) + 1.$$

D'abord, nous utiliserons au lieu de (3) l'amélioration donnée dans [2]

$$(10) \quad \beta(m) \leq m^{2^{k-1}/k}, \quad k = \omega'(m) \geq 1.$$

Ensuite, pour minorer $\varphi(m)$, nous remplaçons (8) par la minoration très simple

$$(11) \quad \varphi(m) \geq \frac{m}{\omega(m) + 1} \geq \frac{m}{\omega'(m) + 2}, \quad m \geq 1.$$

Pour démontrer (11), on écrit $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$, $2 \leq p_1 < p_2 < \dots < p_r$, $r = \omega(m)$. On a $p_i \geq i + 1$, $i = 1, 2, \dots, r$ et il s'ensuit que

$$\frac{\varphi(m)}{m} = \prod_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) \geq \prod_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{i+1}\right) = \frac{1}{r+1}$$

qui, avec (9), prouve (11). Enfin, nous remplacerons (7) par la majoration de $\omega'(m)$ donnée par le lemme 1 ci-dessous. La démonstration du théorème 1 fera l'objet du paragraphe 2.

Considérons maintenant le polynôme

$$(12) \quad P_m(X) = \Phi_m(X) - (X - 1)^{\varphi(m)}.$$

Dans [11], G. Terjanian a étudié la factorisation du polynôme P_m sur le corps des rationnels. De façon plus précise, il a montré que l'on pouvait écrire

$$(13) \quad P_m(X) = \Phi_m(1) X (X^2 - X + 1)^{e(m)} E_m(X), \quad m \geq 3$$

où $E_m(X)$ est un polynôme qui est premier avec $X(X^2 - X + 1)$. La fonction $e(m)$ est assez compliquée :

- $e(m) = 0$ si $m = 3$ ou si $m = 2p^n$ pour p premier, $p \equiv 2 \pmod{3}$ et $n \geq 0$ ou si $m = 6q^n$ pour q premier et $n \geq 0$.
- $e(m) = 2$ si $m = A$ ou $m = 2^k A$ où k est un entier impair, $k \geq 3$ et où A est un entier distinct de 1 dont tous les facteurs premiers sont congrus à 1 modulo 6.
- $e(m) = 1$ dans tous les autres cas.

Il est facile de voir que

$$(14) \quad \Phi_m(1) = 1 \quad \text{ou} \quad \Phi_m(1) = p$$

suivant que m a deux diviseurs premiers distincts ou qu'il est une puissance du nombre premier p .

Dans [5] (cf. aussi [3]), les polynômes

$$(15) \quad M_n(X) = (X + 1)^n - X^n - 1$$

sont appelés *polynômes de Cauchy-Mirimanoff*. Lorsque $n \geq 3$ est premier, on a $M_n(X) = -(X + 1)P_n(-X)$. Cauchy a montré que

$$(16) \quad M_n(X) = X(X + 1)^{a_n}(X^2 + X + 1)^{b_n}H_n(X)$$

avec $a_n = b_n = 0$ si n est pair, et, si n est impair, $a_n = 1$ et $b_n = 0, 2, 1$ suivant que $n \equiv 0, 1, 2 \pmod{3}$. Il est conjecturé que $H_n(X)$ est irréductible pour tout $n \geq 2$. On sait que (cf. [5]), lorsque n est premier, $n \geq 9$, $H_n(X) = E_n(-X)$ est réductible modulo p pour tout p premier.

G. Terjanian conjecture que le polynôme E_m défini par (13) est irréductible sur les rationnels pour tout m . Cette conjecture a été vérifiée jusqu'à $m = 264$ (cf. [11], p. 93) et à l'aide du système de calcul formel *Maple*[®], nous avons pu étendre les calculs jusqu'à $m = 1000$ par une méthode que nous expliquerons au paragraphe 3. En direction de cette conjecture, nous démontrerons comme conséquence du théorème 1

THÉORÈME 2. *Soit z une racine de l'unité telle que $P_m(z) = 0$, où le polynôme P_m est défini par (12) et $m \geq 2$. Alors, z est d'ordre 6, autrement dit, $z^2 - z + 1 = 0$.*

La démonstration du théorème 2 fera l'objet du paragraphe 3.

Une conjecture sans doute plus facile que celle de l'irréductibilité du polynôme E_m est la suivante: Est-ce-que toute racine multiple de P_m est une racine 6-ième de l'unité? Nous avons vu que $\exp(-\frac{2i\pi}{3})$ est racine double de P_m pour une infinité de valeurs de m , par exemple les nombres premiers m qui vérifient $m \equiv 1 \pmod{6}$.

2. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1

LEMME 1. *Soit $\omega'(n)$ le nombre de facteurs premiers impairs distincts de n , et ε un nombre réel positif. On pose*

$$n_0 = n_0(\varepsilon) = \prod_{3 \leq p \leq \exp(1/\varepsilon)} p.$$

Alors, pour tout $n \geq 1$, on a

$$\omega'(n) \leq \varepsilon \log(n) + (\omega'(n_0) - \varepsilon \log(n_0)).$$