

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 45 (1999)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** COURBES ENTIÈRES ET FEUILLETAGES HOLOMORPHES  
**Autor:** Brunella, Marco  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-64446>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 14.03.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## COURBES ENTIÈRES ET FEUILLETAGES HOLOMORPHES

par Marco BRUNELLA

Dans un article remarquable et récent [Mc], M. McQuillan parvient à démontrer la conjecture de Green-Griffiths [GG] pour les surfaces algébriques de type général dont la classe de Segre ( $c_1^2 - c_2$ ) est positive : toute application holomorphe  $f$  de  $\mathbf{C}$  à valeurs dans une telle surface  $X$  est *dégénérée*, i.e. son image est contenue dans une courbe algébrique. C'est un article qui fait intervenir les feuilletages holomorphes, puisqu'au cours de la preuve McQuillan montre que si  $f: \mathbf{C} \rightarrow X$  n'était pas dégénérée alors elle serait feuille (singulière) d'un feuilletage (singulier)  $\mathcal{F}$  sur  $X$ , ou sur un revêtement ramifié de  $X$ . L'étude de  $\mathcal{F}$ , basée en partie sur un théorème de Y. Miyaoka [Mi], mène alors à la contradiction qui prouve la conjecture de Green-Griffiths.

Notre but est de revenir sur la partie "feuilletée" de [Mc], en espérant y apporter quelques clarifications, simplifications et améliorations. Par exemple, nous verrons que le recours au (difficile) théorème de Miyaoka n'est pas réellement indispensable, ce qui a l'avantage de permettre de transposer ces techniques au cas des surfaces rationnelles, où le théorème de Miyaoka n'est pas très efficace. Pour fixer les idées, nous nous proposons donc de démontrer le résultat suivant.

**THÉORÈME.** *Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage holomorphe de  $\mathbf{CP}^2$  de degré  $d \geq 5$ . Supposons que chaque singularité de  $\mathcal{F}$  est non nilpotente, i.e. localement engendrée par un champ de vecteurs dont la partie linéaire est non nilpotente. Alors toute application holomorphe  $f: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{CP}^2$  tangente à  $\mathcal{F}$  est dégénérée.*

Signalons que A. Lins Neto a démontré dans [LN], sous des hypothèses un peu plus fortes concernant les singularités de  $\mathcal{F}$  (mais, par contre, en supposant seulement  $d \geq 2$ ), que les feuilles de  $\mathcal{F}|_{\mathbf{CP}^2 \setminus \text{Sing}(\mathcal{F})}$  sont uniformisées par le disque, et donc que toute application  $f: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{CP}^2 \setminus \text{Sing}(\mathcal{F})$  tangente à  $\mathcal{F}$

est constante. Dans notre théorème on laisse la possibilité que  $f$  passe par  $\text{Sing}(\mathcal{F})$ , et même une infinité de fois: cela pourrait (a priori) arriver si  $\mathcal{F}$  a une singularité localement engendrée par un champ de vecteurs du type  $pz\frac{\partial}{\partial z} + qw\frac{\partial}{\partial w}$ ,  $p, q$  entiers positifs. Ce caractère singulier de  $f$  constitue (comme dans [Mc]) une des difficultés du problème.

Cet article est structuré de la façon suivante. On commence par rappeler la construction et les propriétés basiques d'un courant positif fermé  $\Phi$  associé à une courbe entière  $f: \mathbf{C} \rightarrow X$  non dégénérée et tangente à un feuilletage  $\mathcal{F}$ . Puis on évalue les produits d'intersection  $c_1(T_{\mathcal{F}}) \cdot [\Phi]$ ,  $c_1(N_{\mathcal{F}}) \cdot [\Phi]$ , où  $[\Phi] \in H^2(X, \mathbf{R})$  est la classe de cohomologie de  $\Phi$  et  $T_{\mathcal{F}}$ ,  $N_{\mathcal{F}}$  sont les fibrés tangent et normal de  $\mathcal{F}$ . Si les singularités de  $\mathcal{F}$  sont réduites (au sens de A. Seidenberg [Se]) ces produits sont non négatifs, ce qu'on trouve déjà dans [Mc] dans le cas du fibré tangent comme conséquence de son "inégalité tautologique" (dans le cas du fibré normal le résultat de [Mc] est plus faible). Enfin, en guise d'application, on démontrera le théorème ci-dessus.

Le lecteur attentif verra que la plupart des idées exposées sont déjà présentes dans [Mc]. On peut donc considérer ce texte comme une introduction à (ou une exégèse de) l'article de McQuillan. Je remercie d'ailleurs le rapporteur du présent article, dont les critiques constructives m'ont poussé à améliorer la rédaction.

## 1. COURBES ENTIÈRES ET COURANTS POSITIFS FERMÉS

Soit  $X$  une variété projective lisse de dimension  $n$  et soit  $f: \mathbf{C} \rightarrow X$  une application holomorphe dont l'image n'est pas contenue dans une courbe algébrique. Soulignons que, pour le moment, on ne suppose pas que  $f$  soit tangente à un feuilletage holomorphe. On peut associer à une telle courbe entière un courant positif fermé de la façon suivante, qui est essentiellement due à L. Ahlfors et R. Nevanlinna et qu'on retrouve explicitement dans [Mc, I.0.3]. Voir aussi [De1] pour d'autres renseignements utiles sur le sujet et [De2] pour les notions basiques concernant les courants sur les variétés complexes.

Fixons d'abord une forme kählérienne  $\omega \in A^{1,1}(X)$ . Pour toute  $\eta \in A^2(X)$  et pour tout  $r > 0$  posons

$$T_{f,r}(\eta) = \int_0^r \frac{dt}{t} \int_{D(t)} f^* \eta,$$

où  $D(t) \subset \mathbf{C}$  est le disque de rayon  $t$ . Considérons les courants positifs  $\Phi_r \in A^{1,1}(X)'$  définis par

$$\Phi_r(\eta) = \frac{T_{f,r}(\eta)}{T_{f,r}(\omega)} \quad \forall \eta \in A^2(X).$$

La famille  $\{\Phi_r\}_{r>0}$  est bornée par rapport à la norme usuelle de  $A^{1,1}(X)'$ , on peut donc choisir une suite  $\{r_n\} \subset \mathbf{R}^+$ ,  $r_n \rightarrow +\infty$ , telle que  $\Phi_{r_n}$  converge dans la topologie faible pour  $n \rightarrow +\infty$  vers un courant positif  $\Phi \in A^{1,1}(X)'$ . Nous cherchons toutefois des courants *fermés*, et pour cela il faut choisir la suite  $\{r_n\}$  de façon convenable. Notons  $A(r)$  l'aire de  $f(D(r))$  et  $L(r)$  la longueur de  $f(\partial D(r))$ , on a donc

$$T_{f,r}(\omega) = \int_0^r A(t) \frac{dt}{t},$$

et définissons

$$S_{f,r}(\omega) = \int_0^r L(t) \frac{dt}{t}.$$

Si  $\beta \in A^1(X)$ , le théorème de Stokes et la compacité de  $X$  garantissent l'inégalité

$$|T_{f,r}(d\beta)| \leq \int_0^r \frac{dt}{t} \int_{\partial D(t)} |f^*\beta| \leq \text{const} \cdot S_{f,r}(\omega),$$

où la constante *const* dépend de  $\beta$  (c'est sa norme) mais ne dépend pas de  $r$ . Pour avoir un courant  $\Phi$  fermé il suffit donc de choisir la suite  $\{r_n\}$  de manière telle que la propriété géométrique suivante soit satisfaite :

$$\frac{S_{f,r_n}(\omega)}{T_{f,r_n}(\omega)} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty.$$

L'existence d'une telle suite est assurée par le lemme suivant, qui est une variation sur le lemme d'Ahlfors (affirmant  $\liminf_{r \rightarrow +\infty} \frac{L(r)}{A(r)} = 0$ ).

LEMME 0. *On a*

$$\liminf_{r \rightarrow +\infty} \frac{S_{f,r}(\omega)}{T_{f,r}(\omega)} = 0.$$

*Preuve.* Soit  $f^*\omega = F(t, \theta) t dt \wedge d\theta$ , où  $(t, \theta)$  sont les coordonnées polaires dans  $\mathbf{C}$  et  $F$  est une fonction non négative. On a alors  $A(r) = \int_0^r \int_0^{2\pi} t F(t, \theta) d\theta dt$  et la conformité de  $f$  implique que  $L(r) = r \int_0^{2\pi} F(r, \theta)^{\frac{1}{2}} d\theta$ . L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne, pour  $r > 1$ ,

$$\begin{aligned} S_{f,r}(\omega) - S_{f,1}(\omega) &= \int_1^r \int_0^{2\pi} t F(t, \theta)^{\frac{1}{2}} d\theta \frac{dt}{t} \\ &\leq \left( \int_1^r \int_0^{2\pi} d\theta \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \int_1^r \int_0^{2\pi} t^2 F(t, \theta) d\theta \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq (2\pi \log r)^{\frac{1}{2}} A(r)^{\frac{1}{2}} = (2\pi r \log r)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{d}{dr} T_{f,r}(\omega) \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Il s'agit donc de montrer que

$$\liminf_{r \rightarrow +\infty} \frac{(r \log r) \frac{d}{dr} T_{f,r}(\omega)}{T_{f,r}(\omega)^2} = 0.$$

Remarquons que  $T_{f,r}(\omega)$  est strictement croissante et sa croissance est au moins logarithmique; en particulier  $T_{f,r}(\omega)$  est divergente pour  $r \rightarrow +\infty$ . Pour tout  $R > 1$  la mesure de  $[R, +\infty)$  par rapport à la mesure  $\frac{dT_{f,r}(\omega)}{T_{f,r}(\omega)^2}$  est finie, tandis que par rapport à  $\frac{dr}{r \log r}$  elle est infinie. Donc il n'existe pas  $c > 0$  tel que  $\frac{dT_{f,r}(\omega)}{T_{f,r}(\omega)^2} \geq c \frac{dr}{r \log r}$  pour tout  $r$  dans un voisinage de  $+\infty$ .  $\square$

Si  $\{r_n\}$  est une suite comme ci-dessus, on pourra alors extraire une sous-suite  $\{r_{n_k}\}$  divergente telle que  $\Phi_{r_{n_k}}$  converge vers un courant positif fermé  $\Phi$ .

Soulignons que  $\Phi$  ne dépend pas seulement de  $f$  mais aussi de la forme kählérienne choisie et, surtout, des suites  $\{r_n\}$  et  $\{r_{n_k}\}$ . En fait, il n'est pas indispensable que  $\omega$  soit kählérienne [Mc, I.0.4.8], il suffit qu'elle satisfasse la propriété suivante:  $\omega$  est une  $(1, 1)$ -forme fermée, semi-positive sur  $X$  et strictement positive sur  $X \setminus \Sigma$ , où  $\Sigma \subset X$  est une hypersurface algébrique qui ne contient pas l'image de  $f$ . On appellera *semi-kählérienne* une telle forme.

Si  $\pi: Y \rightarrow X$  est un morphisme birationnel (par exemple l'éclatement d'un point ou d'une sous-variété de  $X$ ) et si  $f(\mathbf{C})$  n'est pas contenue dans l'ensemble des valeurs critiques de  $\pi$ , on peut relever  $f$  en  $\tilde{f}: \mathbf{C} \rightarrow Y$ . Si  $\omega \in A^{1,1}(X)$  est semi-kählérienne,  $\tilde{\omega} = \pi^* \omega$  l'est aussi et on peut construire, comme auparavant, un courant positif fermé  $\tilde{\Phi} \in A^{1,1}(Y)'$  (quitte à choisir, peut-être, de nouvelles sous-suites). On a évidemment:

$$\pi_* \tilde{\Phi} = \Phi$$

car  $T_{\tilde{f},r}(\pi^* \eta) = T_{f,r}(\eta)$  pour toute  $\eta \in A^2(X)$ .

On notera  $[\Phi]$  la classe de cohomologie dans  $H^{n-1,n-1}(X, \mathbf{R})$  représentée par  $\Phi$ . Si  $Z \subset X$  est une hypersurface algébrique, on notera  $[Z]$  sa classe dans  $H^{1,1}(X, \mathbf{R})$  et  $[\Phi] \cdot [Z]$  le produit d'intersection avec  $[\Phi]$ .

LEMME 1. *Soit  $Z \subset X$  une hypersurface algébrique qui ne contient pas l'image de  $f$ , alors*

$$[\Phi] \cdot [Z] \geq 0.$$

REMARQUE.  $f(\mathbf{C}) \not\subset Z$  n'exclut pas la possibilité que  $\text{Supp } \Phi \subset Z$ , par exemple  $\Phi$  pourrait être le courant d'intégration sur une courbe contenue dans  $Z$ .

*Preuve.* Fixons une métrique hermitienne sur le fibré  $\mathcal{O}(Z)$  et soit  $\Theta \in A^{1,1}(X)$  sa courbure multipliée par  $\frac{i}{2\pi}$  ; il s'agit de montrer que  $\Phi(\Theta) \geq 0$ . Si  $s$  est une section de  $\mathcal{O}(Z)$  qui s'annule précisément sur  $Z$ , on a la formule de Poincaré-Lelong (voir, par exemple, [De2])

$$\Theta = \delta_Z + \frac{1}{2\pi i} \partial \bar{\partial} \log \|s\|^2,$$

où  $\delta_Z$  est le courant d'intégration sur  $Z$  et l'égalité est au sens des courants. Si  $r > 0$ , la formule de Jensen (voir, par exemple, [De1]) donne (en supposant, pour simplifier, que  $f(0) \notin Z$ )

$$T_{f,r}(\Theta) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \|s(f(re^{i\theta}))\| d\theta + \log \|s(f(0))\| + \sum_{z \in D(r), f(z) \in Z} \text{ordre}_z(s \circ f) \log \frac{r}{|z|}.$$

Mais  $\log \|s\|$  est supérieurement borné sur  $X$ , donc  $T_{f,r}(\Theta)$  est inférieurement borné, uniformément en  $r$ . D'autre part,  $T_{f,r}(\omega) \rightarrow +\infty$  pour  $r \rightarrow +\infty$ , ce qui implique

$$\Phi(\Theta) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{T_{f,r}(\Theta)}{T_{f,r}(\omega)} \geq 0. \quad \square$$

Considérons maintenant le cas où  $X$  est une surface. Puisque, par hypothèse,  $f(\mathbf{C})$  n'est pas contenue dans une courbe algébrique, on déduit du lemme précédent que la classe  $[\Phi]$  est *numériquement effective* :

$$[\Phi] \cdot [C] \geq 0 \quad \text{pour toute courbe } C \subset X.$$

On sait bien que cela entraîne :

$$[\Phi]^2 \geq 0.$$

Supposons à présent qu'on dispose sur la surface  $X$  d'un feuilletage holomorphe  $\mathcal{F}$  (à singularités isolées), et que la courbe entière  $f: \mathbf{C} \rightarrow X$  est tangente à  $\mathcal{F}$ . C'est-à-dire, si  $\Omega$  est une 1-forme holomorphe dans un ouvert de  $X$  qui définit  $\mathcal{F}$  dans cet ouvert, alors  $f^*\Omega = 0$ . Le courant positif fermé  $\Phi$  est alors *invariant par  $\mathcal{F}$*  au sens suivant :  $\Phi(\eta) = 0$  pour toute 2-forme  $\eta$  qui s'annule sur  $\mathcal{F}$  (i.e. qui s'annule en restriction aux feuilles de  $\mathcal{F}$ ). En effet, pour une telle 2-forme on a  $f^*\eta = 0$ . Voyons de plus près ce que cela signifie. Soit  $p \in X$  un point régulier de  $\mathcal{F}$  ; choisissons près de  $p$  des coordonnées locales  $(z_1, z_2)$  dans lesquelles  $\mathcal{F} = \{dz_1 = 0\}$ . Dans ces coordonnées  $\Phi$  s'exprime (avec quelques abus de notations) comme  $\sum_{j,k=1,2} A_{j,k} dz_j \wedge d\bar{z}_k$ ,

où les  $A_{j,k}$  sont des mesures; la condition de  $\mathcal{F}$ -invariance implique alors  $A_{1,2} = A_{2,1} = A_{2,2} = 0$ , et  $d\Phi = 0$  implique que  $A_{1,1}$  ne dépend pas de  $z_2, \bar{z}_2$  et donc que  $A_{1,1}$  engendre une *mesure transverse invariante* pour  $\mathcal{F}$  (ou, plus exactement, pour  $\mathcal{F}|_{X \setminus \text{Sing}(\mathcal{F})}$ ). Voir [Su] pour plus de détails sur cette correspondance entre courants positifs fermés  $\mathcal{F}$ -invariants et mesures transverses  $\mathcal{F}$ -invariantes. On peut donc penser le support  $K$  de  $\Phi$  comme une “lamination” (singulière), formée de certaines feuilles du feuilletage et équipée d’une mesure transverse qui permet d’intégrer les 2-formes le long de ces feuilles (en obtenant ainsi le courant  $\Phi$ ). On va résumer cela dans un lemme.

LEMME 2. *Le feuilletage  $\mathcal{F}|_{X \setminus \text{Sing}(\mathcal{F})}$  possède une mesure transverse invariante  $\mu$  dont le support coïncide avec  $K \cap (X \setminus \text{Sing}(\mathcal{F}))$ .  $\square$*

Si  $p \in X \setminus \text{Sing}(\mathcal{F})$  est un atome de  $\mu$ , la feuille de  $\mathcal{F}$  passant par  $p$  est nécessairement algébrique, i.e. son adhérence dans  $X$  est une courbe algébrique  $C_p$ . En effet, une telle feuille ne peut pas s’accumuler sur elle-même ou sur une autre feuille de  $\mathcal{F}|_{X \setminus \text{Sing}(\mathcal{F})}$ , puisque cela contredirait la finitude de la mesure transverse invariante. Donc la feuille passant par  $p$  est un sous-ensemble analytique de  $X \setminus \text{Sing}(\mathcal{F})$ , et les théorèmes classiques d’élimination des singularités garantissent que l’adhérence de la feuille dans  $X$  est encore analytique, donc une courbe algébrique. Le courant  $\Phi$  “contient” alors le courant d’intégration sur  $C_p$ , avec poids égal à  $\mu(p)$ . Puisque  $\mathcal{F}$  a des feuilles non algébriques, le nombre de feuilles algébriques est fini, d’après un théorème classique de Darboux généralisé dans [Jo]. On peut donc décomposer  $\Phi$  de la façon suivante :

$$\Phi = \Phi_{alg} + \Phi_{diff},$$

où  $\Phi_{alg} = \sum_{j=1}^N \lambda_j \delta_{C_j}$ ,  $\lambda_j > 0$ ,  $C_j$  courbe algébrique  $\mathcal{F}$ -invariante, et  $\Phi_{diff}$  est un courant positif fermé  $\mathcal{F}$ -invariant et dont la mesure transverse associée n’a pas d’atomes.

Soulignons que, même si  $f: \mathbf{C} \rightarrow X$  a une image transcendante, il peut bien arriver que  $\Phi_{alg}$  soit non triviale. Par contre, nous ne connaissons pas d’exemples (mais il doit y en avoir) où la décomposition ci-dessus est non triviale, i.e.  $\Phi_{alg} > 0$  et  $\Phi_{diff} > 0$ . Puisque  $\Phi$  dépend de la suite  $r_n \rightarrow +\infty$ , on peut espérer obtenir l’annulation d’un des deux termes de la décomposition après avoir choisi une sous-suite  $r_{n_k} \rightarrow +\infty$ .

Terminons cette section par un exemple qui illustre la théorie précédente. Soit  $X = \mathbf{CP}^1 \times \mathbf{CP}^1$  et soit  $\mathcal{F}$  le feuilletage qui s’exprime dans la carte

affine  $\mathbf{C} \times \mathbf{C} \subset X$  par l'équation

$$w dz - \lambda z dw = 0,$$

où  $\lambda \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$ . Les seules feuilles algébriques de  $\mathcal{F}$  sont les quatre droites

$$L_0 = \{z = 0\}, \quad L_\infty = \{z = \infty\}, \quad N_0 = \{w = 0\}, \quad N_\infty = \{w = \infty\},$$

sur lesquelles toute autre feuille s'accumule. La courbe entière

$$f: \mathbf{C} \rightarrow X \quad f(x) = (e^{\lambda x}, e^x)$$

est tangente à  $\mathcal{F}$  et son image est transcendante. On utilisera la forme kählérienne  $\omega = \omega_1 + \omega_2$ , où  $\omega_1 = \frac{idz \wedge d\bar{z}}{(1+|z|^2)^2}$  et  $\omega_2 = \frac{idw \wedge d\bar{w}}{(1+|w|^2)^2}$ . Les calculs explicites sont possibles mais ennuyeux; il est toutefois aisé de voir que, pour une constante convenable  $c > 0$ , on a pour  $t \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} \int_{D(t)} f^* \omega_1 &= c |\lambda| t + o\left(\frac{1}{t}\right) \\ \int_{D(t)} f^* \omega_2 &= ct + o\left(\frac{1}{t}\right) \end{aligned}$$

et donc  $T_{f,r}(\omega) = (1+|\lambda|)cr + o(1)$  pour  $r \rightarrow +\infty$ . La courbe réelle  $f(\partial D(t))$  s'approche de plus en plus, pour  $t \rightarrow +\infty$ , de l'union  $T$  des quatre droites  $\mathcal{F}$ -invariantes. Donc si  $\eta \in A^2(X)$  a son support disjoint de  $T$  on obtient que  $\int_{D(t)} f^* \eta$  est constant pour  $t$  assez grand et par conséquent  $T_{f,r}(\eta)$  a une croissance logarithmique en  $r$ . Cela signifie que si  $\Phi \in A^{1,1}(X)'$  est un courant positif fermé dérivé de  $f$  on a  $\Phi(\eta) = 0$  et donc  $\text{Supp } \Phi \subset T$ . Cela correspond au fait que, pour des raisons dynamiques évidentes, les seules mesures transverses invariantes sont celles concentrées sur  $T$ . On peut alors développer  $\Phi$  sous la forme

$$\Phi = a_0 \delta_{L_0} + a_\infty \delta_{L_\infty} + b_0 \delta_{N_0} + b_\infty \delta_{N_\infty},$$

où  $a_0, a_\infty, b_0, b_\infty$  sont des réels positifs. Puisque  $T_{f,r}(\omega_1) = c|\lambda|r + o(1)$ , on a nécessairement  $\Phi(\omega_1) = \frac{|\lambda|}{1+|\lambda|}$ . D'autre part,  $\delta_{L_0}(\omega_1) = \delta_{L_\infty}(\omega_1) = 0$ ,  $\delta_{N_0}(\omega_1) = \delta_{N_\infty}(\omega_1) = 2\pi$ , donc  $2\pi(b_0 + b_\infty) = \frac{|\lambda|}{1+|\lambda|}$ . De façon analogue, avec  $\omega_2$  à la place de  $\omega_1$ , on arrive à  $2\pi(a_0 + a_\infty) = \frac{1}{1+|\lambda|}$ . Enfin, raisons de symétrie imposent  $a_0 = a_\infty$  et  $b_0 = b_\infty$ , et donc  $\Phi$  coïncide forcément avec le courant

$$\frac{1}{4\pi(1+|\lambda|)} (\delta_{L_0} + \delta_{L_\infty} + |\lambda| \delta_{N_0} + |\lambda| \delta_{N_\infty}).$$

À remarquer que le quotient entre le coefficient de  $\delta_{N_0}$  et celui de  $\delta_{L_0}$  est égal au quotient entre la valeur propre de  $\mathcal{F}$  en  $(0, 0)$  le long de  $N_0$  et celle le long de  $L_0$ .

Si dans le même exemple on prend  $\lambda \in \mathbf{R}$  (et  $\lambda \notin \mathbf{Q}$  pour avoir des feuilles transcendantes) les feuilles de  $\mathcal{F}$  sont denses sur des hypersurfaces réelles et la dynamique de  $\mathcal{F}$  sur ces hypersurfaces ressemble à celle des feuilletages linéaires irrationnels des tores. Le courant  $\Phi$  sera alors uniformément distribué sur une de ces hypersurfaces.

Enfin, on peut construire de nouveaux exemples à partir des précédents par des transformations birationnelles. On aura ainsi des exemples où la courbe entière passe une infinité de fois à travers une singularité du feuilletage.

## 2. L'INÉGALITÉ TAUTOLOGIQUE ET SES CONSÉQUENCES

On continue avec les hypothèses et les notations de la section précédente :

- $X$  est une surface algébrique lisse ;
- $\mathcal{F}$  est un feuilletage holomorphe sur  $X$ , à singularités isolées ;
- $f: \mathbf{C} \rightarrow X$  est une courbe entière non dégénérée et tangente à  $\mathcal{F}$  ;
- $\Phi \in A^{1,1}(X)'$  est un courant positif fermé associé à  $f$ .

En plus, on supposera que les singularités de  $\mathcal{F}$  sont *réduites* au sens de [Se] (voir aussi [CS]) : au voisinage de chaque point singulier,  $\mathcal{F}$  est engendré par un champ de vecteurs dont la partie linéaire a pour valeurs propres  $1, \lambda$ , avec  $\lambda \notin \mathbf{Q}^+$ . Si  $\lambda \neq 0$  le point singulier est *simple*, sinon c'est un *nœud-col*. Ainsi chaque singularité réduite a une *multiplicité*  $d \geq 1$ , et  $d > 1$  si et seulement si la singularité est un nœud-col. Une *séparatrice* d'une singularité est une courbe analytique définie au voisinage de la singularité, tangente au feuilletage et passant par la singularité. On utilisera le fait qu'une singularité simple a exactement deux séparatrices (l'une transverse à l'autre), tandis qu'un nœud-col a une "séparatrice forte" tangente à l'espace propre de valeur propre 1 et, parfois, une "séparatrice faible" tangente à celui de valeur propre 0 [CS], [MR]. L'étude des feuilletages à singularités réduites est justifiée par le théorème de réduction des singularités de Seidenberg [Se] : tout feuilletage peut être transformé en un feuilletage à singularités réduites par une suite d'éclatements.

Du point de vue global, on peut associer à  $\mathcal{F}$  (et malgré ses singularités) un fibré tangent  $T_{\mathcal{F}}$  et un fibré normal  $N_{\mathcal{F}}$  : dans le langage des diviseurs,  $T_{\mathcal{F}}$  (resp.  $N_{\mathcal{F}}^*$ , dual de  $N_{\mathcal{F}}$ ) est représenté par la différence entre le diviseur

des zéros et le diviseur des pôles d'un champ de vecteurs méromorphe (resp. d'une 1-forme méromorphe) qui engendre  $\mathcal{F}$ . Nous renvoyons à [Br] pour les propriétés les plus basiques de ces fibrés (par exemple, leur comportement par éclatements).

Dans cette section nous allons esquisser, d'après [Mc], la preuve de l'inégalité suivante.

THÉORÈME 1 [Mc, §II.3].  $c_1(T_{\mathcal{F}}) \cdot [\Phi] \geq 0$ .

En fait, nous nous contenterons de déduire cette inégalité de l'*inégalité tautologique raffinée* [Mc, II.3.3.2], dont la preuve est (presque) indépendante du feuilletage et sort un peu du cadre de ce texte.

Soit  $\mathbf{PTX}$  la projectivisation du fibré tangent de  $X$ ; c'est un  $\mathbf{CP}^1$ -fibré sur  $X$ , dont on notera  $\pi: \mathbf{PTX} \rightarrow X$  la projection. Sur  $\mathbf{PTX}$  on dispose du fibré tautologique  $\mathcal{O}_{\mathbf{PTX}}(-1)$ , qui a pour degré  $-1$  sur chaque fibre de  $\pi$  et qui jouera un rôle essentiel dans la suite. Rappelons la formule (tautologique) suivante: si  $C \subset X$  est une courbe algébrique lisse et si  $C' \subset \mathbf{PTX}$  est son relevé naturel, on a  $c_1(\mathcal{O}_{\mathbf{PTX}}(-1)) \cdot [C'] = \chi(C)$ .

Le feuilletage  $\mathcal{F}$  définit une section de  $\mathbf{PTX}$  au dessus de  $X \setminus \text{Sing}(\mathcal{F})$ , dont l'adhérence  $X' \subset \mathbf{PTX}$  est appelée *graphe* de  $\mathcal{F}$ . Si  $p \in \text{Sing}(\mathcal{F})$ ,  $X'$  contient toute la fibre  $\pi^{-1}(p)$ . Si  $p$  est simple,  $X'$  est lisse au voisinage de  $\pi^{-1}(p)$  et la projection  $\pi: X' \rightarrow X$  s'identifie au voisinage de  $\pi^{-1}(p)$  avec l'éclatement de  $X$  en  $p$ . Si  $p$  est un nœud-col de multiplicité  $d$ ,  $X'$  a sur  $\pi^{-1}(p)$  un point singulier de type  $A_{d-1}$ . En effet, dans des coordonnées locales convenables le feuilletage  $\mathcal{F}$  au voisinage d'un nœud-col de multiplicité  $d$  est donné par l'équation (forme normale de Dulac, voir [MR] ou [CS])

$$[z(1 + \lambda w^{d-1}) + w F(z, w)] dw - w^d dz = 0.$$

où  $\lambda \in \mathbf{C}$  et  $F$  est une fonction holomorphe qui s'annule en  $(0,0)$  avec ses dérivés jusqu'à l'ordre  $d-1$ . Les coordonnées  $z, w$  induisent au voisinage de  $\pi^{-1}(p)$  des coordonnées naturelles  $z, w, \xi$ , où  $\xi = \frac{dw}{dz} \in \mathbf{CP}^1$ , et dans ces coordonnées le graphe  $X'$  est donné par l'équation

$$w^d = [z(1 + \lambda w^{d-1}) + w F(z, w)] \xi.$$

Un changement de variable  $z \mapsto z'$  ramène cette équation à la forme  $w^d = z' \xi$ , et on voit que si  $\xi \neq 0$  le point  $(0,0,\xi)$  est régulier, tandis que  $(0,0,0)$  est une singularité  $A_{d-1}$ . Donc le graphe  $X'$  peut avoir des singularités, mais cela ne nous gênera pas beaucoup, à la limite on pourra remplacer  $X'$  par sa résolution.

Pour tout  $p \in \text{Sing}(\mathcal{F})$ , de multiplicité  $d_p$ , soit  $E_p = \pi^{-1}(p)$ , regardé comme courbe dans  $X'$ . On vérifie aisément que  $d_p E_p$  est un diviseur de Cartier, qui définit donc un fibré linéaire  $\mathcal{O}(d_p E_p)$  sur  $X'$ . Le degré de ce fibré sur  $E_p$  est égal à  $-1$  (car  $[d_p E_p]^2 = -d_p$  dans  $X'$ ). D'autre part,  $\mathcal{O}_{\mathbf{PTX}}(-1)$  a degré  $-1$  sur chaque  $E_p$  et coïncide (par tautologie) avec  $\pi^*(T_{\mathcal{F}})$  sur  $X' \setminus \bigcup_p E_p$ . On en déduit que

$$\mathcal{O}_{\mathbf{PTX}}(-1)|_{X'} = \pi^*(T_{\mathcal{F}}) \otimes \mathcal{O}\left(\sum_{p \in \text{Sing}(\mathcal{F})} d_p E_p\right).$$

On relève la courbe entière  $f$  sur  $\mathbf{PTX}$  à travers sa "dérivée"  $f' : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{PTX}$ . Bien sûr, l'image de  $f'$  est dans  $X'$  car  $f$  est tangente à  $\mathcal{F}$ . On peut associer à  $f'$  un courant positif fermé  $\Phi' \in A^{1,1}(X)'$ , comme dans la section précédente, et  $\pi_* \Phi' = \Phi$ . L'inégalité tautologique [Mc, I.0.2.5] exprime alors, intuitivement, la "non-négativité de la caractéristique d'Euler" de  $[\Phi]$  :

$$c_1(\mathcal{O}_{\mathbf{PTX}}(-1)) \cdot [\Phi'] \geq 0.$$

Voici l'idée de la preuve [Mc, I.1.1]. Soit  $Y$  la variété (de dimension 4) obtenue à partir de  $X \times X$  par éclatement de la diagonale  $\Delta \subset X \times X$ , et soit  $Z \subset Y$  le diviseur exceptionnel de l'éclatement: c'est un  $\mathbf{CP}^1$ -fibré sur  $\Delta \simeq X$ , canoniquement isomorphe à  $\mathbf{PTX}$ , et le fibré  $\mathcal{O}(Z) \in \text{Pic}(Y)$  restreint à  $Z$  coïncide avec le fibré tautologique:  $\mathcal{O}_{\mathbf{PTX}}(-1) \simeq \mathcal{O}(Z)|_Z$ . Soit  $\hat{f} : \mathbf{C} \rightarrow X \times X$  définie par  $\hat{f}(x) = (f(x), f(x))$ . Pour tout  $t \in \mathbf{C}$  proche de 1 on peut déformer  $\hat{f}$  de la manière suivante: on pose  $\hat{f}_t : \mathbf{C} \rightarrow X \times X$ ,  $\hat{f}_t(x) = (f(tx), f(x))$ . À la différence de  $\hat{f}$ , la courbe entière  $\hat{f}_t$  n'a pas son image contenue dans la diagonale  $\Delta$ , on peut donc la relever sur  $Y$  et on la notera alors  $\tilde{f}_t$ . On associe à  $\tilde{f}_t$  un courant positif fermé  $\tilde{\Phi}_t \in A^{1,1}(Y)'$  et le lemme 1 donne  $[\tilde{\Phi}_t] \cdot [Z] \geq 0$ . Pour  $t \rightarrow 1$  la courbe  $\tilde{f}_t$  "converge" vers la courbe  $f' : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{PTX} \simeq Z \subset Y$ , on a donc  $[\Phi'] \cdot [Z] \geq 0$ , qui est l'inégalité cherchée.

Après avoir défini

$$\nu(\Phi, p) = [\Phi'] \cdot [d_p E_p] \geq 0$$

on peut réécrire l'inégalité tautologique sous la forme

$$c_1(T_{\mathcal{F}}) \cdot [\Phi] \geq - \sum_{p \in \text{Sing}(\mathcal{F})} \nu(\Phi, p).$$

Une singularité  $p$  est dite *petite* [Mc, II.3.3.1] si elle est simple et si ses deux séparatrices locales font partie de deux courbes algébriques (nécessairement invariantes) qui s'intersectent seulement en  $p$ . Puisque  $f$  est non dégénérée, son image n'est pas contenue dans ces courbes algébriques

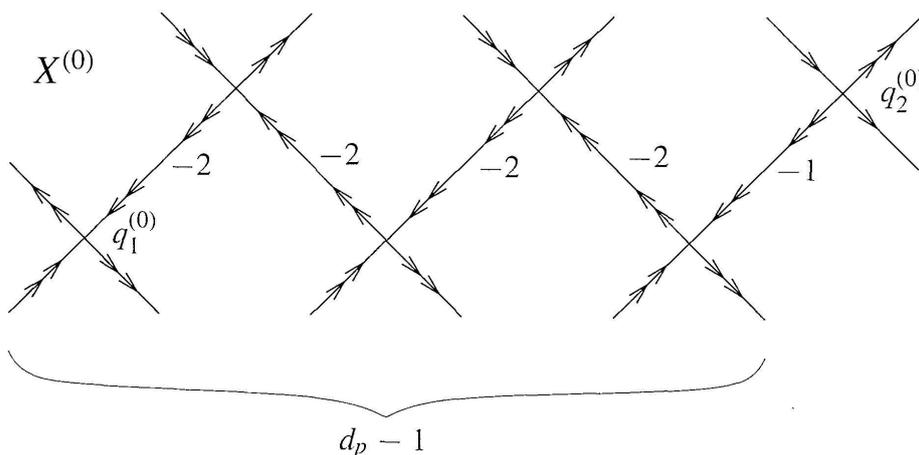
(mais, bien sûr,  $\text{Supp}(\Phi)$  peut contenir ces courbes) et donc  $f$  ne passe pas à travers la singularité. Cela permet d'améliorer l'inégalité tautologique, et on obtient ainsi l'inégalité tautologique raffinée [Mc, II.3.3.2]:

$$c_1(T_{\mathcal{F}}) \cdot [\Phi] \geq - \sum_{p \in \text{SING}(\mathcal{F})} \nu(\Phi, p),$$

où  $\text{SING}(\mathcal{F}) \subset \text{Sing}(\mathcal{F})$  est l'ensemble des singularités qui ne sont pas petites. Comme justification partielle de cette amélioration, remarquons qu'elle serait évidente si on pouvait démontrer que  $\nu(\Phi, p) = 0$  si  $p$  est petite. Dans le cas où  $\Phi_{\text{alg}} = 0$  (i.e.  $\Phi = \Phi_{\text{diff}}$ ) cette annulation semble avoir lieu si le quotient des valeurs propres de  $\mathcal{F}$  en  $p$  n'est pas réel positif (ce qui serait déjà suffisant pour la suite): voir les commentaires après le lemme 6 de la prochaine section.

Passons maintenant à la preuve du théorème 1. Pour simplifier les notations, supposons que  $\mathcal{F}$  a une seule singularité,  $p$ . Soit  $X^{(0)}$  la surface obtenue par la construction suivante:

- si  $p$  est simple,  $X^{(0)}$  est l'éclaté de  $X$  en  $p$ ;
- si  $p$  est un nœud-col,  $X^{(0)}$  est le produit de  $d_p$  éclatements, chaque éclatement au seul point au dessus de  $p$  où le feuilletage relevé a un nœud-col:



Le diviseur exceptionnel de  $X^{(0)} \rightarrow X$  contient donc une courbe rationnelle d'autointersection  $-1$  et une chaîne de  $d_p - 1$  courbes rationnelles d'autointersection  $-2$ , la contraction desquelles produit la singularité  $A_{d_p-1}$  du graphe  $X'$ . La surface  $X^{(0)}$  n'est donc rien d'autre que la résolution minimale de  $X'$ .

Comme d'habitude, on relève  $f$  sur  $X^{(0)}$  et on construit  $\Phi^{(0)} \in A^{1,1}(X^{(0)})'$ .

LEMME 3.  $[\Phi^{(0)}]^2 \leq [\Phi]^2 - \frac{1}{d_p} \nu(\Phi, p)^2$ .

*Preuve.* Considérons d'abord le courant intermédiaire  $\Phi' \in A^{1,1}(X')'$  : puisque  $\pi_* \Phi' = \Phi$  et  $[d_p E_p] \cdot [E_p] = -1$ , on a

$$[\Phi'] = \pi^*[\Phi] - \nu(\Phi, p) \cdot [E_p]$$

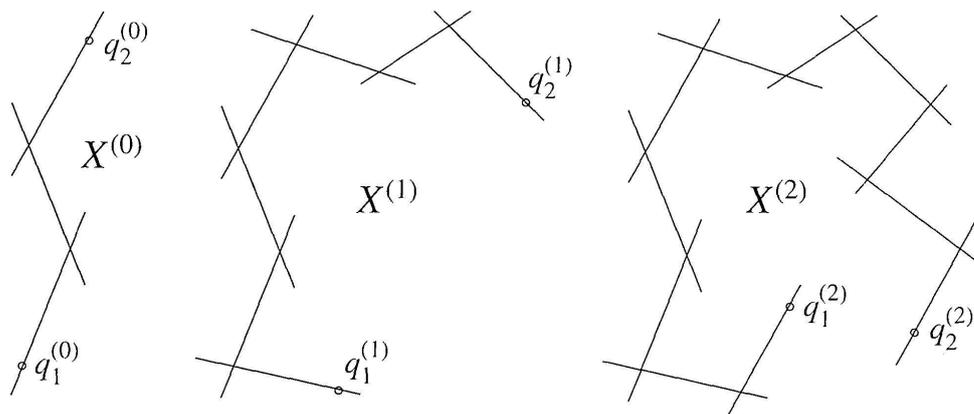
et donc

$$[\Phi']^2 = [\Phi]^2 - \frac{1}{d_p} \nu(\Phi, p)^2.$$

Si  $d_p = 1$  on a fini car  $X' = X^{(0)}$ . Si  $d_p > 1$  on passe de  $X'$  à  $X^{(0)}$  par une suite de  $d_p - 1$  éclatements, et puisque  $\Phi^{(0)}$  se projette sur  $\Phi'$  on obtient

$$[\Phi^{(0)}]^2 \leq [\Phi']^2. \quad \square$$

On peut itérer cette construction. Le feuilletage  $\mathcal{F}^{(0)}$  sur  $X^{(0)}$  possède deux singularités  $q_1^{(0)}$ ,  $q_2^{(0)}$  (avec  $d_{q_1^{(0)}} = 1$ ,  $d_{q_2^{(0)}} = d_p$ ) sur le diviseur exceptionnel de  $X^{(0)} \rightarrow X$  qui ne sont pas aux coins de ce diviseur et qui sont donc les seules susceptibles d'être non petites. Soit  $X^{(1)}$  obtenue par la construction précédente appliquée à ces deux singularités,  $X^{(2)}$  par la même construction appliquée aux deux seules singularités  $q_1^{(1)}$ ,  $q_2^{(1)}$  de  $\mathcal{F}^{(1)}$  susceptibles d'être non petites, *and so on*.



Le même argument que celui du lemme 3 donne alors l'inégalité suivante, avec notations évidentes et pour  $n \geq 1$  :

$$[\Phi^{(n)}]^2 \leq [\Phi^{(n-1)}]^2 - \left\{ \nu(\Phi^{(n-1)}, q_1^{(n-1)})^2 + \frac{1}{d_p} \nu(\Phi^{(n-1)}, q_2^{(n-1)})^2 \right\}$$

et par conséquent :

$$[\Phi^{(n)}]^2 \leq [\Phi]^2 - \left\{ \frac{1}{d_p} \nu(\Phi, p)^2 + \sum_{j=0}^{n-1} \left\{ \nu(\Phi^{(j)}, q_1^{(j)})^2 + \frac{1}{d_p} \nu(\Phi^{(j)}, q_2^{(j)})^2 \right\} \right\}.$$

L'observation fondamentale est alors la suivante: puisque  $[\Phi^{(n)}]^2 \geq 0$  pour tout  $n \geq 0$ , la somme  $\sum_{j=0}^{n-1} \dots$  qui apparaît ci-dessus est majorée par  $[\Phi]^2 - \frac{1}{d_p} \nu(\Phi, p)^2$  pour tout  $n \geq 0$ , et donc

$$\nu(\Phi^{(n)}, q_i^{(n)}) \rightarrow 0 \quad \text{pour} \quad n \rightarrow +\infty.$$

Le feuilletage  $\mathcal{F}^{(n)}$  sur  $X^{(n)}$  a (au plus) deux singularités non petites,  $q_1^{(n)}$  et  $q_2^{(n)}$ , et de l'inégalité tautologique raffinée on déduit

$$c_1(T_{\mathcal{F}^{(n)}}) \cdot [\Phi^{(n)}] \geq -\nu(\Phi^{(n)}, q_1^{(n)}) - \nu(\Phi^{(n)}, q_2^{(n)}).$$

Mais puisqu'on éclate toujours des singularités réduites on a  $T_{\mathcal{F}^{(n)}} = (\pi^{(n)})^*(T_{\mathcal{F}})$  (où  $\pi^{(n)}$  est la projection de  $X^{(n)}$  sur  $X$ ), et donc  $c_1(T_{\mathcal{F}^{(n)}}) \cdot [\Phi^{(n)}] = c_1(T_{\mathcal{F}}) \cdot [\Phi]$ . On en déduit que

$$c_1(T_{\mathcal{F}}) \cdot [\Phi] \geq 0.$$

C'est le théorème 1. Tout cela démontre (s'il en était besoin) que les éclatements ne servent pas seulement à résoudre des singularités...

### 3. LE DEGRÉ DU FIBRÉ NORMAL SUR LA COURBE ENTIÈRE

Avec les mêmes hypothèses et notations qu'auparavant, nous allons ici démontrer le résultat suivant, qui précise [Mc, II.1.4.1].

**THÉORÈME 2.**  $c_1(N_{\mathcal{F}}) \cdot [\Phi] \geq 0$ .

On va d'abord se débarrasser de la composante algébrique  $\Phi_{alg} = \sum_{j=1}^N \lambda_j \delta_{C_j}$ . Puisque  $\mathcal{F}$  est à singularités réduites,  $C = \bigcup_{j=1}^N C_j$  est une courbe à croisements normaux: elle est  $\mathcal{F}$ -invariante, donc ses singularités sont contenues dans  $\text{Sing}(\mathcal{F})$  et au voisinage d'une de ses singularités elle coïncide avec l'union des séparatrices de  $\mathcal{F}$ . On a  $c_1(N_{\mathcal{F}}) \cdot [C_j] = [C_j]^2 + Z(C_j, \mathcal{F})$ , où  $Z(C_j, \mathcal{F})$  est la multiplicité totale des singularités de  $\mathcal{F}$  le long de  $C_j$  [Br, lemme 3], et cette multiplicité est évidemment au moins égale à  $[C_j] \cdot \sum_{k \neq j} [C_k]$ . Donc  $c_1(N_{\mathcal{F}}) \cdot [C_j] \geq [C_j] \cdot [C]$  et par conséquent

$$c_1(N_{\mathcal{F}}) \cdot [\Phi_{alg}] \geq [\Phi_{alg}] \cdot [C].$$

D'autre part, la classe  $[\Phi]$  est numériquement effective et donc  $[\Phi_{alg}] \cdot [C] \geq -[\Phi_{diff}] \cdot [C]$ . On en déduit:

$$c_1(N_{\mathcal{F}}) \cdot [\Phi] \geq c_1(N_{\mathcal{F}} \otimes \mathcal{O}(-C)) \cdot [\Phi_{diff}].$$

Notre but est donc de démontrer

$$c_1(N_{\mathcal{F}} \otimes \mathcal{O}(-C)) \cdot [\Phi_{diff}] \geq 0.$$

Pour cela, nous allons d'abord construire une 2-forme fermée  $\Theta$  qui représente la classe de Chern de  $N_{\mathcal{F}} \otimes \mathcal{O}(-C)$ , d'après la méthode classique qui est à la base de tous les théorèmes d'annulation ou d'indice (Baum-Bott, Camacho-Sad, etc.).

On peut choisir un recouvrement ouvert  $\{U_k\}$  de  $X$ , des 1-formes logarithmiques  $\Omega_k \in \Omega^1(\log C)(U_k)$  et des  $(1,0)$ -formes  $\beta_k \in A^{1,0}(U_k)$  telles que :

- i) dans  $U_k$ ,  $\mathcal{F}$  est représenté par  $f_k \Omega_k = 0$ , où  $f_k$  est une équation de  $C$  dans  $U_k$  (donc  $f_k \Omega_k \in \Omega^1(U_k)$  est une 1-forme holomorphe à singularités isolées);
- ii) chaque  $U_k$  contient au plus une singularité de  $\mathcal{F}$ ;
- iii)  $d\Omega_k = \beta_k \wedge \Omega_k$  dans  $U_k \setminus V_k$ , où  $V_k \subset U_k$  est disjoint de  $U_l$  pour tout  $l \neq k$ .

Il est clair que de tels  $\{U_k, \Omega_k, \beta_k\}$  existent, voici la construction explicite qu'on utilisera plus loin. Au voisinage d'un point régulier  $\mathcal{F}$  est donné (en coordonnées convenables  $z, w$ ) par  $dz = 0$ , on peut choisir alors  $\Omega = dz$  ou  $\Omega = \frac{dz}{z}$ , selon la structure de  $C$  au voisinage du point, et  $\beta = 0$ . Au voisinage d'un point singulier  $\mathcal{F}$  est donné par  $adw - bdz = 0$ , avec  $a$  et  $b$  holomorphes et  $\{a = b = 0\} = \{(0, 0)\}$ . Si le point singulier n'appartient pas à  $C$  on choisira  $\Omega = adw - bdz$  et

$$\beta = F \cdot \frac{a_z + b_w}{|a|^2 + |b|^2} (\bar{a} dz + \bar{b} dw),$$

où  $F$  est une fonction  $C^\infty$  réelle qui s'annule au voisinage du point singulier et qui vaut 1 hors d'un voisinage (aussi petit que l'on veut) de ce même point. Si le point singulier est un point double de  $C$ , on peut supposer que dans les coordonnées fixées on a  $C = \{zw = 0\}$ , et donc  $a$  est divisible par  $z$  et  $b$  par  $w$  car  $C$  est  $\mathcal{F}$ -invariante. On choisira alors  $\Omega = \frac{a}{z} \frac{dw}{w} - \frac{b}{w} \frac{dz}{z}$  et

$$\beta = F \cdot \frac{a_z - \frac{a}{z} + b_w - \frac{b}{w}}{|a|^2 + |b|^2} (\bar{a} dz + \bar{b} dw).$$

Le cas intermédiaire où le point singulier appartient à un point lisse de  $C$  est laissé au lecteur.

Les ouverts  $U_k$  seront donc des petites boules centrées sur des points réguliers ou singuliers, et  $V_k \subset U_k$  des boules encore plus petites, ou même vides dans le cas des points réguliers.

Sur chaque intersection  $U_k \cap U_j$  on a

$$\Omega_k = g_{kj} \Omega_j \quad g_{kj} \in \mathcal{O}^*(U_k \cap U_j)$$

et  $\{g_{kj}\} \in H^1(X, \mathcal{O}^*)$  est un cocycle définissant le fibré  $N_{\mathcal{F}} \otimes \mathcal{O}(-C)$ . Pour se convaincre de cela, notons  $L$  le fibré défini par  $\{g_{kj}\}$ . Le fibré  $L \otimes \mathcal{O}(C)$  est donc donné par le cocycle  $\{g_{kj} \frac{f_k}{f_j}\}$ . Les relations  $f_k \Omega_k = g_{kj} \frac{f_k}{f_j} f_j \Omega_j$  montrent que les  $f_k \Omega_k$  définissent une 1-forme holomorphe à valeurs dans  $L \otimes \mathcal{O}(C)$ , et plus exactement une section de  $N_{\mathcal{F}}^* \otimes L \otimes \mathcal{O}(C)$  car les  $f_k \Omega_k$  engendrent  $\mathcal{F}$ . Cette section n'a aucun zéro, puisque chaque  $f_k \Omega_k$  est à singularités isolées, donc elle trivialise  $N_{\mathcal{F}}^* \otimes L \otimes \mathcal{O}(C)$ , d'où  $L = N_{\mathcal{F}} \otimes \mathcal{O}(-C)$ .

En différentiant la relation ci-dessus et grâce à  $d\Omega_k = \beta_k \wedge \Omega_k$ , qui est satisfaite sur les intersections, on obtient

$$\frac{dg_{kj}}{g_{kj}} = \beta_k - \beta_j + \gamma_{kj}$$

où  $\gamma_{kj} \in A^{1,0}(U_k \cap U_j)$  s'annulent sur  $\mathcal{F}$  et forment un cocycle. On peut trivialiser ce cocycle, car on est en train de travailler avec des formes  $C^\infty$  :  $\gamma_{kj} = \gamma_k - \gamma_j$ ,  $\gamma_k \in A^{1,0}(U_k)$ ,  $\gamma_k|_{\mathcal{F}} = 0$ . Ainsi

$$\frac{dg_{kj}}{g_{kj}} = (\beta_k + \gamma_k) - (\beta_j + \gamma_j)$$

et donc la 2-forme fermée  $\Theta \in A^2(X)$  localement définie par

$$\Theta = \frac{1}{2\pi i} d(\beta_k + \gamma_k)$$

représente  $c_1(N_{\mathcal{F}} \otimes \mathcal{O}(-C))$ . Remarquons qu'elle n'est pas (en général) de type (1,1).

Pour évaluer  $c_1(N_{\mathcal{F}} \otimes \mathcal{O}(-C)) \cdot [\Phi_{diff}]$  il faut intégrer  $\Theta$  sur la courbe entière  $f$ , ou mieux il faut intégrer  $\Theta$  sur la lamination  $K_{diff} = \text{Supp}(\Phi_{diff})$  par rapport à la mesure transverse invariante  $\mu_{diff}$ . Mais  $d\gamma_k|_{\mathcal{F}} \equiv 0$  et  $d\beta_k|_{\mathcal{F}} = 0$  hors de  $V_k$ , grâce à  $d\Omega_k = \beta_k \wedge \Omega_k$ , et l'intégrale est donc localisée au voisinage des points singuliers. L'expression  $\Phi_{diff}(d\beta_k)$  est sans ambiguïté et avec ces notations on peut résumer la discussion dans le lemme suivant.

LEMME 4. *On a*

$$c_1(N_{\mathcal{F}} \otimes \mathcal{O}(-C)) \cdot [\Phi_{diff}] = \frac{1}{2\pi i} \sum \Phi_{diff}(d\beta_k),$$

où la somme est sur tous les  $k$  tels que  $U_k$  est centré sur une singularité de  $\mathcal{F}$  dans  $K_{diff}$ .  $\square$

Tout cela marche sans restriction sur les singularités de  $\mathcal{F}$ , pourvu que  $C$  soit à croisements normaux. Mais notre feuilletage n'a que des singularités réduites, et en plus, d'après le lemme 4, seules celles dans  $K_{diff}$  nous intéressent. C'est le moment d'exploiter à fond le fait que la mesure transverse  $\mu_{diff}$  associée à  $\Phi_{diff}$  n'a pas d'atomes. On renvoie à [CS] et [MR] pour une description de la structure qualitative des singularités réduites.

Si  $p \in \text{Sing}(\mathcal{F})$  est un nœud-col, on voit sans peine que toute feuille (locale) de  $\mathcal{F}$  s'accumule sur la séparatrice forte, sauf la séparatrice faible (si elle existe). Pour voir cela, reprenons la forme normale de Dulac d'un nœud-col de multiplicité  $d$ , dans laquelle on supposera de plus que  $F \equiv 0$  (ce qui est toujours possible dans des coordonnées formelles, voir [MR]):

$$z(1 + \lambda w^{d-1})dw - w^d dz = 0.$$

Par intégration directe, on trouve que les feuilles sont les graphes des fonctions (multiformes si  $\lambda$  n'est pas un entier)

$$z = cw^\lambda e^{-\frac{1}{(d-1)w^{d-1}}}, \quad c \in \mathbf{C},$$

plus la séparatrice forte  $\{w = 0\}$ . Pour  $c = 0$  on obtient la séparatrice faible  $\{z = 0\}$ , et toute autre feuille contient  $\{w = 0\}$  dans son adhérence. On trouve aussi que l'holonomie de  $\{w = 0\}$  est du type

$$w \mapsto w + 2\pi i w^d + o(w^d).$$

Ces propriétés qualitatives de  $\mathcal{F}$  persistent quand  $F \not\equiv 0$  (sauf l'existence de la séparatrice faible), voir [MR] pour plus de détails. L'holonomie de la séparatrice forte est assez riche pour forcer toute mesure transverse invariante à se concentrer sur la même séparatrice, et donc à être atomique. Bref,  $K_{diff}$  ne contient pas de nœuds-cols.

Des considérations holonomiques du même genre excluent les singularités engendrées par un champ de vecteurs dont le quotient des valeurs propres n'est pas réel et montrent donc que toute singularité  $p$  de  $\mathcal{F}$  dans  $K_{diff}$  est d'un des deux types suivants :

- I) au voisinage de  $p$ ,  $\mathcal{F}$  est engendré (en coordonnées convenables) par  $(1 + \dots)zdw - (\lambda + \dots)w dz$ , avec  $\lambda \in \mathbf{R}^+ \setminus \mathbf{Q}^+$ ; le théorème de linéarisation de Poincaré permet même de linéariser cette 1-forme;
- II) comme dans I) mais avec  $\lambda \in \mathbf{R}^-$ ; si  $\lambda \in \mathbf{Q}^-$  la singularité est sans doute linéarisable, si  $\lambda \in \mathbf{R}^- \setminus \mathbf{Q}^-$  elle l'est formellement mais pas nécessairement analytiquement.

LEMME 5. Dans le cas I) on a

$$\Phi_{diff}\left(\frac{d\beta_k}{2\pi i}\right) \geq 0.$$

*Preuve.* Si  $C$  a un point double en  $p$  on a  $\Omega_k = \frac{dw}{w} - \lambda \frac{dz}{z}$  fermée et donc on peut prendre  $\beta_k \equiv 0$ . Si  $p \notin C$  on a  $\Omega_k = z dw - \lambda w dz$  et  $\beta_k = F_k \frac{(1+\lambda)}{|z|^2 + |\lambda w|^2} (\bar{z} dz + \lambda \bar{w} dw)$  (et si  $C$  a une seule branche à travers  $p$  on a la même expression mais avec 1 ou  $\lambda$  à la place de  $1 + \lambda$ ). On peut supposer que  $U_k$  est un petit bidisque  $\{|z| < \epsilon, |w| < \epsilon\}$  autour de  $p$ , avec  $S_k = \partial U_k$  (lissé aux coins) transverse à  $\mathcal{F}$ . Donc  $\mathcal{L} = \mathcal{F} \cap S_k$  est un feuilletage réel orienté de dimension 1 et sans singularités (l'orientation étant induite par celle des feuilles complexes de  $\mathcal{F}|_{U_k}$ ), et  $\mu_{diff}$  induit une mesure transverse  $\mathcal{L}$ -invariante qu'on notera par la même lettre. Par Stokes, calculer  $\Phi_{diff}\left(\frac{d\beta_k}{2\pi i}\right)$  revient à calculer l'intégrale de  $\frac{\beta_k}{2\pi i}$  le long de  $\mathcal{L}$  par rapport à  $\mu_{diff}$ . Mais

$$\frac{\beta_k}{2\pi i} \Big|_{\{|z|=\epsilon, |w|\leq\epsilon\} \cap \mathcal{F}} = \frac{(1+\lambda)}{2\pi i} \frac{dz}{z} \quad \text{et} \quad \frac{\beta_k}{2\pi i} \Big|_{\{|w|=\epsilon, |z|\leq\epsilon\} \cap \mathcal{F}} = \frac{(1+\lambda^{-1})}{2\pi i} \frac{dw}{w}$$

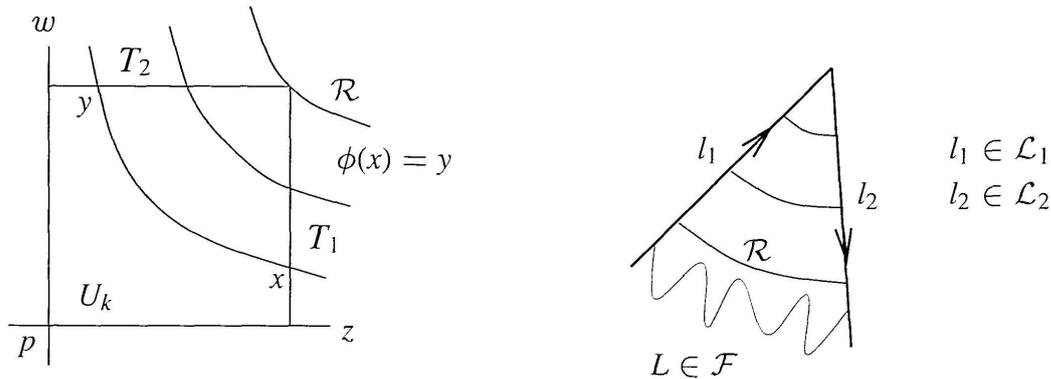
sont positives le long de  $\mathcal{L}$ , d'où la conclusion cherchée (avec stricte inégalité).  $\square$

LEMME 6. Dans le cas II) on a

$$\text{Re } \Phi_{diff}\left(\frac{d\beta_k}{2\pi i}\right) = 0.$$

*Preuve.* Comme dans le lemme précédent, il suffit considérer le cas  $p \notin C$ , les autres cas étant presque identiques. Donc  $\Omega_k = a dw - b dz$ , avec  $a = z(1 + \dots)$ ,  $b = \lambda w(1 + \dots)$ ,  $\lambda \in \mathbf{R}^-$ , et  $\beta_k = F_k \frac{a_z + b_w}{|a|^2 + |b|^2} (\bar{a} dz + \bar{b} dw)$ . Si  $(a_z + b_w)(0,0) = 0$  (i.e.  $\lambda = -1$ ) on peut en réalité choisir  $\beta_k$  holomorphe (dans tout  $U_k$ ), ce qui donne bien sûr  $\Phi_{diff}(d\beta_k) = 0$ : il suffit prendre  $\beta_k = A dz + B dw$ , où  $A$  et  $B$  sont des fonctions holomorphes satisfaisant  $a_z + b_w = Aa + Bb$ . On supposera donc  $\lambda \neq -1$ . Cette fois-ci le feuilletage n'est pas transverse à des petites sphères autour du point singulier, et c'est justement sur cela qu'on va s'appuyer. Soit  $\mathcal{R}$  le feuilletage réel 1-dim tangent à  $\mathcal{F}$  dans  $\bar{U}_k \setminus \{p\}$  engendré par le noyau de  $\eta|_{\mathcal{F}}$ , où  $\eta = \text{Im}\left[\frac{a_z + b_w}{|a|^2 + |b|^2} (\bar{a} dz + \bar{b} dw)\right]$ . On vérifie aisément que sur chaque séparatrice  $\{z = 0\}$  et  $\{w = 0\}$  ce feuilletage  $\mathcal{R}$  est de type radial, tandis que hors des séparatrices les feuilles de  $\mathcal{R}$  "glissent" à côté de  $p$ . Plus exactement, on peut choisir le bidisque  $U_k$  de manière telle que :

- a)  $\partial U_k$  est l'union de deux tores solides fermés  $T_1, T_2$  dont les intérieurs sont transverses à  $\mathcal{R}$  ;
- b)  $\partial T_1 = \partial T_2$  est formé des points de  $\partial U_k$  où  $\mathcal{R}$  est tangent extérieurement à  $U_k$  ;
- c) les feuilles de  $\mathcal{R}$  dans  $\bar{U}_k$  et hors des séparatrices établissent un difféomorphisme  $\phi$  entre  $T_1$  et  $T_2$  privés des intersections avec les séparatrices.



Sur  $T_1$  et  $T_2$ ,  $\mathcal{F}$  induit des feuilletages orientés  $\mathcal{L}_1$  et  $\mathcal{L}_2$  avec mesures transverses invariantes  $\mu_1$  et  $\mu_2$ . Le difféomorphisme  $\phi$  échange ces deux feuilletages, préservant les mesures transverses mais renversant les orientations. On a  $\phi^*(\eta|_{\mathcal{L}_2}) = \eta|_{\mathcal{L}_1}$ , car  $\eta|_{\mathcal{F}}$  est fermée et s'annule sur  $\mathcal{R}$ , et donc  $\phi^*(\text{Im } \beta_k|_{\mathcal{L}_2}) = \text{Im } \beta_k|_{\mathcal{L}_1}$ . Tout cela entraîne que l'intégrale de  $\text{Im } \beta_k$  le long de  $\mathcal{L}_1$  par rapport à  $\mu_1$  est opposée à celle le long de  $\mathcal{L}_2$  par rapport à  $\mu_2$  (le fait que  $\phi$  n'est pas défini entre les intersections avec les séparatrices n'a aucune importance, car ces séparatrices sont de mesure nulle). D'après Stokes on a alors  $\Phi_{diff}(\text{Im } d\beta_k) = 0$ .  $\square$

Il nous semble qu'on devrait pouvoir démontrer, dans ce dernier lemme, l'annulation de  $\Phi_{diff}(d\beta_k)$  et non seulement de sa partie imaginaire. Dans [Mc, II.1.4] on trouve des estimations en fonction du nombre de Lelong de  $\Phi_{diff}$  en  $p$  (qui est lié au nombre  $\nu(\Phi_{diff}, p)$  de la section précédente), et il est bien possible que ce nombre s'annule toujours dans le cas II), puisque dans ce cas les feuilles du feuilletage glissent à côté de  $p$  (tandis que dans le cas I) elles vont "tout droit" vers  $p$ ). On vérifie tout cela dans le cas linéarisable, par calcul direct, mais nous ne savons pas si les nombres en question sont des invariants formels (puisque nous ne savons pas ce qu'est la transformée d'une mesure par un difféomorphisme formel).

En tout cas, les lemmes 4, 5 et 6 suffisent pour démontrer que  $c_1(N_{\mathcal{F}} \otimes \mathcal{O}(-C)) \cdot [\Phi_{diff}] \geq 0$  et donc le théorème 2. On a même l'inégalité stricte dès que  $K_{diff}$  contient au moins une singularité de type I) qui ne soit pas un point double de  $C$ .

Remarquons que dans cette preuve on a utilisé seulement le fait que  $\Phi$  est un courant positif fermé  $\mathcal{F}$ -invariant et numériquement effectif; sa provenance d'une courbe entière est inessentielle. Remarquons aussi (voir [De2]) que l'effectivité numérique est automatique si  $\Phi_{alg} = 0$ .

Les théorèmes 1 et 2 et la relation  $K_X = T_{\mathcal{F}}^* \otimes N_{\mathcal{F}}^*$ , où  $K_X$  est le fibré canonique de  $X$ , impliquent:

COROLLAIRE 1.  $c_1(X) \cdot [\Phi] \geq 0$ .  $\square$

Si  $\Phi$  était une courbe algébrique lisse  $D$  on aurait la formule d'adjonction  $c_1(X) \cdot [D] = [D]^2 + \chi(D)$  et le corollaire serait conséquence de  $[D]^2 \geq 0$  (effectivité numérique) et  $\chi(D) \geq 0$  (inégalité tautologique). Naïvement, dans tout ce qui précède on a donc remplacé la formule d'adjonction par sa version feuilletée  $c_1(X) = c_1(N_{\mathcal{F}}) + c_1(T_{\mathcal{F}})$ ,  $[D]^2$  par  $c_1(N_{\mathcal{F}}) \cdot [\Phi]$ , et  $\chi(D)$  par  $c_1(T_{\mathcal{F}}) \cdot [\Phi]$ .

COROLLAIRE 2.  $X$  n'est pas de type général.  $\square$

En effet, le fibré canonique d'une surface de type général est presque ample (i.e., ample hors d'une collection finie de courbes rationnelles d'auto-intersection négative, qui sont négligeables car contractibles), et donc ([Mc]) on aurait  $c_1(X) \cdot [\Phi] < 0$ .

Ceci permet d'éviter, dans la preuve de McQuillan de la conjecture de Green-Griffiths, le recours au théorème de semi-positivité générique de Miyaoka [Mi]. Pour prouver cette conjecture McQuillan considère une courbe entière  $f_0: \mathbf{C} \rightarrow X_0$  à valeurs dans une surface de type général. Si  $c_1^2(X_0) > c_2(X_0)$ , il construit un revêtement ramifié  $X \rightarrow X_0$  sur lequel le relevé  $f: \mathbf{C} \rightarrow X$  est tangente à un feuilletage à singularités réduites. Puisque  $X$  est encore de type général, le corollaire 2 implique que  $f$ , et donc  $f_0$ , est dégénérée.

#### 4. FEUILLETAGES SUR LE PLAN PROJECTIF

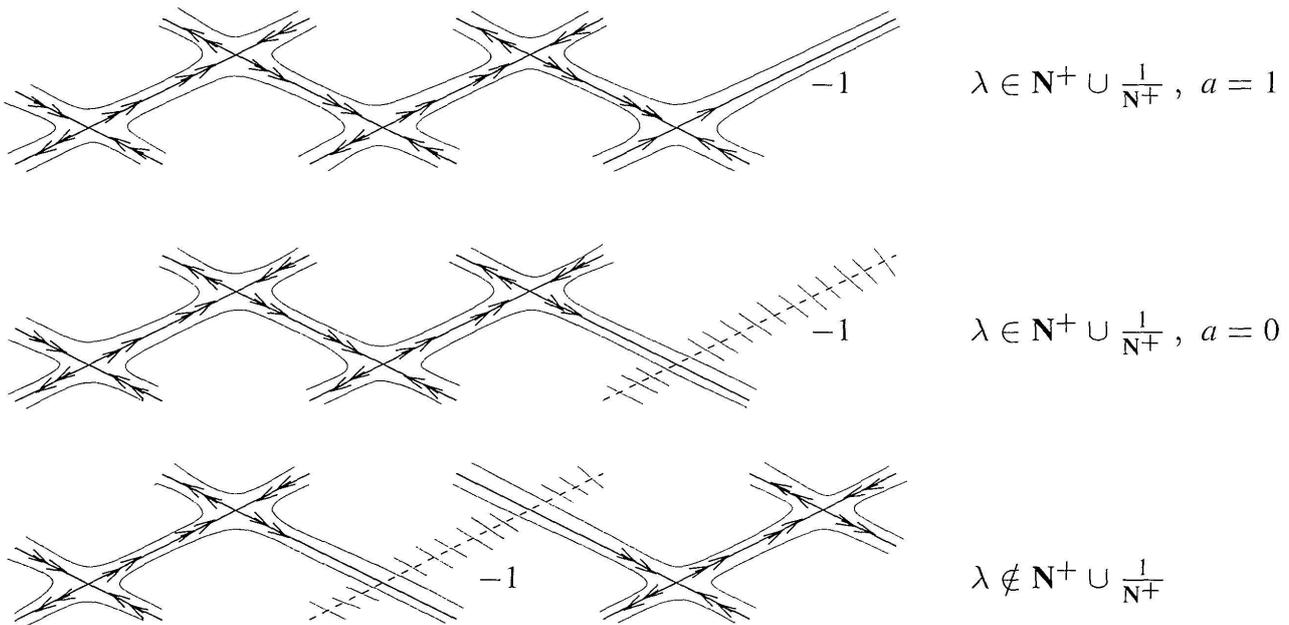
Dans cette dernière section nous allons démontrer le théorème énoncé dans l'introduction. Soit donc  $\mathcal{F}$  un feuilletage holomorphe de  $\mathbf{CP}^2$  dont toutes les singularités sont non nilpotentes. On a  $T_{\mathcal{F}} = \mathcal{O}(1-d)$  et  $N_{\mathcal{F}} = \mathcal{O}(2+d)$ , où (par définition)  $d$  est le degré de  $\mathcal{F}$ .

Certaines singularités peuvent ne pas être réduites, notamment celles engendrées par un champ de vecteurs dont la partie linéaire admet les valeurs propres 1 et  $\lambda \in \mathbf{Q}^+$ . Si  $\lambda \notin \mathbf{N}^+ \cup \frac{1}{\mathbf{N}^+}$  la singularité est linéarisable, si au contraire  $\lambda \in \mathbf{N}^+ \cup \frac{1}{\mathbf{N}^+}$  sa forme normale (Poincaré-Dulac, voir [CS]) est

$$(nz + aw^n)dw - wdz = 0$$

où  $a \in \{0, 1\}$  et  $n \in \{\lambda, \frac{1}{\lambda}\} \cap \mathbf{N}^+$ .

Soit donc  $X \xrightarrow{\pi} \mathbf{CP}^2$  la résolution (minimale) de ces singularités. Un calcul simple et explicite montre que chaque composante connexe du diviseur exceptionnel de  $\pi$  est une chaîne de courbes rationnelles qui contient une  $(-1)$ -courbe qui est soit invariante par le feuilletage relevé  $\mathcal{G}$  (cas non linéarisable) soit transverse à ce même feuilletage (cas linéarisable). Les autres courbes de la chaîne sont  $\mathcal{G}$ -invariantes.



Décomposons le diviseur exceptionnel de  $\pi$  comme  $F \cup D$ , où  $F = \bigcup_{j=1}^l F_j$  est l'union des  $(-1)$ -courbes qui ne sont pas  $\mathcal{G}$ -invariantes. On a alors [Br]

$$T_{\mathcal{G}} = \pi^*(T_{\mathcal{F}}) \otimes \mathcal{O}(F)$$

$$N_{\mathcal{G}} = \pi^*(N_{\mathcal{F}}) \otimes \mathcal{O}(-2F - D).$$

Soit  $\Psi \in A^{1,1}(X)'$  le courant positif fermé engendré par le relevé de  $f: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{CP}^2$  sur  $X$ . On suppose que  $f$  n'est pas dégénérée, et on normalise  $\Psi$  de manière telle que  $c_1(\pi^*(\mathcal{O}(1))) \cdot [\Psi] = 1$ . On obtient alors

$$c_1(T_G) \cdot [\Psi] = 1 - d + \sum_{j=1}^l [F_j] \cdot [\Psi]$$

$$c_1(N_G) \cdot [\Psi] \leq 2 + d - 2 \sum_{j=1}^l [F_j] \cdot [\Psi]$$

(car  $[\Psi] \cdot [D] \geq 0$ ), et les théorèmes 1 et 2 impliquent

$$\sum_{j=1}^l [F_j] \cdot [\Psi] \geq d - 1$$

$$2 \sum_{j=1}^l [F_j] \cdot [\Psi] \leq d + 2$$

et enfin

$$d \leq 4.$$

Ce qui prouve le théorème.

REMARQUE. Sans hypothèse sur les singularités de  $\mathcal{F}$  le théorème devient évidemment faux, on peut par contre espérer affaiblir l'hypothèse  $d \geq 5$  (par  $d \geq 2$  ?).

## RÉFÉRENCES

- [Br] BRUNELLA, M. Feuilletages holomorphes sur les surfaces complexes compactes. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* 30 (1997), 569–594.
- [CS] CAMACHO, C. et P. SAD. Pontos singulares de equações diferenciais analíticas. In: *16º Coloquio Brasileiro de Matemática*. IMPA, 1987.
- [De1] DEMAILLY, J.-P. Variétés hyperboliques et équations différentielles algébriques. *Gaz. Math.* 73 (1997), 3–23.
- [De2] ——— Courants positifs fermés et théorie de l'intersection. *Gaz. Math.* 53 (1992), 131–159.
- [GG] GREEN, M. and P. GRIFFITHS. Two applications of algebraic geometry to entire holomorphic mappings. In: *The Chern Symposium 1979*. Springer (1980), 41–74.
- [Jo] JOUANOLOU, J.-P. Hypersurfaces solutions d'une équation de Pfaff analytique. *Math. Ann.* 232 (1978), 239–245.
- [LN] LINS NETO, A. Simultaneous uniformization for the leaves of projective foliations by curves. *Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.)* 25 (1994), 181–206.
- [MR] MARTINET, J. et J.-P. RAMIS. Problèmes de modules pour des équations différentielles non-linéaires du premier ordre. *Publ. IHES* 55 (1982), 63–164.

- [Mc] MCQUILLAN, M. Diophantine approximations and foliations. *Publ. IHES* 87 (1998), 121–174.
- [Mi] MIYAOKA, Y. Deformations of a morphism along a foliation and applications. In: *Algebraic Geometry (Bowdoin, 1985)*. *Proc. Sympos. Pure Math.* 46, AMS (1987), 245–268.
- [Se] SEIDENBERG, A. Reduction of singularities of the differential equation  $Ady = Bdx$ . *Amer. J. Math.* 89 (1967), 248–269.
- [Su] SULLIVAN, D. Cycles for the dynamical study of foliated manifolds and complex manifolds. *Invent. Math.* 36 (1976), 225–255.

(Reçu le 25 juin 1998; version révisée reçue le 19 février 1999)

Marco Brunella

Laboratoire de Topologie, CNRS – UMR 5584  
Université de Bourgogne  
9, avenue Alain Savary  
F-21078 Dijon Cedex  
France