L'Enseignement Mathématique, t. 46 (2000), p. 325–338

ÉCHELLES DE SOBOLEV D'ORIGINE ARBITRAIRE

par Gérard BOURDAUD et Michał WOJCIECHOWSKI

RÉSUMÉ. A tout espace fonctionnel $E \subset \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ est associée classiquement l'*échelle de Sobolev* $W^m(E)$ $(m \in \mathbf{Z})$. La propriété $W^{m+k}(E) = W^m(W^k(E))$ $((m,k) \in \mathbf{Z}^2)$ est connue pour être vraie si $E = L^p(\mathbf{R})$ $(1 \leq p \leq \infty)$ ou si $E = L^p(\mathbf{R}^n)$ $(1 < p < \infty,\ n \geq 2)$. Nous montrons qu'elle est en défaut pour $E = L^1(\mathbf{R}^n)$ et $E = L^\infty(\mathbf{R}^n)$, en dimension $n \geq 2$. Plus précisément, nous établissons que E est un sous-espace propre de $W^1(W^{-1}(E))$, et $W^{-1}(W^1(E))$ un sous-espace propre de E.

ABSTRACT. *Sobolev scales with arbitrary origin.*
For every functional space $E \subset \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$, one considers classically the *Sobolev scale* $W^m(E)$ $(m \in \mathbf{Z})$. The property $W^{m+k}(E) = W^m(W^k(E))$ $((m,k) \in \mathbf{Z}^2)$ is known to be true for $E = L^p(\mathbf{R})$ $(1 \leq p \leq \infty)$ or $E = L^p(\mathbf{R}^n)$ $(1 < p < \infty,\ n \geq 2)$. We show that it is false for $E = L^1(\mathbf{R}^n)$ and $E = L^\infty(\mathbf{R}^n)$, with $n \geq 2$. More precisely, we prove that E is a proper subspace of $W^1(W^{-1}(E))$, and $W^{-1}(W^1(E))$ a proper subspace of E.

1. INTRODUCTION

A tout sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ (ou de $\mathcal{D}'(\mathbf{T}^n)$), on peut associer l'*échelle de Sobolev d'origine* E ; c'est la famille $\big(W^m(E)\big)_{m\in\mathbf{Z}}$ telle que :

$$W^m(E) = \{f \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n) \,:\, f^{(\alpha)} \in E \quad (|\alpha| \leq m)\}\,, \tag{1}$$

$$W^{-m}(E) = \Big\{f \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n) \,:\, \exists f_\alpha \in E\,,\quad f = \sum_{|\alpha|\leq m} f_\alpha^{(\alpha)}\Big\}\,, \tag{2}$$

pour tout $m \in \mathbf{N}$. Est-il vrai que n'importe lequel des $W^m(E)$ puisse être pris comme origine de l'échelle ? En d'autres termes, la propriété

$$\forall\,(m,k) \in \mathbf{Z}^2 \quad : \quad W^{m+k}(E) = W^m(W^k(E)) \tag{3}$$

est-elle satisfaite par l'espace E ? La réponse est positive pour $E = L^p(\mathbf{R}^n)$ $(1 < p < +\infty)$; il suffit d'observer que