

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 46 (2000)
Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ÉCHELLES DE SOBOLEV D'ORIGINE ARBITRAIRE
Autor: Bourdaud, Gérard / WOJCIECHOWSKI, Micha

Kurzfassung

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-64803>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 02.04.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

ÉCHELLES DE SOBOLEV D'ORIGINE ARBITRAIRE

par Gérard BOURDAUD et Michał WOJCIECHOWSKI

RÉSUMÉ. A tout espace fonctionnel $E \subset \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ est associée classiquement l'échelle de Sobolev $W^m(E)$ ($m \in \mathbf{Z}$). La propriété $W^{m+k}(E) = W^m(W^k(E))$ ($(m, k) \in \mathbf{Z}^2$) est connue pour être vraie si $E = L^p(\mathbf{R})$ ($1 \leq p \leq \infty$) ou si $E = L^p(\mathbf{R}^n)$ ($1 < p < \infty$, $n \geq 2$). Nous montrons qu'elle est en défaut pour $E = L^1(\mathbf{R}^n)$ et $E = L^\infty(\mathbf{R}^n)$, en dimension $n \geq 2$. Plus précisément, nous établissons que E est un sous-espace propre de $W^1(W^{-1}(E))$, et $W^{-1}(W^1(E))$ un sous-espace propre de E .

ABSTRACT. *Sobolev scales with arbitrary origin.*

For every functional space $E \subset \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$, one considers classically the Sobolev scale $W^m(E)$ ($m \in \mathbf{Z}$). The property $W^{m+k}(E) = W^m(W^k(E))$ ($(m, k) \in \mathbf{Z}^2$) is known to be true for $E = L^p(\mathbf{R})$ ($1 \leq p \leq \infty$) or $E = L^p(\mathbf{R}^n)$ ($1 < p < \infty$, $n \geq 2$). We show that it is false for $E = L^1(\mathbf{R}^n)$ and $E = L^\infty(\mathbf{R}^n)$, with $n \geq 2$. More precisely, we prove that E is a proper subspace of $W^1(W^{-1}(E))$, and $W^{-1}(W^1(E))$ a proper subspace of E .

1. INTRODUCTION

A tout sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ (ou de $\mathcal{D}'(\mathbf{T}^n)$), on peut associer l'échelle de Sobolev d'origine E ; c'est la famille $(W^m(E))_{m \in \mathbf{Z}}$ telle que:

- (1) $W^m(E) = \{f \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n) : f^{(\alpha)} \in E \quad (|\alpha| \leq m)\},$
- (2) $W^{-m}(E) = \{f \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n) : \exists f_\alpha \in E, \quad f = \sum_{|\alpha| \leq m} f_\alpha^{(\alpha)}\},$

pour tout $m \in \mathbf{N}$. Est-il vrai que n'importe lequel des $W^m(E)$ puisse être pris comme origine de l'échelle? En d'autres termes, la propriété

- (3) $\forall (m, k) \in \mathbf{Z}^2 \quad : \quad W^{m+k}(E) = W^m(W^k(E))$

est-elle satisfaite par l'espace E ? La réponse est positive pour $E = L^p(\mathbf{R}^n)$ ($1 < p < +\infty$); il suffit d'observer que