

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 46 (2000)  
**Heft:** 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** ÉCHELLES DE SOBOLEV D'ORIGINE ARBITRAIRE  
**Autor:** Bourdaud, Gérard / WOJCIECHOWSKI, Micha  
**Kapitel:** 2.1 DÉFINITION ET PREMIÈRES PROPRIÉTÉS  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-64803>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 02.04.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Avant d'y parvenir, il nous faudra faire quelques rappels sur les espaces de Banach de distributions, en particulier sur leur dualité, et traiter le cas très particulier de la dimension 1.

NOTATIONS. Choisissons une fois pour toutes les fonctions usuelles de *troncation* et de *régularisation*. Ce sont des fonctions positives  $\rho, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$  telles que

$$\rho(x) = 1 \quad (\text{pour } |x| \leq 1/2), \quad \rho(x) = 0 \quad (\text{pour } |x| \geq 1), \quad \int \varphi(x) dx = 1;$$

nous poserons

$$\rho_k(x) = \rho\left(\frac{x}{k}\right), \quad \varphi_k(x) = k^n \varphi(kx).$$

Les opérateurs de *translation* et de *dilatation* sont définis par :

$$\tau_t f(x) = f(x - t) \quad (t \in \mathbf{R}^n), \quad h_\lambda f(x) = f\left(\frac{x}{\lambda}\right) \quad (\lambda > 0).$$

On pose enfin  $\tilde{f}(x) = f(-x)$ .

## 2. LES ESPACES DE BANACH DE DISTRIBUTIONS

### 2.1 DÉFINITION ET PREMIÈRES PROPRIÉTÉS

Si  $E$  un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ , muni d'une norme complète rendant continue l'injection canonique  $E \hookrightarrow \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ , on dit que  $E$  est un *espace de Banach de distributions* (EBD). Notons d'ailleurs que toute injection canonique  $E \hookrightarrow F$  entre deux EBD est nécessairement continue; c'est une conséquence immédiate du théorème du graphe fermé. En particulier, un sous-espace donné de  $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$  possède *au plus une* structure d'EBD, à une équivalence de normes près.

PROPOSITION 1. *Si  $E$  est un EBD incluant  $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$  comme sous-espace dense, alors  $E'$  s'identifie à un EBD. Si  $E$  et  $F$  sont des EBD incluant  $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$  comme sous-espace dense, alors  $E' = F'$  si et seulement si  $E = F$ .*

*Preuve.* Si  $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$  est dense dans  $E$ , l'application de restriction  $u \mapsto u|_{\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)}$  est linéaire, injective et continue de  $E'$  dans  $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ , de sorte qu'on peut identifier  $E'$  avec le sous-espace suivant de  $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$  :

$$\{u \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n) : \exists C > 0, \forall g \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n), \quad |\langle u, g \rangle| \leq C \|g\|_E\}.$$

Si  $E' \subset F'$ , il existe  $C > 0$  tel que, pour tout  $u \in E'$ ,

$$\|u\|_{F'} \leq C \|u\|_{E'};$$

puisque

$$\|g\|_E = \sup \{ |\langle u, g \rangle| : u \in E', \|u\|_{E'} \leq 1 \},$$

il vient  $\|g\|_E \leq C \|g\|_F$  pour tout  $g \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ , ce qui, par densité, entraîne  $F \subset E$ .

## 2.2 ÉCHELLES DE RÉGULARITÉ

DÉFINITION 1. Une suite  $(E^m)_{m \in \mathbf{Z}}$  d'EBD est une *échelle de régularité* si, pour tous  $m \in \mathbf{Z}$  et  $j = 1, \dots, n$ :

$$(i) \quad E^{m+1} \subset E^m \quad \text{et} \quad (ii) \quad \partial_j(E^{m+1}) \subset E^m.$$

$E^0$  est appelé l'*origine* de l'échelle.

Si  $E$  est un EBD donné, il existe au moins une échelle de régularité d'origine  $E$ : c'est l'échelle de Sobolev définie par (1) et (2); on vérifie en effet ([3]) que  $W^m(E)$  et  $W^{-m}(E)$  sont des EBD pour les normes respectives:

$$\|f\|_{W^m(E)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|f^{(\alpha)}\|_E,$$

$$\|f\|_{W^{-m}(E)} = \inf \left\{ \sum_{|\alpha| \leq m} \|f_\alpha\|_E : f = \sum_{|\alpha| \leq m} f_\alpha^{(\alpha)} \right\}.$$

Dès que l'espace  $E$  est invariant sous l'effet des automorphismes linéaires de  $\mathbf{R}^n$ , l'espace  $W^m(E)$  ( $m \in \mathbf{Z}$ ) ne dépend pas du système de coordonnées par rapport auxquelles sont calculées les dérivées partielles.

PROPOSITION 2. On a  $W^{m+k}(E) = W^m(W^k(E))$ , quel que soit  $E$ , dès que les entiers  $m$  et  $k$  sont de même signe.

*Preuve.* Elle repose sur la remarque élémentaire suivante: si  $\alpha \in \mathbf{N}^n \setminus \{0\}$  et si l'entier  $m$  vérifie  $0 < m < |\alpha|$ , il existe  $\beta \in \mathbf{N}^n$  tel que  $\beta < \alpha$  et  $|\beta| = m$ . Les détails sont laissés au lecteur.

DÉFINITION 2. L'échelle de Sobolev d'origine  $E$  est dite *invariante* si elle vérifie la propriété (3), ce qui, d'après la proposition précédente, est équivalent à:

$$(5) \quad W^{m-k}(E) = W^m(W^{-k}(E)) = W^{-k}(W^m(E)) \quad (m > 0, k > 0).$$