**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
**Band:** 46 (2000)
**Heft:** 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** ÉCHELLES DE SOBOLEV D'ORIGINE ARBITRAIRE
**Autor:** Bourdaud, Gérard / WOJCIECHOWSKI, Micha
**Kapitel:** 2.1 DÉFINITION ET PREMIÈRES PROPRIÉTÉS
**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-64803

Avant d'y parvenir, il nous faudra faire quelques rappels sur les espaces de Banach de distributions, en particulier sur leur dualité, et traiter le cas très particulier de la dimension $1$.

NOTATIONS. Choisissons une fois pour toutes les fonctions usuelles de *troncation* et de *régularisation*. Ce sont des fonctions positives $\rho, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ telles que

$$\rho(x) = 1 \quad (\text{pour } |x| \leq 1/2)\,, \qquad \rho(x) = 0 \quad (\text{pour } |x| \geq 1)\,, \qquad \int \varphi(x)\,dx = 1\,;$$

nous poserons

$$\rho_k(x) = \rho\left(\frac{x}{k}\right), \qquad \varphi_k(x) = k^n \varphi(kx)\,.$$

Les opérateurs de *translation* et de *dilatation* sont définis par:

$$\tau_t f(x) = f(x-t) \quad (t \in \mathbf{R}^n)\,, \qquad h_\lambda f(x) = f\left(\frac{x}{\lambda}\right) \quad (\lambda > 0).$$

On pose enfin $\widetilde{f}(x) = f(-x)$.

## 2. LES ESPACES DE BANACH DE DISTRIBUTIONS

### 2.1 DÉFINITION ET PREMIÈRES PROPRIÉTÉS

Si $E$ un sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$, muni d'une norme complète rendant continue l'injection canonique $E \hookrightarrow \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$, on dit que $E$ est un *espace de Banach de distributions* (EBD). Notons d'ailleurs que toute injection canonique $E \hookrightarrow F$ entre deux EBD est nécessairement continue; c'est une conséquence immédiate du théorème du graphe fermé. En particulier, un sous-espace donné de $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ possède *au plus une* structure d'EBD, à une équivalence de normes près.

PROPOSITION 1. *Si $E$ est un EBD incluant $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ comme sous-espace dense, alors $E'$ s'identifie à un EBD. Si $E$ et $F$ sont des EBD incluant $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ comme sous-espace dense, alors $E' = F'$ si et seulement si $E = F$.*

*Preuve.* Si $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ est dense dans $E$, l'application de restriction $u \mapsto u|_{\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)}$ est linéaire, injective et continue de $E'$ dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$, de sorte qu'on peut identifier $E'$ avec le sous-espace suivant de $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ :

$$\left\{u \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n) \,:\, \exists\, C > 0\,, \forall g \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)\,, \quad |\langle u, g\rangle| \leq C\,\|g\|_E\right\}.$$

Si $E' \subset F'$, il existe $C > 0$ tel que, pour tout $u \in E'$,

$$\|u\|_{F'} \le C\,\|u\|_{E'} \,;$$

puisque

$$\|g\|_E = \sup\{|\langle u, g\rangle| \,:\, u \in E',\ \|u\|_{E'} \le 1\},$$

il vient $\|g\|_E \le C\,\|g\|_F$ pour tout $g \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$, ce qui, par densité, entraîne $F \subset E$.

## 2.2 Échelles de régularité

DÉFINITION 1. Une suite $(E^m)_{m\in\mathbf{Z}}$ d'EBD est une *échelle de régularité* si, pour tous $m \in \mathbf{Z}$ et $j = 1, \ldots, n$ :

$$\text{(i)}\quad E^{m+1} \subset E^m \quad \text{et} \quad \text{(ii)}\quad \partial_j\left(E^{m+1}\right) \subset E^m\,.$$

$E^0$ est appelé l'*origine* de l'échelle.

Si $E$ est un EBD donné, il existe au moins une échelle de régularité d'origine $E$ : c'est l'échelle de Sobolev définie par (1) et (2); on vérifie en effet ([3]) que $W^m(E)$ et $W^{-m}(E)$ sont des EBD pour les normes respectives :

$$\|f\|_{W^m(E)} = \sum_{|\alpha|\le m} \|f^{(\alpha)}\|_E\,,$$

$$\|f\|_{W^{-m}(E)} = \inf\left\{\sum_{|\alpha|\le m} \|f_\alpha\|_E \;:\; f = \sum_{|\alpha|\le m} f_\alpha^{(\alpha)}\right\}.$$

Dès que l'espace $E$ est invariant sous l'effet des automorphismes linéaires de $\mathbf{R}^n$, l'espace $W^m(E)$ ($m \in \mathbf{Z}$) ne dépend pas du système de coordonnées par rapport auxquelles sont calculées les dérivées partielles.

PROPOSITION 2. *On a $W^{m+k}(E) = W^m(W^k(E))$, quel que soit $E$, dès que les entiers $m$ et $k$ sont de même signe.*

*Preuve.* Elle repose sur la remarque élémentaire suivante : si $\alpha \in \mathbf{N}^n \setminus \{0\}$ et si l'entier $m$ vérifie $0 < m < |\alpha|$, il existe $\beta \in \mathbf{N}^n$ tel que $\beta < \alpha$ et $|\beta| = m$. Les détails sont laissés au lecteur.

DÉFINITION 2. L'échelle de Sobolev d'origine $E$ est dite *invariante* si elle vérifie la propriété (3), ce qui, d'après la proposition précédente, est équivalent à :

(5) $$W^{m-k}(E) = W^m(W^{-k}(E)) = W^{-k}(W^m(E)) \qquad (m > 0,\ k > 0)\,.$$