

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 46 (2000)  
**Heft:** 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** ÉCHELLES DE SOBOLEV D'ORIGINE ARBITRAIRE  
**Autor:** Bourdaud, Gérard / WOJCIECHOWSKI, Micha  
**Kapitel:** 3. RÉSULTATS POSITIFS EN DIMENSION UN  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-64803>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 02.04.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

en norme  $W^m(E)$ ; la densité de  $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$  dans  $W^m(E)$  en découle aussitôt.

Il reste à prouver l'inclusion  $W^m(E') \subset (W^{-m}(E))'$ , pour  $m > 0$ . Soit  $f$  une distribution à support compact appartenant à  $W^m(E')$  et  $g \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ ; en appliquant la proposition 4 à  $f * \varphi_k$  et  $g$ , on obtient :

$$|\langle f * \varphi_k, g \rangle| \leq \|f\|_{W^m(E')} \|g\|_{W^{-m}(E)};$$

puisque  $\tilde{\varphi}_k * g \rightarrow g$  dans  $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ , il vient

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\|_{W^m(E')} \|g\|_{W^{-m}(E)},$$

autrement dit  $f \in W^{-m}(E)'$ . Si  $f$  est un élément quelconque de  $W^m(E')$ , on approche  $f$  par les  $f\rho_k$  et on conclut comme ci-dessus.

REMARQUE. L'étude de la dualité des  $W^m(E)$  peut se conduire dans le cadre plus général de l'échelle de Sobolev associée à un  $C_0$ -groupe (voir le chapitre III de [1], notamment le théorème 3.3.28).

### 3. RÉSULTATS POSITIFS EN DIMENSION UN

THÉORÈME 3. Soit  $E$  un EBD dans  $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ , ayant les propriétés  $(P_0)$  et  $(P_1)$ ; soit  $m > 0$ . Alors

$$E = W^{-m}(W^m(E)), \quad E' = W^{-m}(W^m(E')).$$

Si de plus  $E$  satisfait  $(P_2)$ , alors les échelles de Sobolev d'origines  $E$  et  $E'$  sont invariantes.

Preuve. D'après le lemme 1, l'opérateur défini par

$$Tf = \int_0^\infty e^{-t\tau_t} f dt$$

est borné sur  $E$ . Puisque  $(Tf)' = f - Tf$  pour  $f \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ , la même propriété est vraie au sens des distributions quel que soit  $f \in E$ . On en déduit aussitôt que  $T^m$  est un opérateur borné de  $E$  dans  $W^m(E)$ . Si  $f \in E$  et  $g = T^m(f)$ , il vient

$$f = \sum_{j=0}^m C_m^j g^{(j)},$$

de sorte que  $f$  appartient à  $W^{-m}(W^m(E))$ . On peut aussi définir  $T$  sur  $E'$ , à l'aide de la formule

$$\langle Tf, g \rangle = \int_0^\infty e^{-t} \langle f, \tau_{-t}g \rangle dt;$$

cela nous donne  $E' = W^{-m}(W^m(E'))$ ; on applique alors le théorème 2 et la proposition 1 pour obtenir  $E = W^m(W^{-m}(E))$  et  $E' = W^m(W^{-m}(E'))$ . Il nous reste à vérifier la propriété (5). Pour  $m > k$ , on applique la première partie de la preuve à l'espace  $W^{m-k}(E)$ , ainsi que la proposition 1; il vient

$$W^{m-k}(E) = W^{-k}(W^k(W^{m-k}(E))) = W^{-k}(W^m(E));$$

par ailleurs :

$$W^{m-k}(E) = W^{m-k}(W^k(W^{-k}(E))) = W^m(W^{-k}(E)).$$

Le cas  $m < k$  se traite de manière analogue. Le même raisonnement s'applique à  $E'$ .

REMARQUE. Le théorème 3 se retrouve aussi dans le cadre des  $C_0$ -groupes ([1], théorème 3.3.23).

#### 4. RÉSULTATS NÉGATIFS EN DIMENSIONS SUPÉRIEURES

##### 4.1 LA PROPRIÉTÉ DE MITIAGIN-ORNSTEIN

DÉFINITION 3. Soit  $E$  un EBD dans  $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$ . On dit que  $E$  possède la propriété de Mitiagin-Ornstein si, pour toute distribution  $f$ , les conditions  $\partial_j^k f \in E$  ( $j = 1, 2$ ;  $k = 0, 1, 2$ ) impliquent  $\partial_1 \partial_2 f \in E$ .

PROPOSITION 5. Si  $E$  est un EBD dans  $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$ , alors  $W^1(E)$  possède la propriété de Mitiagin-Ornstein.

*Preuve.* Supposons  $\partial_j^k f \in W^1(E)$ , pour  $j = 1, 2$  et  $k = 0, 1, 2$ . On a en particulier  $\partial_2 f \in W^1(E)$ , d'où  $\partial_1 \partial_2 f \in E$ . La condition  $\partial_1^2 f \in W^1(E)$  implique

$$\partial_1(\partial_1 \partial_2 f) = \partial_2(\partial_1^2 f) \in E;$$

on obtient de même  $\partial_2(\partial_1 \partial_2 f) \in E$ . Ainsi  $\partial_1 \partial_2 f$  appartient à  $W^1(E)$ .