Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 46 (2000)
Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ÉCHELLES DE SOBOLEV D'ORIGINE ARBITRAIRE
Autor: Bourdaud, Gérard / WOJCIECHOWSKI, Micha
Kapitel: 3. RÉSULTATS POSITIFS EN DIMENSION UN
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-64803

en norme $W^m(E)$; la densité de $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ dans $W^m(E)$ en découle aussitôt.

Il reste à prouver l'inclusion $W^m(E') \subset (W^{-m}(E))'$, pour $m > 0$. Soit f une distribution à support compact appartenant à $W^m(E')$ et $g \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$; en appliquant la proposition 4 à $f * \varphi_k$ et g, on obtient:

$$|\langle f * \varphi_k, g\rangle| \leq \|f\|_{W^m(E')} \|g\|_{W^{-m}(E)} ;$$

puisque $\widetilde{\varphi}_k * g \to g$ dans $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$, il vient

$$|\langle f, g\rangle| \leq \|f\|_{W^m(E')} \|g\|_{W^{-m}(E)} ,$$

autrement dit $f \in W^{-m}(E)'$. Si f est un élément quelconque de $W^m(E')$, on approche f par les $f\rho_k$ et on conclut comme ci-dessus.

REMARQUE. L'étude de la dualité des $W^m(E)$ peut se conduire dans le cadre plus général de l'échelle de Sobolev associée à un C_0-groupe (voir le chapitre III de [1], notamment le théorème 3.3.28).

3. RÉSULTATS POSITIFS EN DIMENSION UN

THÉORÈME 3. *Soit E un EBD dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$, ayant les propriétés* (P_0) *et* (P_1)*; soit $m > 0$. Alors*

$$E = W^{-m}(W^m(E)) , \quad E' = W^{-m}(W^m(E')) .$$

Si de plus E satisfait (P_2)*, alors les échelles de Sobolev d'origines E et E' sont invariantes.*

Preuve. D'après le lemme 1, l'opérateur défini par

$$Tf = \int_0^\infty e^{-t} \tau_t f \, dt$$

est borné sur E. Puisque $(Tf)' = f - Tf$ pour $f \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$, la même propriété est vraie au sens des distributions quel que soit $f \in E$. On en déduit aussitôt que T^m est un opérateur borné de E dans $W^m(E)$. Si $f \in E$ et $g = T^m(f)$, il vient

$$f = \sum_{j=0}^{m} C_m^j g^{(j)} ,$$

de sorte que f appartient à $W^{-m}(W^m(E))$. On peut aussi définir T sur E', à l'aide de la formule

$$\langle Tf, g\rangle = \int_0^\infty e^{-t}\langle f, \tau_{-t}g\rangle\, dt\,;$$

cela nous donne $E' = W^{-m}(W^m(E'))$; on applique alors le théorème 2 et la proposition 1 pour obtenir $E = W^m(W^{-m}(E))$ et $E' = W^m(W^{-m}(E'))$. Il nous reste à vérifier la propriété (5). Pour $m > k$, on applique la première partie de la preuve à l'espace $W^{m-k}(E)$, ainsi que la proposition 1; il vient

$$W^{m-k}(E) = W^{-k}\left(W^k(W^{m-k}(E))\right) = W^{-k}(W^m(E))\,;$$

par ailleurs:

$$W^{m-k}(E) = W^{m-k}\left(W^k(W^{-k}(E))\right) = W^m(W^{-k}(E))\,.$$

Le cas $m < k$ se traite de manière analogue. Le même raisonnement s'applique à E'.

REMARQUE. Le théorème 3 se retrouve aussi dans le cadre des C_0-groupes ([1], théorème 3.3.23).

4. RÉSULTATS NÉGATIFS EN DIMENSIONS SUPÉRIEURES

4.1 LA PROPRIÉTÉ DE MITIAGIN-ORNSTEIN

DÉFINITION 3. Soit E un EBD dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$. On dit que E *possède la propriété de Mitiagin-Ornstein* si, pour toute distribution f, les conditions $\partial_j^k f \in E$ $(j = 1, 2\,;\ k = 0, 1, 2)$ impliquent $\partial_1\partial_2 f \in E$.

PROPOSITION 5. *Si E est un EBD dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$, alors $W^1(E)$ possède la propriété de Mitiagin-Ornstein.*

Preuve. Supposons $\partial_j^k f \in W^1(E)$, pour $j = 1, 2$ et $k = 0, 1, 2$. On a en particulier $\partial_2 f \in W^1(E)$, d'où $\partial_1\partial_2 f \in E$. La condition $\partial_1^2 f \in W^1(E)$ implique

$$\partial_1(\partial_1\partial_2 f) = \partial_2(\partial_1^2 f) \in E\,;$$

on obtient de même $\partial_2(\partial_1\partial_2 f) \in E$. Ainsi $\partial_1\partial_2 f$ appartient à $W^1(E)$.