

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 46 (2000)  
**Heft:** 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** ÉCHELLES DE SOBOLEV D'ORIGINE ARBITRAIRE  
**Autor:** Bourdaud, Gérard / WOJCIECHOWSKI, Micha  
**Kapitel:** 4. RÉSULTATS NÉGATIFS EN DIMENSIONS SUPÉRIEURES  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-64803>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 02.04.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

$$\langle Tf, g \rangle = \int_0^\infty e^{-t} \langle f, \tau_{-t}g \rangle dt;$$

cela nous donne  $E' = W^{-m}(W^m(E'))$ ; on applique alors le théorème 2 et la proposition 1 pour obtenir  $E = W^m(W^{-m}(E))$  et  $E' = W^m(W^{-m}(E'))$ . Il nous reste à vérifier la propriété (5). Pour  $m > k$ , on applique la première partie de la preuve à l'espace  $W^{m-k}(E)$ , ainsi que la proposition 1; il vient

$$W^{m-k}(E) = W^{-k}(W^k(W^{m-k}(E))) = W^{-k}(W^m(E));$$

par ailleurs :

$$W^{m-k}(E) = W^{m-k}(W^k(W^{-k}(E))) = W^m(W^{-k}(E)).$$

Le cas  $m < k$  se traite de manière analogue. Le même raisonnement s'applique à  $E'$ .

REMARQUE. Le théorème 3 se retrouve aussi dans le cadre des  $C_0$ -groupes ([1], théorème 3.3.23).

#### 4. RÉSULTATS NÉGATIFS EN DIMENSIONS SUPÉRIEURES

##### 4.1 LA PROPRIÉTÉ DE MITIAGIN-ORNSTEIN

DÉFINITION 3. Soit  $E$  un EBD dans  $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$ . On dit que  $E$  possède la propriété de Mitiagin-Ornstein si, pour toute distribution  $f$ , les conditions  $\partial_j^k f \in E$  ( $j = 1, 2$ ;  $k = 0, 1, 2$ ) impliquent  $\partial_1 \partial_2 f \in E$ .

PROPOSITION 5. Si  $E$  est un EBD dans  $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$ , alors  $W^1(E)$  possède la propriété de Mitiagin-Ornstein.

*Preuve.* Supposons  $\partial_j^k f \in W^1(E)$ , pour  $j = 1, 2$  et  $k = 0, 1, 2$ . On a en particulier  $\partial_2 f \in W^1(E)$ , d'où  $\partial_1 \partial_2 f \in E$ . La condition  $\partial_1^2 f \in W^1(E)$  implique

$$\partial_1(\partial_1 \partial_2 f) = \partial_2(\partial_1^2 f) \in E;$$

on obtient de même  $\partial_2(\partial_1 \partial_2 f) \in E$ . Ainsi  $\partial_1 \partial_2 f$  appartient à  $W^1(E)$ .

## 4.2 PREUVE DU THÉORÈME 1

Nous procéderons en trois étapes.

1. Les espaces  $L^1(\mathbf{R}^2)$  et  $L^\infty(\mathbf{R}^2)$  ne possèdent pas la propriété de Mitiagin-Ornstein (voir [5] et [6], ainsi que l'article de Boman [2]). D'après la proposition 5, cela suffit pour établir que  $L^1(\mathbf{R}^2)$  et  $L^\infty(\mathbf{R}^2)$  sont des sous-espaces propres de  $W^1(W^{-1}(L^1(\mathbf{R}^2)))$  et  $W^1(W^{-1}(L^\infty(\mathbf{R}^2)))$  respectivement.

2. Pour vérifier la propriété (i) en dimension  $n \geq 3$ , on considère

$$u \in W^1(W^{-1}(L^\infty(\mathbf{R}^2))) \setminus L^\infty(\mathbf{R}^2)$$

et  $v$  une fonction non nulle appartenant à  $\mathcal{D}(\mathbf{R}^{n-2})$ . On voit aisément que la fonction  $f = u \otimes v$  vérifie

$$f \in W^1(W^{-1}(L^\infty(\mathbf{R}^n))) \setminus L^\infty(\mathbf{R}^n).$$

La propriété (iii) se prouve de la même façon.

3. On applique enfin le théorème 2 et la proposition 1, pour en déduire (ii) et (iv).

## 4.3 CONTRE-EXEMPLES EXPLICITES

Nous allons voir qu'il est possible de produire des contre-exemples pour les non-inclusions (i) et (ii) sans invoquer le théorème de Mitiagin. Il est clair qu'il suffit de travailler en dimension 2.

Soit

$$u(x, y) = 2x - x \log(x^2 + y^2) - 2y \arctan\left(\frac{x}{y}\right).$$

On a  $u \in L_{loc}^\infty$  et

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = -\log(x^2 + y^2);$$

si on pose  $f(x, y) = -\rho(x, y) \log(x^2 + y^2)$ , il vient

$$f = \frac{\partial(u\rho)}{\partial x} - u \frac{\partial \rho}{\partial x},$$

de sorte que  $f$  appartient à  $W^{-1}(L^\infty(\mathbf{R}^2))$ . Soient

$$v(x, y) = -2 \arctan\left(\frac{y}{x}\right), \quad w(x, y) = -\frac{\partial \rho}{\partial x}(x, y) \log(x^2 + y^2).$$

Les fonctions  $v$  et  $w$  appartiennent à  $L^\infty$  et on a

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + w - v \frac{\partial \rho}{\partial y},$$

d'où  $\frac{\partial f}{\partial x} \in W^{-1}(L^\infty(\mathbf{R}^2))$ . Un calcul analogue montre que  $\frac{\partial f}{\partial y}$  appartient à  $W^{-1}(L^\infty(\mathbf{R}^2))$ . Finalement  $f$  appartient à  $W^1(W^{-1}(L^\infty(\mathbf{R}^2)))$  mais non à  $L^\infty(\mathbf{R}^2)$ .

Soit  $g$  une fonction intégrable positive telle que

$$\int_{\mathbf{R}^2} fg = +\infty,$$

par exemple  $g(x, y) = \frac{\rho(x, y)}{(x^2 + y^2) \log^2(x^2 + y^2)}$ . Si l'on avait  $g \in W^{-1}(W^1(L^1))$ ,

la proposition 4 et le théorème 2 nous donneraient

$$|\langle g, \varphi_k * f \rangle| \leq \|\varphi_k * f\|_{W^1(W^{-1}(L^\infty))} \|g\|_{W^{-1}(W^1(L^1))},$$

d'où

$$\int g(\varphi_k * f) \leq \|f\|_{W^1(W^{-1}(L^\infty))} \|g\|_{W^{-1}(W^1(L^1))};$$

puisque  $\varphi_k * f$  tend vers  $f$  presque partout, le lemme de Fatou nous conduirait à:

$$\int fg < +\infty,$$

ce qui contredit le choix de  $g$ .

#### 4.4 LES PLONGEMENTS DE SOBOLEV SOUS-JACENTS

La non-inclusion  $L^1(\mathbf{R}^2) \not\subset W^{-1}(W^1(L^1(\mathbf{R}^2)))$  peut s'interpréter de manière fort élémentaire en la factorisant à travers des plongements de Sobolev. On commence par observer que

$$(7) \quad W^1(L^1(\mathbf{R}^2)) \subset L^2(\mathbf{R}^2)$$

(ceci parce que  $\frac{1}{2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$ ; voir par exemple [7], chapitre 5, théorème 2). On dispose en fait d'un plongement de Sobolev un peu plus général que (7), à savoir:

$$BV(\mathbf{R}^2) \subset L^2(\mathbf{R}^2);$$

$BV(\mathbf{R}^2)$  est l'espace des fonctions dont les dérivées premières sont des mesures bornées sur  $\mathbf{R}^2$ . Dès lors l'inclusion

$$L^1(\mathbf{R}^2) \subset W^{-1}(W^1(L^1(\mathbf{R}^2)))$$

impliquerait *a fortiori*

$$L^1(\mathbf{R}^2) \subset W^{-1}(L^2(\mathbf{R}^2)),$$

ou encore, en passant aux duaux :

$$W^1(L^2(\mathbf{R}^2)) \subset L^\infty(\mathbf{R}^2);$$

or  $W^1(L^2(\mathbf{R}^2))$  est l'espace de Sobolev critique, qui s'injecte dans  $BMO(\mathbf{R}^2)$  et non dans  $L^\infty(\mathbf{R}^2)$ .

## 5. POUR ALLER PLUS LOIN

Depuis les travaux de Stein et Weiss, l'espace de Hardy  $H^1(\mathbf{R}^n)$  et son dual  $BMO(\mathbf{R}^n)$  sont considérés comme des substituts naturels de  $L^1(\mathbf{R}^n)$  et  $L^\infty(\mathbf{R}^n)$ .  $BMO(\mathbf{R}^n)$  n'est pas, à proprement parler, un EBD puisque, pour sa norme naturelle, c'est un espace de Banach de fonctions modulo les constantes. Aussi allons-nous considérer les *versions locales* de ces espaces fonctionnels, introduites par D. Goldberg [4] sous les notations  $h^1(\mathbf{R}^n)$  et  $bmo(\mathbf{R}^n)$  et rattachés depuis à la grande famille des espaces de Lizorkin-Triebel; on a en effet  $h^1(\mathbf{R}^n) = F_{12}^0(\mathbf{R}^n)$  et  $bmo(\mathbf{R}^n) = F_{\infty 2}^0(\mathbf{R}^n)$  (voir [8]). Puisque les opérateurs pseudo-différentiels d'ordre zéro sont bornés sur les  $F_{pq}^s$ , on obtient  $W^m(E) = (I - \Delta)^{-m/2}(E)$  pour  $E = h^1(\mathbf{R}^n)$  et  $E = bmo(\mathbf{R}^n)$ , de sorte que les échelles de Sobolev ayant ces deux espaces pour origine sont invariantes. Cela va nous conduire à une version précisée du théorème 1 :

THÉORÈME 4. *Pour  $n > 1$ , on a :*

$$L^\infty(\mathbf{R}^n) \subset W^1(W^{-1}(L^\infty(\mathbf{R}^n))) \subset bmo(\mathbf{R}^n),$$

$$h^1(\mathbf{R}^n) \subset W^{-1}(W^1(L^1(\mathbf{R}^n))) \subset L^1(\mathbf{R}^n),$$

*et ces quatre inclusions sont strictes.*

*Preuve.* Compte tenu des théorèmes 1 et 2, il suffira d'établir que  $h^1(\mathbf{R}^n)$  est un sous-espace propre de  $W^{-1}(W^1(L^1(\mathbf{R}^n)))$ . Quelques rappels sur  $h^1$  seront