

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 46 (2000)  
**Heft:** 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** ÉCHELLES DE SOBOLEV D'ORIGINE ARBITRAIRE  
**Autor:** Bourdaud, Gérard / WOJCIECHOWSKI, Micha  
**Kapitel:** 5. Pour aller plus loin  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-64803>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 02.04.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

impliquerait *a fortiori*

$$L^1(\mathbf{R}^2) \subset W^{-1}(L^2(\mathbf{R}^2)),$$

ou encore, en passant aux duaux :

$$W^1(L^2(\mathbf{R}^2)) \subset L^\infty(\mathbf{R}^2);$$

or  $W^1(L^2(\mathbf{R}^2))$  est l'espace de Sobolev critique, qui s'injecte dans  $BMO(\mathbf{R}^2)$  et non dans  $L^\infty(\mathbf{R}^2)$ .

## 5. POUR ALLER PLUS LOIN

Depuis les travaux de Stein et Weiss, l'espace de Hardy  $H^1(\mathbf{R}^n)$  et son dual  $BMO(\mathbf{R}^n)$  sont considérés comme des substituts naturels de  $L^1(\mathbf{R}^n)$  et  $L^\infty(\mathbf{R}^n)$ .  $BMO(\mathbf{R}^n)$  n'est pas, à proprement parler, un EBD puisque, pour sa norme naturelle, c'est un espace de Banach de fonctions modulo les constantes. Aussi allons-nous considérer les *versions locales* de ces espaces fonctionnels, introduites par D. Goldberg [4] sous les notations  $h^1(\mathbf{R}^n)$  et  $bmo(\mathbf{R}^n)$  et rattachés depuis à la grande famille des espaces de Lizorkin-Triebel; on a en effet  $h^1(\mathbf{R}^n) = F_{12}^0(\mathbf{R}^n)$  et  $bmo(\mathbf{R}^n) = F_{\infty 2}^0(\mathbf{R}^n)$  (voir [8]). Puisque les opérateurs pseudo-différentiels d'ordre zéro sont bornés sur les  $F_{pq}^s$ , on obtient  $W^m(E) = (I - \Delta)^{-m/2}(E)$  pour  $E = h^1(\mathbf{R}^n)$  et  $E = bmo(\mathbf{R}^n)$ , de sorte que les échelles de Sobolev ayant ces deux espaces pour origine sont invariantes. Cela va nous conduire à une version précisée du théorème 1 :

THÉORÈME 4. *Pour  $n > 1$ , on a :*

$$L^\infty(\mathbf{R}^n) \subset W^1(W^{-1}(L^\infty(\mathbf{R}^n))) \subset bmo(\mathbf{R}^n),$$

$$h^1(\mathbf{R}^n) \subset W^{-1}(W^1(L^1(\mathbf{R}^n))) \subset L^1(\mathbf{R}^n),$$

*et ces quatre inclusions sont strictes.*

*Preuve.* Compte tenu des théorèmes 1 et 2, il suffira d'établir que  $h^1(\mathbf{R}^n)$  est un sous-espace propre de  $W^{-1}(W^1(L^1(\mathbf{R}^n)))$ . Quelques rappels sur  $h^1$  seront

d'abord utiles. Soit  $\psi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^*)$  une fonction telle que

$$\forall \xi \neq 0 \quad : \quad \sum_{j \in \mathbf{Z}} \psi(2^j \xi) = 1 ;$$

on dispose de l'équivalence de normes

$$\|u\|_{h^1(\mathbf{R})} \approx \|u\|_1 + \left\| \left( \sum_{j \geq 1} |\psi(2^{-j}D)(u)|^2 \right)^{1/2} \right\|_1$$

(voir par exemple [8]). Posons

$$\Psi(\xi, \eta) = \rho(\xi)\psi(\eta) \quad (\xi \in \mathbf{R}^{n-1}, \eta \in \mathbf{R}) ;$$

alors  $\Psi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n \setminus \{0\})$  de sorte que, pour une certaine constante  $C > 0$ , on a

$$(8) \quad \left\| \left( \sum_{j \geq 1} |\Psi(2^{-j}D)(f)|^2 \right)^{1/2} \right\|_1 \leq C \|f\|_{h^1(\mathbf{R}^n)} .$$

Soit  $\theta \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^{n-1})$  la fonction dont la transformée de Fourier est  $\rho$ ; soit  $u$  une fonction intégrable sur  $\mathbf{R}$ , n'appartenant pas à  $h^1(\mathbf{R})$ ; soit enfin

$$f(x, y) = \theta(x)u(y) \quad (x \in \mathbf{R}^{n-1}, y \in \mathbf{R}) .$$

D'après le théorème 3, il existe  $v \in W^1(L^1(\mathbf{R}))$  tel que  $u = v + v'$ ; cela nous donne

$$f = \theta \otimes v + \partial_n(\theta \otimes v) ,$$

avec  $\theta \otimes v \in W^1(L^1(\mathbf{R}^n))$ , d'où  $f \in W^{-1}(W^1(L^1(\mathbf{R}^n)))$ . Puisque  $\rho(2^{-j}\xi)\rho(\xi) = \rho(\xi)$  pour  $j \geq 1$ , il vient

$$\Psi(2^{-j}D)(f) = \theta \otimes \psi(2^{-j}D)(u) .$$

Si la fonction  $f$  appartenait à  $h^1(\mathbf{R}^n)$ , l'estimation (8) nous donnerait

$$\|\theta\|_1 \left\| \left( \sum_{j \geq 1} |\psi(2^{-j}D)(u)|^2 \right)^{1/2} \right\|_1 < +\infty ,$$

d'où  $u \in h^1(\mathbf{R})$ , ce qui contredit l'hypothèse.