

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 46 (2000)
Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: REMARKS ON THE HAUSDORFF-YOUNG INEQUALITY
Autor: Chatterji, Srishti D.

Bibliographie
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-64804>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 02.04.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

(i) If $1 \leq p < q \leq 2$ then

exact type of $L^p(\mu) = p <$ exact type of $L^q(\nu) = q$,

which excludes any isomorphism between $L^p(\mu)$, $L^q(\nu)$.

(ii) If $1 \leq p < 2$, $2 \leq q < \infty$ then

exact type of $L^p(\mu) = p <$ exact type of $L^q(\nu) = 2$,

which excludes any isomorphism between $L^p(\mu)$, $L^q(\nu)$.

(iii) If $2 \leq p < q < \infty$ then $1 < q' < p' \leq 2$; if $L^p(\mu)$, $L^q(\nu)$ were isomorphic then their duals $L^{p'}(\mu)$, $L^{q'}(\nu)$ would be isomorphic, which is impossible in view of (i).

(iv) If $1 < p < \infty$, $q = \infty$ then $L^p(\mu)$ has exact type equal to $\min(p, 2) > 1$ whereas $L^\infty(\nu)$ has exact type 1; thus $L^p(\mu)$ is not isomorphic to $L^\infty(\nu)$ (a fact which is obvious on the grounds of reflexivity as well).

(v) Finally, let $p = 1$, $q = \infty$; then $L^1(\mu)$ is not isomorphic to $L^\infty(\nu)$ since the exact cotype of $L^1(\mu)$ is 2 and the exact cotype of $L^\infty(\nu)$ is ∞ .

This completes the proof of the L^p -isomorphism theorem.

A proof that no infinite dimensional $L^1(\mu)$ can be isomorphic to any $C_0(Y)$ or $C(Y)$ (Y any locally compact Hausdorff space) can be based on the same ideas as (v) above. The exact cotype of $L^1(\mu)$ is 2 whereas the exact cotype of any infinite dimensional $C_0(Y)$ or $C(Y)$ is ∞ (exactly as in the case of $L^\infty(\mu)$). This excludes the possibility of any isomorphism between $L^1(\mu)$ and $C_0(Y)$ or $C(Y)$.

REMARK. The L^p -isomorphism theorem seems to be known to various specialists; however, I know of no explicit formulation or proof of it in complete generality except for that in [C].

REFERENCES

- [C] CHATTERJI, S. D. Measure theory and probability theory. *Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, Supplemento Vol. XLVI* (1998), 151–169.
- [DS] DUNFORD, N. and J. T. SCHWARTZ. *Linear Operators*, vol. 1. Interscience Publishers, New York, 1958.
- [DJT] DIESTEL, J., JARCHOW, H. and A. TONGE. *Absolutely Summing Operators*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

- [H] HAUSDORFF, F. Eine Ausdehnung des Parsevalschen Satzes über Fourierreihen. *Math. Z.* 16 (1923), 162–169.
- [HR] HEWITT, E. and K. A. ROSS. *Abstract Harmonic Analysis*. vols. 1, 2. Springer-Verlag, Berlin, 1963, 1970.
- [L] LIEB, E. H. Gaussian kernels have only Gaussian minimizers. *Invent. Math.* 102 (1990), 179–208.
- [RF] RIESZ, F. Über eine Verallgemeinerung der Parsevalschen Formel. *Math. Z.* 18 (1923), 117–124. *Œuvres complètes*, vol. 1. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1960, 504–511.
- [RM] RIESZ, M. Sur les maxima des formes bilinéaires et sur les fonctionnelles linéaires. *Acta Math.* 49 (1927), 465–497. *Collected Papers*. Springer-Verlag, Berlin, 1988, 377–409.
- [W] WEIL, A. *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications*. Hermann, Paris, 1965 (1re éd. 1940).

(Reçu le 14 avril 2000)

S. D. Chatterji

École Polytechnique Fédérale de Lausanne

Département de Mathématiques

CH-1015 Lausanne

Switzerland

e-mail: chatterji <Srishti.Chatterji@epfl.ch>