

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 46 (2000)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** PREMIER NOMBRE DE BETTI ET SPECTRE DU LAPLACIEN DE CERTAINES VARIÉTÉS HYPERBOLIQUES  
**Autor:** Bergeron, Nicolas  
**Kapitel:** 2. Sur la topologie des cycles géodésiques  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-64797>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 02.04.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Appliqué à  $H = \{e\}$ , le lemme principal redonne le fait (dû à Mal'cev [Ma]) que tout sous-groupe de  $GL_N(\mathbf{R})$  de type fini est résiduellement fini.

## 2. SUR LA TOPOLOGIE DES CYCLES GÉODÉSQUES

Nous allons appliquer le lemme principal aux cycles géodésiques dans des variétés hyperboliques.

**DÉFINITIONS.** *Variétés hyperboliques* (cf. [Th], [CEG] ou [Rat]). Soit  $\mathbf{H}^n$  l'espace hyperbolique, i.e. l'unique variété riemannienne de dimension  $n$  simplement connexe, complète et de courbure constante égale à  $-1$ . Une *variété hyperbolique* (de dimension  $n$ )  $M$  est une variété riemannienne complète de courbure constante égale à  $-1$ . Une telle variété est isométrique au quotient  $\mathbf{H}^n/\Gamma$  de l'espace hyperbolique par un *groupe kleinien*, i.e. un sous-groupe discret sans torsion de  $\text{Isom}(\mathbf{H}^n)$ . Par commodité, toutes les variétés hyperboliques que nous considérerons seront supposées *orientées*. Alors,  $M = \mathbf{H}^n/\Gamma$  où  $\Gamma$  est un groupe kleinien contenu dans  $\text{Isom}^+(\mathbf{H}^n)$ , le sous-groupe des isométries préservant l'orientation de  $\mathbf{H}^n$ . Rappelons que le groupe  $\text{Isom}^+(\mathbf{H}^n)$  s'identifie via le modèle de l'hyperboloïde au sous-groupe  $\text{PSO}(n, 1)$  de  $\text{O}(n, 1)$  (d'indice 4) constitué des matrices de déterminant 1 préservant la nappe supérieure de l'hyperboloïde. Étant donné un groupe kleinien, on notera  $L(\Gamma)$  l'ensemble limite de  $\Gamma$ , i.e. la fermeture, dans la sphère à l'infini  $S_\infty^{n-1}$ , de l'ensemble des points d'accumulation d'une orbite quelconque de  $\Gamma$  dans  $\mathbf{H}^n$ .

**THÉORÈME 1.** *Tout cycle géodésique dans une variété hyperbolique dont le groupe fondamental est de type fini se relève à un revêtement fini en un cycle dont l'image est une sous-variété plongée totalement géodésique.*

**REMARQUE.** Le théorème 1 était déjà connu en dimension deux [Sc] et en dimension trois [Lo].

*Démonstration.* Soit  $M = \mathbf{H}^n/\Gamma$  une variété hyperbolique avec  $\Gamma$  un groupe kleinien de type fini. Soit  $i_0: F_0 \rightarrow M$  un cycle géodésique de dimension  $l$ . Soit  $\tilde{i}_0: \tilde{F}_0 \rightarrow \mathbf{H}^n$  un relevé de  $i_0$  au revêtement universel  $\tilde{F}_0$  de  $F_0$  (que l'on suppose connexe). Puisque  $i_0$  est une immersion localement totalement géodésique, il en est de même pour  $\tilde{i}_0$ . L'application  $i_0$  est propre donc  $\tilde{i}_0(\tilde{F}_0)$  est complet dans  $\mathbf{H}^n$ . Donc  $\tilde{i}_0(\tilde{F}_0)$  coïncide avec un sous-espace

totallement géodésique de dimension  $l$  dans  $\mathbf{H}^n$ . L'application  $\tilde{i}_0$  est alors un revêtement d'image simplement connexe donc un homéomorphisme sur son image. Et, quitte à conjuguer, on peut identifier le revêtement universel de  $F_0$  avec le sous-espace  $\mathbf{H}^l$  de  $\mathbf{H}^n$ . De plus,  $i_0$  est injective au niveau des groupes fondamentaux; on note  $\Lambda_0 = i_{0*}(\pi_1 F_0)$ . On a alors

$$\Lambda_0 \subset \Gamma \cap \text{Stab}(\mathbf{H}^l),$$

où  $\text{Stab}(\mathbf{H}^l)$ , le stabilisateur de  $\mathbf{H}^l$  dans  $\text{Isom}^+(\mathbf{H}^n)$ , est égal à un sous-groupe d'indice fini du produit du groupe  $O(l, 1)$  par un groupe de rotations compact que l'on note  $C$ . Soit  $\Lambda = \Gamma \cap \text{Stab}(\mathbf{H}^l)$ . Montrons que la variété  $F = \mathbf{H}^l/\Lambda$  (qui est finiment revêtue par  $F_0$ ) se plonge dans un revêtement fini de la variété  $M = \mathbf{H}^n/\Gamma$ . Soit  $i$  l'immersion canonique de  $F$  dans  $M$ . Soit  $D$  un domaine fondamental (compact) pour l'action de  $\Lambda$  sur  $\mathbf{H}^l$ . L'action de  $\Gamma$  sur  $\mathbf{H}^n$  est propre. Donc l'ensemble

$$E = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma D \cap D \neq \emptyset\}$$

est fini. En particulier  $E - \Lambda$  est un sous-ensemble fini de  $\Gamma$ . Mais, d'après le lemme principal (appliqué à  $H = O(l, 1) \times C$  et  $\Gamma = \Gamma$ ),

$$\Lambda^* = \Lambda,$$

pour la topologie des sous-groupes d'indice fini de  $\Gamma$ . Donc, il existe un sous-groupe  $\widehat{\Gamma}$  d'indice fini dans  $\Gamma$  qui contient  $\Lambda$  et tel que  $E \cap \widehat{\Gamma} = E \cap \Lambda$ . Alors,  $\widehat{M} = \mathbf{H}^n/\widehat{\Gamma}$  est un revêtement fini de  $M$  et contient  $F$  comme sous-variété plongée totallement géodésique. Or le plongement canonique  $\widehat{i}$  de  $F$  dans  $\widehat{M}$  relève  $i$ . Donc le cycle donné par  $i_0$  se relève à  $\widehat{M}$  en un cycle dont l'image égale à  $\widehat{i}(F)$  est plongée.  $\square$

REMARQUE. En remplaçant  $\text{Stab}(\mathbf{H}^l)$  par  $\text{Isom}^+(\mathbf{H}^l) \times C$  dans la démonstration du théorème 1, on peut montrer que sous les hypothèses du théorème 1 on peut relever le cycle en un cycle dont l'image est une sous-variété orientée.

THÉORÈME 2. *Tout cycle géodésique de codimension 1 dans une variété hyperbolique de volume fini admet deux relevés disjoints à un revêtement fini dont les images sont des sous-variétés plongées totallement géodésiques dont l'union est non séparante.*

Démonstration. Soit  $M$  une variété hyperbolique de volume fini de dimension  $n$  qui contient un cycle géodésique de dimension  $n - 1$ . Le

groupe fondamental de  $M$  est de type fini. D'après le théorème 1, on peut donc supposer que  $M$  contient une sous-variété orientée plongée totalement géodésique  $F = \mathbf{H}^{n-1}/\Lambda$  (i.e. que le cycle est d'image plongée dans  $M$ ).

Montrons que quitte à passer à un revêtement fini de  $M$ , on peut supposer que  $F$  est non séparante (i.e. que le cycle se relève en un cycle non homologue à zéro). Supposons que  $F$  sépare  $M$  en  $M_+$  et  $M_-$ . Le théorème de Van Kampen implique que le groupe fondamental  $\Gamma$  de  $M$  se décompose en un produit amalgamé

$$\Gamma = A *_\Lambda B,$$

où  $A$  (resp.  $B$ ) est le groupe fondamental de  $M_+$  (resp.  $M_-$ ). Soient  $a \in A$  et  $b \in B$  deux éléments de  $\Gamma$  dont aucune puissance n'appartienne à  $\Lambda$ . Comme dans la démonstration du théorème 1, le lemme principal implique que le sous-groupe  $\Lambda$  est fermé pour la topologie des sous-groupes d'indice fini de  $\Gamma$ . Soit  $K$  un sous-groupe de  $\Gamma$  d'indice fini tel que  $K$  contienne  $\Lambda$  mais ne contienne ni  $a$  ni  $b$ . Soit  $\widehat{\Gamma}$  l'intersection de tous les conjugués de  $K$  dans  $\Gamma$ . Alors,  $\widehat{M} = \mathbf{H}^n/\widehat{\Gamma}$  est un revêtement fini de  $M$  auquel la variété  $F$  se relève en une sous-variété non séparante.

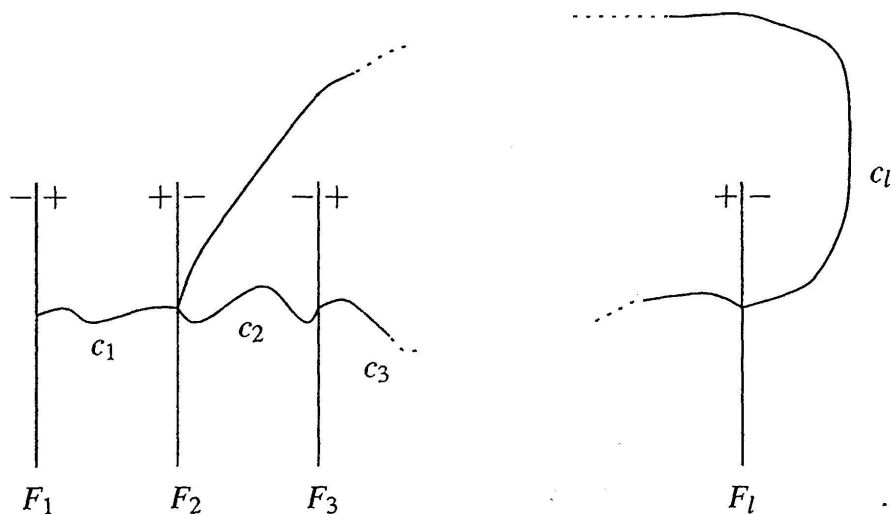


FIGURE 1

$F_l$  est non séparante

En effet, soient  $\alpha$ ,  $\beta$  deux lacets dans  $M$  représentant respectivement  $a$  et  $b$  et basés en un point  $x_0 \in F$ . On construit par récurrence une famille finie de relevés de  $\alpha$  et  $\beta$ :  $\{c_1 = \tilde{\alpha}_1, c_2 = \tilde{\beta}_2, \dots, c_l = \tilde{\alpha}_l\}$  (ou  $\{c_1 = \tilde{\alpha}_1, c_2 = \tilde{\beta}_2, \dots, c_l = \tilde{\beta}_l\}$ ) et  $l$  relevés disjoints de  $F$ :  $F_1, \dots, F_l$  ( $l \in \mathbf{N}$ ) de manière à ce que  $c_i$  joigne  $F_i$  à  $F_{i+1}$  pour  $i < l$  et  $c_l$  joigne  $F_l$  à  $F_{i_0}$  pour un certain  $1 \leq i_0 \leq l$  (le revêtement est fini). Puisque ni  $\alpha$  ni  $\beta$

ne se relève,  $i_0 < l$  et le lacet  $c_{i_0} \cdot c_{i_0+1} \dots c_l$  a un degré d'intersection congru à 1 modulo 2 avec  $F_l$ . Dans la suite on suppose que  $F$  est non séparante dans  $M$ .

Concluons la démonstration du théorème 2. On a un morphisme canonique  $p$  de  $\Gamma$  sur  $\mathbf{Z}$  dont le noyau contient  $\Lambda$ , le groupe fondamental de  $F$  :  $0 \rightarrow (\Lambda \subset) \ker(p) \rightarrow \Gamma \rightarrow \mathbf{Z} \rightarrow 0$ . Le noyau  $\ker(p)$  de  $p$  est distingué dans  $\Gamma$ , donc son ensemble limite  $L(\ker(p))$  coïncide avec celui de  $\Gamma$  :  $\mathbf{S}_\infty^{n-1} = L(\Gamma)$ . Mais puisque  $\Lambda \subset \text{Stab}(\mathbf{H}^{n-1})$ , l'ensemble limite  $L(\Lambda)$  de  $\Lambda$  est inclus dans  $\mathbf{S}_\infty^{n-2}$ , donc  $\ker(p)$  contient un élément  $a$  de  $\Gamma$  dont aucune puissance n'appartient à  $\Lambda$ . Soit  $b \in \Gamma$  tel que  $p(b) = 1$ ; dans la suite on suppose que  $b$  peut être représenté par un lacet rencontrant  $F$  en un unique point. On applique le lemme principal pour obtenir l'existence d'un sous-groupe  $\tilde{\Gamma}$  de  $\Gamma$  d'indice fini ne contenant pas  $a$ . La variété  $\tilde{M} = \mathbf{H}^n / \tilde{\Gamma}$  est un revêtement fini de  $M$ . Et la variété  $F$  admet deux relevés disjoints dans  $\tilde{M}$  dont l'union est non séparante. En effet, soient  $\alpha$  un lacet dans  $M$  représentant  $a$  et  $\beta$  un lacet dans  $M$  représentant  $b$  et rencontrant  $F$  en un unique point. Soit  $c_1$  un relevé de  $\alpha$  allant d'un relevé  $F_1$  de  $F$  à un relevé disjoint  $F_2$  de  $F$ . On construit par récurrence des relevés  $c_2, \dots, c_l$  de  $\beta$  et des relevés disjoints  $F_3, \dots, F_l$  de  $F$  ( $l \in \mathbf{N}$ ) de manière à ce que  $c_i$  soit un chemin allant de  $F_i$  à  $F_{i+1}$  pour  $i < l$  et  $c_l$  un chemin de  $F_l$  à  $F_{i_0}$  avec  $1 \leq i_0 \leq l$ . Le lacet  $c_{i_0} \cdot c_{i_0+1} \dots c_l$  a un nombre d'intersection égal à 1 modulo 2 avec  $F_l$  et à 0 modulo 2 avec  $F_1$ . Donc  $F_1 \cup F_l$  est non séparante dans  $\tilde{M}$ .  $\square$

**COROLLAIRE.** *Soit  $M$  une variété hyperbolique de volume fini contenant un cycle géodésique de codimension 1. Alors le groupe fondamental de  $M$  contient un sous-groupe d'indice fini qui se surjecte sur un groupe libre de rang deux.*

*Démonstration.* Conservons les notations de la démonstration précédente. Alors,  $\tilde{\Gamma} \cong \pi_1 \tilde{M}$  se surjecte sur un groupe libre de rang deux. En effet, soient  $C_1 \cong F_1 \times [-1, 1]$  et  $C_l \cong F_l \times [-1, 1]$  deux voisinages colliers de  $F_1$  et  $F_l$  dans  $\tilde{M}$ . On construit une application continue de  $\tilde{M}$  sur un bouquet de deux cercles en projetant tous les points de  $M - (C_1 \cup C_l)$  sur le point base du bouquet et chaque intervalle  $x \times [-1, 1]$  sur la première boucle lorsque  $x \in F_1$  et sur la deuxième lorsque  $x \in F_l$ . Au niveau des groupes fondamentaux, cette application induit une surjection de  $\tilde{\Gamma}$  sur le groupe libre de rang deux. En particulier sous les hypothèses du théorème 2,  $M$  admet un revêtement fini dont le groupe fondamental se surjecte sur un groupe libre de rang deux.