Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 46 (2000)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: TOPOLOGIE DES COURBES ALGÉBRIQUES RÉELLES : UNE QUESTION DE FELIX KLEIN

Autor: Gabard, Alexandre

Kapitel: 3. Les petites déformations des courbes planes nodales

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-64798

2. Les séparantes, avec $r = 1$ et donc $g \equiv 0 \pmod 2$, se déduisent de la *sphère équatoriale* en lui attachant récursivement une paire d'oreilles (cf. Figure 5).

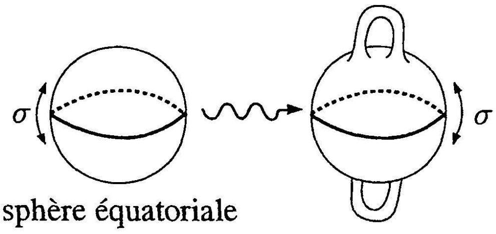

FIGURE 5

3. LES PETITES DÉFORMATIONS DES COURBES PLANES NODALES

Notre outil principal est le *théorème de Brusotti* sur l'indépendance de la simplification des nœuds (= points doubles ordinaires) des courbes planes (cf. [Br] ou [BR], pp. 269–275). On va en faire un double usage.

• D'abord pour faire du plan $\mathbf{P}^2$ l'habitacle de « déformations » explicites de courbes algébriques réelles, permettant en particulier de modéliser l'opération clé $(g,r,a) \mapsto (g+1, r+1, a)$ pour la génération des surfaces symétriques, et d'obtenir ainsi une preuve « purement projective » du théorème de Klein relatif aux *courbes « abstraites »*.

• Et ensuite comme outil de *construction de courbes réelles lisses dans le plan*: la méthode consiste à se donner deux courbes réelles transverses de petits degrés (typiquement des droites et des coniques) dont la topologie est bien comprise, puis de « lissifier » la réunion de leurs parties réelles; le théorème de Brusotti assure alors l'existence d'une courbe algébrique réelle lisse dont la partie réelle réalise les lissifications prescrites. Cette remarquable flexibilité graphique des courbes planes réelles nodales (qui est essentiellement une conséquence du théorème de Riemann-Roch) va jouer un rôle crucial dans la partie constructive du problème de Klein.

THÉORÈME 3.1 (Brusotti 1921). • *Soit $\Gamma \subset \mathbf{P}^2$ une courbe plane de degré d (non nécessairement irréductible) dont les seules singularités sont des nœuds $p_1, \ldots, p_\delta$. Alors pour tout choix de points doubles $S \subset \{p_1, \ldots, p_\delta\}$, il existe une courbe plane Δ de même degré d voisine de Γ qui simplifie les nœuds prescrits S et conserve les nœuds restants (modulo mouvements infinitésimaux).*

• *Si en outre la courbe Γ est réelle, alors la courbe simplifiée Δ peut aussi être choisie réelle, pour autant que chaque simplification d'un nœud imaginaire s'accompagne de celle du nœud imaginaire conjugué.*

De plus chaque noeud réel (qu'il soit isolé ou non) admet deux modes de simplifications (cf. Figure 6) que l'on peut prescrire de façon indépendante.

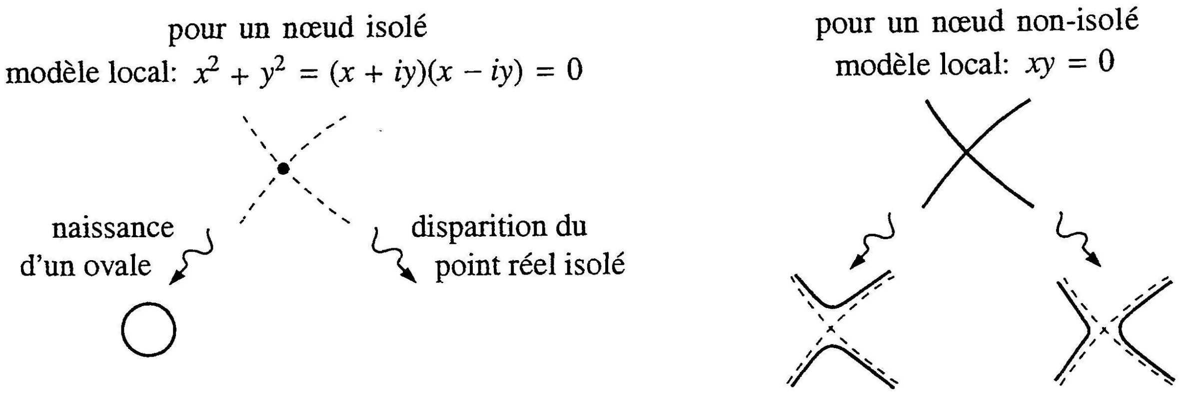

FIGURE 6

4. LE THÉORÈME DE KLEIN

La classification topologique des surfaces symétriques abstraites étant effectuée, on se demande lesquelles proviennent de l'action de Galois sur une courbe algébrique réelle. La réponse est donnée par le :

THÉORÈME 4.1 (Klein 1882). *Toutes les surfaces symétriques sont réalisables comme l'action de Galois sur une courbe algébrique réelle irréductible et lisse.*

Preuve. Il suffit de réaliser les modèles minimaux, puis de modéliser « algébro-géométriquement » l'opération d'attachement d'une anse baguée.

• Réalisation des modèles minimaux.

On considère des courbes hyperelliptiques réelles $\Gamma_0 : y^2 = f(x)$ où $f(x)$ est un polynôme réel de degré $2g+2$ ayant des racines distinctes. La normalisée $\widetilde{\Gamma}$ de la courbe projective $\Gamma \subset \mathbf{P}^2$ associée à Γ_0 est alors une courbe réelle de genre g.

1. Si $f(x)$ est choisi tel que $f(x) < 0$ $\forall x \in \mathbf{R}$, alors $\Gamma_0(\mathbf{R})$ est vide et donc $\widetilde{\Gamma}(\mathbf{R})$ aussi. On obtient de la sorte (en considérant $\widetilde{\Gamma}$) pour tout g une