Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 46 (2000)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: TOPOLOGIE DES COURBES ALGÉBRIQUES RÉELLES : UNE QUESTION DE FELIX KLEIN
Autor: Gabard, Alexandre
Kapitel: 5. Le problème de Klein: description des prohibitions
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-64798

5. Le problème de Klein : description des prohibitions

Pour une courbe *plane* lisse $C \subset \mathbf{P}^2$, le genre est $g = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$, où d désigne le degré de la courbe C. On va donc se restreindre aux genres de cette forme, et il devient maintenant commode de substituer aux invariants (g, r, a) les invariants (d, r, a).

Pour les degrés d impairs, une courbe plane réelle a toujours des points réels ; si bien qu'il est impossible de réaliser la surface symétrique sans point fixe. Je me référerai à cette restriction sous le terme de *restriction de Galois*.

Ensuite comme conséquence des travaux de Klein sur le dénombrement des caractéristiques-theta réelles impaires (cf. [K2]), Gross et Harris ont mis en évidence une restriction plus subtile : si $d \equiv 5 \pmod 8$ (auquel cas $g \equiv 0 \pmod 2$), alors il n'existe pas de courbe plane séparante avec $r = 1$ (cf. [GrHa], Prop. 7.1, p. 173). Noter pourtant qu'une telle surface symétrique existe abstraitement puisque g est pair (cf. Figure 8). Ainsi déjà en degré 5, les courbes planes présentent des lacunes vis-à-vis des invariants (d, r, a) : impossibilité de fabriquer une quintique (plane réelle lisse) séparante n'ayant qu'une composante.

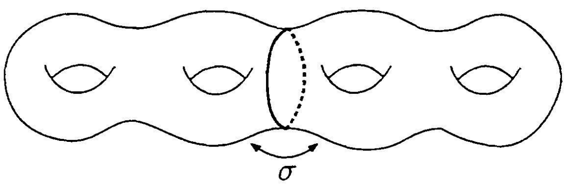

Figure 8

En fait on a une restriction beaucoup plus forte due à Rohlin (cf. [Ma], p. 59) :

Théorème 5.1 (Inégalité de Rohlin). *Si C est une courbe plane réelle lisse séparante de degré d, alors $r \geq [\frac{d+1}{2}]$.*

Preuve. Etant donné une courbe séparante C, Rohlin observe que la partie réelle $C(\mathbf{R})$ admet deux orientations de signes opposés comme bord des moitiés de $C \setminus C(\mathbf{R})$ et parle d'*orientations complexes*. En supposant maintenant la courbe plane, il compare pour chaque paire d'ovales emboîtés, les orientations complexes de ses deux ovales à celles comme bord des orientations de l'anneau délimité par la paire dans $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$. Lorsque ces orientations coïncident il parle d'une *paire positive*, et dans le cas contraire d'une *paire négative*, et note Π^+ et Π^- leur nombre respectif. En calculant l'intersection dans $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ des deux moitiés (rebouchées par les adhérences des intérieurs des ovales) il obtient la formule :

$$(1) \qquad 2(\Pi^+ - \Pi^-) = r - k^2$$

où $k = \frac{d}{2}$ et où l'on suppose le degré d pair (le cas des degrés impairs nécessite une discussion parallèle effectuée par Mishachev [Mi]). Pour plus de détails on renvoie à [R1], où la formule (1) est démontrée dans le cas particulier des courbes Harnack-maximales (aussi appelées *M-courbes*), et pour l'énoncé général, on consultera [R2], p. 91.

Ensuite il est purement formel à partir de la *formule de Rohlin* (1) de déduire l'inégalité de Rohlin. En effet, si $\Pi = \Pi^+ + \Pi^-$ désigne le nombre total de paires d'ovales emboîtés, on a $\Pi \leq \binom{r}{2}$, et alors d'après (1) :

$$r = k^2 + 2(\Pi^+ - \Pi^-) \geq k^2 - 2\Pi^- \geq k^2 - 2\Pi \geq k^2 - 2\binom{r}{2} = k^2 - r(r-1) .$$

En se concentrant sur les membres extrêmes, on en tire $r^2 \geq k^2$, et donc $r \geq k$. Ce qui est précisement l'inégalité de Rohlin pour d pair. On laisse au soin du lecteur, la tâche analogue pour les degrés impairs en utilisant cette fois la formule de Mishachev (cf. [R2], p. 91). □

La suite de l'exposé est consacrée à la démonstration du théorème suivant qui résout complètement le problème de Klein :

THÉORÈME 5.2. *Les restrictions de Galois (si $d \equiv 1 \pmod 2$ alors $r \geq 1$) et de Rohlin (si $a = 0$ alors $r \geq [\frac{d+1}{2}]$) sont les seules contraintes sur les invariants (d, r, a) de Klein pour les courbes algébriques planes réelles lisses.*

6. LA GÉNÉTIQUE CHEZ LES COURBES PLANES RÉELLES

Avant de construire des courbes, notre problème exige une compréhension du comportement de l'invariant a lorsque l'on « accouple » deux courbes planes réelles lisses transverses en simplifiant tous leurs points d'intersection à la Brusotti. A ce sujet, on a le résultat suivant dû à Fiedler (cf. [Fi], pp. 7–9) :