

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 47 (2001)  
**Heft:** 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR L'HYPERBOLICITÉ DE CERTAINS COMPLÉMENTAIRES  
**Autor:** Berteloot, François / Duval, Julien  
**Anhang:** 5. Appendice. Courbes de Brody dans  $(C^*)^k$   
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-65437>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 02.04.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

REMARQUE. On construit facilement des exemples de courbes  $C$  à trois composantes de degré 5 dont le complémentaire n'est pas hyperbolique à cause d'une droite ne coupant  $C$  qu'en 2 points. En voici deux, présentés en coordonnées affines, où l'obstruction  $\Gamma$  est une conique ou une cubique rationnelle ne rencontrant  $C$  qu'en 2 points.

a)  $C$  est l'union des deux paraboles d'équation  $(\pm 2x = y^2 - 2)$  et de l'axe des  $x$ . Le cercle  $\Gamma$  d'équation  $(x^2 + y^2 = 1)$  a des contacts d'ordre 4 avec les paraboles en leurs sommets situés sur l'axe des  $x$ .

b)  $C$  est l'union de la cubique d'équation  $(y^3 = x^3 + x)$ , de l'axe des  $x$  et de la droite à l'infini. La cubique rationnelle  $\Gamma$  d'équation  $(x = y^3)$  a son point de rebroussement à l'infini au point de rencontre des deux droites et un contact d'ordre 9 avec la cubique de  $C$  en l'origine, également sur l'axe des  $x$ .

## 5. APPENDICE. COURBES DE BRODY DANS $(\mathbf{C}^*)^k$

Le théorème du paragraphe 3 est aussi conséquence de la description des courbes de Brody dans  $(\mathbf{C}^*)^k$ .

DÉFINITION. Une courbe entière  $f: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{P}^k(\mathbf{C})$  est dite *de Brody* si  $\|f'\| \leq 1$ , la dérivée étant mesurée dans les métriques usuelles de  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{P}^k(\mathbf{C})$ .

Toute courbe entière possède une limite de Brody, précisément par le lemme de Brody (cf. § 1). Celles contenues dans  $(\mathbf{C}^*)^k$  sont très simples :

THÉORÈME. *Les seules courbes de Brody  $f: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{P}^k(\mathbf{C})$  évitant les hyperplans de coordonnées sont de la forme*

$$f(z) = [ce^{\alpha z}] := [c_1 e^{\alpha_1 z} : \dots : c_{k+1} e^{\alpha_{k+1} z}], \quad c_i, \alpha_i \text{ dans } \mathbf{C}.$$

*Démonstration.* Écrivons  $f = e^\phi$  dans une carte de  $\mathbf{P}^k(\mathbf{C})$ , par exemple  $(z_{k+1} = 1)$ .

La première étape, classique (voir [5]), montre que les composantes de  $\phi$  sont quadratiques. L'argument remonte aux origines de la théorie de Nevanlinna. La propriété d'être de Brody pour  $f$  se traduit directement par la surharmonicité de  $\text{Log}(1 + |f_1|^2 + \dots + |f_k|^2) - |z|^2$ . Les moyennes de  $\text{Log}(1 + |f_1|^2 + \dots + |f_k|^2)$  sur les cercles de centre 0 et de rayon  $r$

croissent ainsi au plus quadratiquement en  $r$ . Il en est de même pour celles de  $\text{Log}(1 + |f_j|^2)$ , donc de  $\text{Log}(|f_j| + |f_j|^{-1})$  puisque  $\text{Log}|f_j| = \text{Re}(\phi_j)$  est harmonique. Or le développement en série entière de  $\phi_j$  donne :

$$\pi r^n \phi_j^{(n)}(0) = n! \int_0^{2\pi} \text{Re} \phi_j(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta,$$

d'où

$$\pi r^n |\phi_j^{(n)}(0)| \leq n! \int_0^{2\pi} |\text{Log} |f_j(re^{i\theta})|| d\theta \leq n! \int_0^{2\pi} (\text{Log}(|f_j| + |f_j|^{-1}))(re^{i\theta}) d\theta.$$

En faisant croître indéfiniment  $r$ , on en déduit que  $\phi_j^{(n)}(0) = 0$  pour  $n \geq 3$ . Les composantes de  $\phi$  sont bien quadratiques.

La deuxième étape consiste à voir que les composantes de  $\phi$  sont en fait affines. Pour cela, revenons aux coordonnées homogènes :

$$f = [e^{\phi_1} : \dots : e^{\phi_{k+1}}] \text{ avec } \deg(\phi_i) \leq 2.$$

Il s'agit de montrer que  $\phi_i - \phi_j$  est affine pour toute paire d'indices. Convenons que  $i$  équivaut à  $j$  si c'est le cas pour la paire  $\{i, j\}$ . La remarque cruciale est la suivante :

*Soit  $Y_{ij} = \{z \mid |z_i| = |z_j| \geq |z_l| \text{ pour tout } l\}$  (cf. §3). Si  $f^{-1}(Y_{ij})$  n'est pas compact, alors  $i$  équivaut à  $j$ .*

En effet, on peut alors trouver  $a_n$  tendant vers l'infini avec  $f(a_n)$  tendant vers  $b$  dans  $Y_{ij}$ . Quitte à extraire, on peut supposer la suite  $(f(z + a_n))$  localement uniformément convergente par le théorème d'Ascoli puisque la dérivée de  $f$  est uniformément bornée. Il en est de même pour la suite des dérivées en 0 de la  $i$ -ième composante de  $(f(z + a_n))$  dans la carte  $(z_j = 1)$ , donc

$$(f_i/f_j)'(a_n) = (\phi_i'(a_n) - \phi_j'(a_n))((f_i/f_j)(a_n))$$

converge.

Or  $(f_i/f_j)(a_n)$  tend vers  $b_i/b_j \neq 0$ . Ainsi  $\phi_i'(a_n) - \phi_j'(a_n)$  doit converger alors que  $\phi_i' - \phi_j'$  est affine et que  $a_n$  tend vers l'infini. Ceci force  $\phi_i' - \phi_j'$  à être constant et  $i$  équivaut à  $j$ .

Cette remarque permet de conclure : en effet, elle entraîne que le maximum des modules des composantes de  $f$  est réalisé par des composantes d'indices équivalents (par exemple à 1) hors d'un compact de  $\mathbf{C}$ . On aura ainsi, pour tout  $i$  :

$$\text{Re}(\phi_i)(z) \leq \text{Re}(\phi_1)(z) + O(|z|).$$

Donc  $\phi_i - \phi_1$  est affine pour tout  $i$ .  $\square$