

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 48 (2002)  
**Heft:** 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** UNE PREUVE GÉOMÉTRIQUE DU THÉORÈME DE JUNG  
**Autor:** Lamy, Stéphane  
**Kapitel:** 4. Compléments  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-66078>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

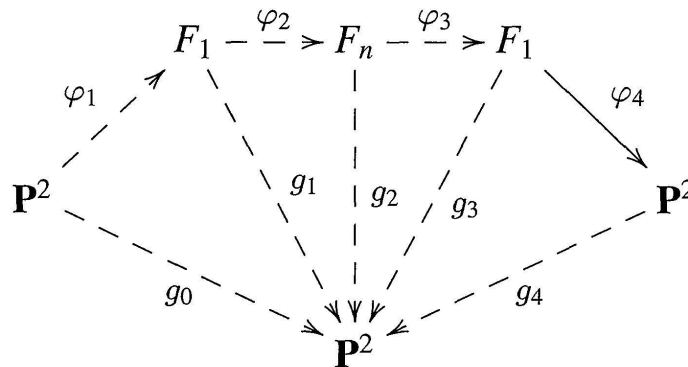
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 02.04.2025

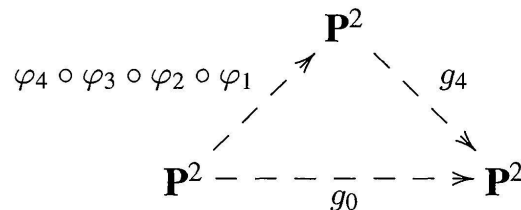
**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## CONCLUSION

On peut regrouper les quatre diagrammes (D1), ..., (D4) en un seul



soit de manière condensée :



avec

$$\# \text{ind}(g_4) = \# \text{ind}(g_0) - 2n + 1 \quad (\text{où } n \geq 2).$$

Reste à vérifier que  $\varphi = \varphi_4 \circ \varphi_3 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1$  est un automorphisme élémentaire. Pour cela il suffit de constater que  $\varphi$  préserve le feuilletage  $y = \text{constante}$ , autrement dit que  $\varphi$  préserve le pinceau des droites passant par  $[1 : 0 : 0]$ . Or ceci est immédiat : l'éclatement  $\varphi_1$  envoie les droites passant par  $[1 : 0 : 0]$  sur les fibres de  $F_1$ ,  $\varphi_2$  et  $\varphi_3$  respectent les fibrations associées à  $F_1$  et  $F_n$ , et enfin la contraction  $\varphi_4$  envoie les fibres de  $F_1$  sur les droites passant par  $[1 : 0 : 0]$ . L'application  $g_4$  est donc un automorphisme de  $\mathbf{C}^2$  qui s'obtient en composant  $g$  avec un automorphisme affine puis un automorphisme élémentaire, et satisfaisant l'inégalité :

$$\# \text{ind}(g_4) < \# \text{ind}(g).$$

Par récurrence sur  $\# \text{ind}(g)$ , ceci termine la démonstration.

## 4. COMPLÉMENTS

## 4.1 UN EXEMPLE

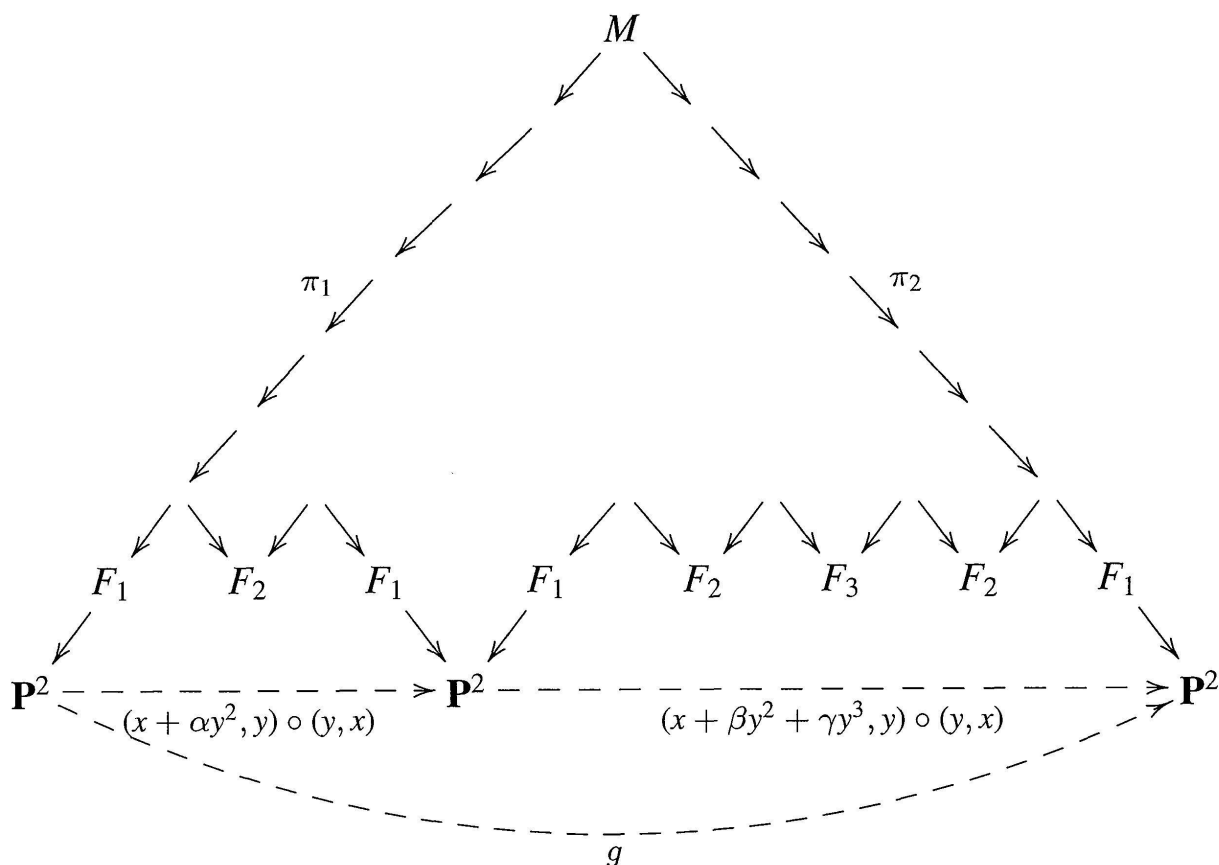
Considérons l'automorphisme  $g$  suivant :

$$g: (x, y) \mapsto (y + \beta(y + \alpha x^2)^2 + \gamma(y + \alpha x^2)^3, y + \alpha x^2) \quad \text{avec } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{C}^*.$$

La décomposition de  $g$  utilise deux automorphismes élémentaires :

$$g(x, y) = (x + \beta y^2 + \gamma y^3, y) \circ (y, x) \circ (x + \alpha y^2, y) \circ (y, x).$$

En appliquant le théorème de Zariski à  $g$  on décompose  $g$  à l'aide de huit éclatements puis huit contractions. Quand on applique notre algorithme à  $g$  on change l'ordre de ces éclatements et contractions comme le décrit le diagramme suivant :



Expliquons plus précisément comment est obtenu ce diagramme. Le point d'indétermination propre de  $g$  est  $[0 : 1 : 0]$ , on commence donc par considérer  $g \circ (y, x)$  qui est indéterminé en  $[1 : 0 : 0]$ . On éclate ce point, puis on applique une fois le lemme 10. Sur la surface  $F_2$  obtenue le point d'indétermination est situé sur la fibre  $f_\infty$  (l'emplacement exact est paramétré par le coefficient  $\alpha$ ). On applique alors une fois le lemme 11 puis on contracte la section  $s_\infty(F_1)$ . On a ainsi obtenu la décomposition :

$$g = g' \circ (x + \alpha y^2, y) \circ (y, x)$$

où  $g'$  n'admet plus que 5 points d'indétermination. On considère  $g' \circ (y, x)$  pour se ramener à un automorphisme dont le point d'indétermination propre est  $[1 : 0 : 0]$ . On éclate ce point, puis on applique deux fois le lemme 10. On est alors en situation d'appliquer deux fois le lemme 11 (l'emplacement exact

des points d'indétermination sur  $f_\infty(F_3)$  et  $f_\infty(F_2)$  dépend des coefficients  $\gamma$  et  $\beta$ ). Enfin on contracte la section  $s_\infty(F_1)$ , on a ainsi obtenu

$$g'(x, y) = (x + \beta y^2 + \gamma y^3, y) \circ (y, x).$$

#### 4.2 STRUCTURE DE PRODUIT AMALGAMÉ

Nous voulons montrer que  $\text{Aut}[\mathbf{C}^2]$  est non seulement engendré par les sous-groupes  $A$  et  $E$ , mais que de plus c'est le produit amalgamé de ces deux groupes. Autrement dit nous voulons montrer que toutes les relations dans le groupe  $\text{Aut}[\mathbf{C}^2]$  sont induites par les relations dans les groupes  $A$  et  $E$ . Ceci revient à montrer qu'une composition

$$h = a_1 \circ e_1 \circ \cdots \circ a_n \circ e_n \text{ avec } a_i \in A \setminus E, \quad e_i \in E \setminus A$$

n'est jamais égale à l'identité. Bien noter qu'on peut se restreindre à considérer des compositions  $h$  de cette forme, à savoir de longueur paire et commençant par un automorphisme affine. En effet si  $h$  est de longueur impaire (et supérieure à 3: bien sûr si  $h$  est de longueur 1 ce n'est pas l'identité) on peut faire baisser la longueur de  $h$  par conjugaison. De plus si  $h$  est de longueur paire et commence par un automorphisme élémentaire, il suffit de considérer  $h^{-1}$ .

Chaque automorphisme  $e_i$ , vu comme application birationnelle de  $\mathbf{P}^2$ , contracte la droite à l'infini sur le point  $[1 : 0 : 0]$  (car on suppose  $e_i \notin A$ ). De plus, dire que  $a_i \notin E$  revient à dire que le point  $[1 : 0 : 0]$  n'est pas un point fixe de  $a_i$ . On en déduit que l'extension de  $h$  à  $\mathbf{P}^2$  contracte la droite à l'infini sur le point  $a_1([1 : 0 : 0])$ , ce qui montre que  $h$  n'est pas l'identité.

#### 4.3 PREUVE SUR UN CORPS QUELCONQUE

Etant donné un corps  $k$  nous notons  $A_k$  et  $E_k$  les groupes affine et élémentaire à coefficients dans  $k$ ; par  $\bar{k}$  nous désignons la clôture algébrique de  $k$ . Une première remarque est que notre preuve fonctionne sans aucun changement dans le cas d'un corps algébriquement clos  $\bar{k}$  (la caractéristique du corps n'a pas d'importance). Les résultats sur la géométrie des surfaces que nous utilisons, à savoir les propriétés de la forme d'intersection (formules 5) et le théorème de décomposition de Zariski sont énoncés avec un tel degré de généralité par exemple dans le chapitre V de [18]. De même on peut recopier l'argument ci-dessus pour montrer que  $\text{Aut}[\bar{k}^2]$  est le produit amalgamé de  $A_{\bar{k}}$  et  $E_{\bar{k}}$ .

Considérons maintenant un corps  $k$  non algébriquement clos, et soit  $g$  un élément de  $\text{Aut}[k^2]$  de degré  $d$ . On sait déjà que  $g$  est une composée

d'automorphismes affines et élémentaires à coefficients dans  $\bar{k}$ . Nous allons maintenant en déduire qu'il existe une décomposition ne mettant en jeu que des éléments de  $A_k$  et  $E_k$ .

Comme précédemment nous considérons  $g$  comme une application birationnelle de  $\mathbf{P}_k^2$  dans lui-même. Le point crucial est que nous savons que  $g$  admet un *unique* point d'indétermination propre, qui est l'image par  $g^{-1}$  de la droite à l'infini. Choisissons un point  $p$  de la droite à l'infini dont les coordonnées homogènes soient dans  $k$  et qui ne soit pas le point d'indétermination de  $g^{-1}$  (l'un des deux points  $[1 : 0 : 0]$  ou  $[0 : 1 : 0]$  convient). Alors  $g^{-1}(p)$  est le point d'indétermination propre de  $g$ , et est donc contenu dans  $\mathbf{P}_k^2$ . Par un raisonnement symétrique le point d'indétermination propre de  $g^{-1}$  est également dans  $\mathbf{P}_k^2$ . En composant  $g$  à droite et à gauche par des éléments bien choisis de  $A_k$  on peut donc se ramener au cas où les points d'indétermination de  $g$  et  $g^{-1}$  sont tous deux  $[1 : 0 : 0]$ . Ceci revient à dire qu'on s'est ramené au cas où la décomposition de  $g$  dans le produit amalgamé de  $A_{\bar{k}}$  et  $E_{\bar{k}}$  commence et finit par un automorphisme élémentaire :

$$g = e_n \circ a_{n-1} \circ \cdots \circ a_1 \circ e_1 \text{ avec } a_i \in A_{\bar{k}} \setminus E_{\bar{k}}, \quad e_j \in E_{\bar{k}} \setminus A_{\bar{k}}.$$

Une récurrence immédiate montre alors que  $g$  s'écrit

$$g : (x, y) \mapsto (\gamma y^{d_1 \cdot d_2} + \cdots, \delta y^{d_1} + \cdots)$$

avec  $\gamma, \delta \in k^*$  et  $d_1, d_2 > 1$  (on a écrit seulement les composantes homogènes de plus haut degré). En composant  $g$  à gauche par l'automorphisme  $(x, y) \mapsto (x - \frac{\gamma}{\delta} y^{d_2}, y)$  qui est un élément de  $E_k$  on obtient un élément de  $\text{Aut}[k^2]$  de degré strictement inférieur à celui de  $g$ . Par récurrence sur le degré ceci termine la démonstration.

NOTE. Alors que cet article était soumis pour publication J. F. de Bobadilla m'a très aimablement écrit pour me signaler qu'il était l'auteur, de manière à la fois concomitante et indépendante, d'une preuve du théorème de Jung similaire à celle que j'ai exposée ici (voir le chapitre 1 de [5]).

REMERCIEMENTS. J'ai eu l'occasion d'exposer en détail ce travail à divers stades de son élaboration, successivement à l'ENS Lyon, l'Université Fédérale de Porto Alegre et l'Université de Rennes. J'ai chaque fois profité des nombreuses remarques et questions qui m'ont été formulées. Merci également à Thierry Vust pour ses suggestions qui m'ont permis de notablement améliorer la lisibilité de l'article.