

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 49 (2003)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** CARACTÉRISATION GÉOMÉTRIQUE DES SOLUTIONS DE MINIMAX POUR L'ÉQUATION DE HAMILTON-JACOBI  
**Autor:** Capitanio, Gianmarco  
**Kapitel:** 3. Caractérisation géométrique de la solution de minimax  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-66676>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 02.04.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

suffisamment régulières, convergentes vers  $H$  et  $u_0$  respectivement. Pour chaque  $n \in \mathbf{N}$  on construit la solution de minimax  $u_n$  du problème de Cauchy de hamiltonien  $H_n$  et donnée initiale  $(u_{0,n})$ ; il suit que la limite  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  est la solution de minimax du problème de Cauchy de hamiltonien  $H$  et donnée initiale  $u_0$ .

### 3. CARACTÉRISATION GÉOMÉTRIQUE DE LA SOLUTION DE MINIMAX

#### 3.1 NOTATIONS

Soit  $J^0\mathbf{R} = \{(q, z)\} \simeq \mathbf{R}^2$  l'espace des jets d'ordre 0 sur  $\mathbf{R}$ ,  $\pi_0: J^0\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  la projection naturelle  $(q, z) \mapsto q$ . Un front d'onde dans  $J^0\mathbf{R}$  est la projection dans  $J^0\mathbf{R}$  d'une courbe legendrienne de  $J^1\mathbf{R} = \{(q, z, p)\} \simeq \mathbf{R}^3$  par  $\pi_1: (q, z, p) \mapsto (q, z)$ . Pour un front générique, les seules singularités possibles sont des cusps et des auto-intersections transverses.

Soit  $F$  un front de  $J^0\mathbf{R}$ . On appelle *section* de  $F$  toute partie connexe maximale  $\sigma$  qui est le graphe d'une fonction  $\chi_\sigma: \pi_0(\sigma) \rightarrow \mathbf{R}$  de classe  $C^1$  par morceaux. Une *branche* de  $F$  est une section de classe  $C^1$ .

Un front est *long* si, en dehors d'un compact de  $\mathbf{R}$ , il est le graphe d'une fonction, *plat* si sa tangente n'est jamais verticale. On peut dans ce cas coorienter le front en fixant en tout point le vecteur orthonormal dont la coordonnée en  $z$  est positive. Si le front est ainsi orienté, on peut distinguer deux types de cusp: *montant*, si en suivant le front, on passe d'une branche à l'autre en la direction de la normale fixée, *descendant* si on passe en la direction opposée.

Deux courbes legendriennes de  $J^1\mathbf{R}$  sont *isotopes* (par une isotopie *legendrienne*) s'il existe un chemin de l'une à l'autre dans l'espace des courbes legendriennes plongées de  $J^1\mathbf{R}$ . Pour la famille correspondante de fronts les perestroikas qui interviennent génériquement sont montrés à la Figure 6; il s'agit des projections des mouvements de Reidemeister pour les nœuds relèvement des fronts dans l'espace de contact (voir par exemple [Ar3]): *queue d'aronde* ( $Q$ ), *pyramide* ( $P$ ), *porte-monnaie* ( $B$ ) et *auto-tangence sûre*<sup>8)</sup> ( $J^-$ ).

Les auto-tangences dangereuses<sup>9)</sup> sont interdites car elles correspondent à un point d'auto-intersection de la courbe legendrienne dont le front est la projection. Pour un front plat toutes les auto-tangences sont dangereuses.

<sup>8)</sup> Au point d'auto-tangence la coorientation des deux branches est opposée.

<sup>9)</sup> Au point d'auto-tangence la coorientation des deux branches est la même.

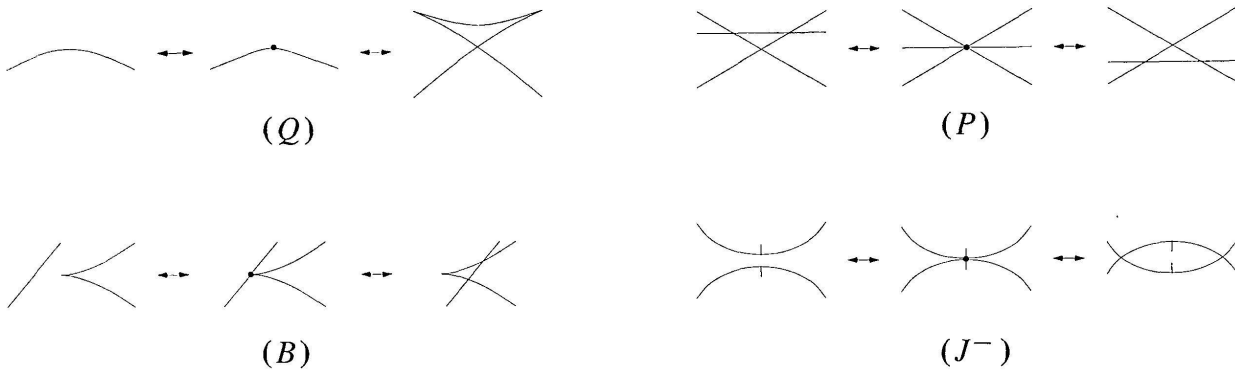


FIGURE 6

Singularités permises dans l'isotopie entre deux fronts

Le nombre de cusps d'un front, comptés avec leur signe (positif pour les cusps montants, négatif pour les cusps descendants), le *nombre de Maslov*, est invariant par isotopies legendriennes.

### 3.2 DÉCOMPOSITIONS ADMISSIBLES (D'APRÈS CHEKANOV ET PUSHKAR)

Dans cette section on rappelle brièvement la construction d'un nouvel invariant des nœuds legendriens, dû à Yu. Chekanov et P. Pushkar, qui permettra d'établir une caractérisation géométrique de la solution de minimax.

La projection d'un nœud legendrien de  $J^1\mathbf{R}$  dans  $J^0\mathbf{R}$  par  $\pi_1$  est un front fermé. Soit  $\Sigma$  un tel front, générique.

On appelle *décomposition* de  $\Sigma$  des courbes  $X_1, \dots, X_n$  fermées, ayant un nombre fini d'auto-intersections, telles que pour  $i \neq j$ ,  $X_i \cap X_j$  contient un nombre fini de points, et  $X_1 \cup \dots \cup X_n = \Sigma$ .

Un point double  $x \in X_i \cap X_j$  de  $\Sigma$  est un *point de saut* si  $X_i$  et  $X_j$  ne sont pas lisses en  $x$ , *de Maslov* si le nombre de cusps (comptés avec leur signe) qui séparent le long du front les deux branches se coupant en  $x$  est 0.

DÉFINITION. Une décomposition  $(X_1, \dots, X_n)$  de  $\Sigma$  est *admissible* si :

- (1) chaque  $X_i$  est homéomorphe au bord d'un disque :  $\partial X_i = B_i$  ;
- (2) pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $q \in \mathbf{R}$ , l'ensemble

$$B_i(q) := \{z \in \mathbf{R} \mid (q, z) \in B_i\}$$

est connexe ; en particulier si c'est un point, ce point est un cusp du front ;

- (3) si  $(q_0, z) \in X_i \cap X_j$  ( $i \neq j$ ) est un point de saut alors pour  $q \neq q_0$ , assez proche  $q_0$ , l'ensemble  $B_i(q) \cap B_j(q)$  est soit  $B_i(q)$ , soit  $B_j(q)$ , soit vide ;
- (4) les points de sauts sont tous de Maslov.

## REMARQUES.

(1) Il suit des conditions (1) et (2) que chaque courbe  $X_i$  a exactement deux cusps, qui divisent la courbe en deux parties, que l'on note  $\sigma_i^+$  et  $\sigma_i^-$  (avec la convention suivante : pour tout  $(q, z_i^\pm) \in \sigma_i^\pm$  générique, on a  $z_i^- < z_i^+$ ).

(2) La condition (3) équivaut à demander qu'aucun point de saut ne réalise l'une des configurations interdites montrées à la Figure 7.

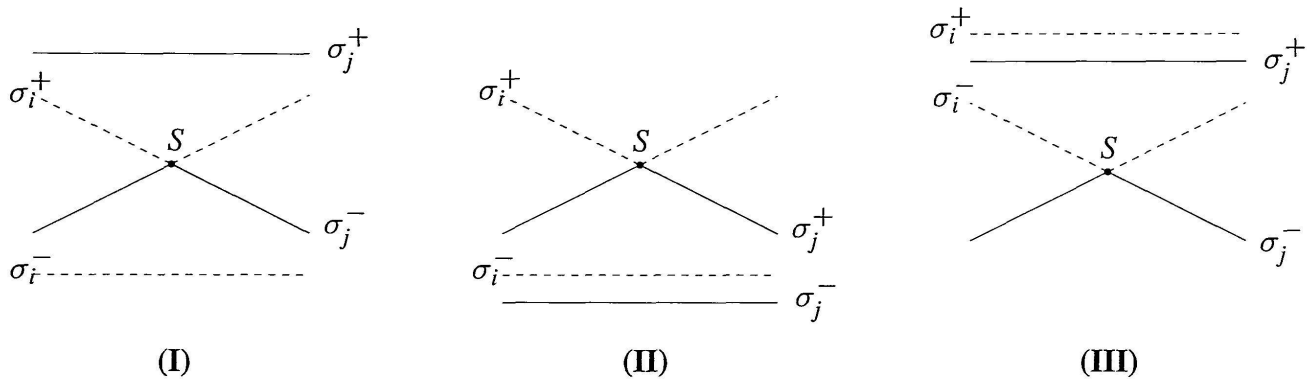


FIGURE 7

Configurations interdites autour des points de saut

Notons par  $\#(\mathcal{D})$  le nombre de courbes  $X_i$  et par  $\#(\mathcal{S})$  le nombre de points de saut dans une décomposition admissible  $\mathcal{D}$  du front  $\Sigma$ .

**THÉORÈME DE CHEKANOV-PUSHKAR** ([Ch2], [C-P]). *Le nombre de décompositions admissibles d'un front projection d'un nœud legendrien est invariant par isotopies legendriennes du nœud; de plus, le nombre  $\#(\mathcal{D}) - \#(\mathcal{S})$  est constant le long de l'isotopie.*

**EXEMPLE 3.1.** La Figure 8 montre deux décompositions d'un front générique, projection d'un nœud legendrien. Le front est isotope au front lèvre (le front ayant deux cusps et aucune auto-intersection), donc; d'après le théorème de Chekanov-Pushkar, la décomposition (1) est la seule admissible.



FIGURE 8

## 3.3 CARACTÉRISATION GÉOMÉTRIQUE DU MINIMAX

Revenons au problème de Cauchy (PC), notamment dans le cas  $Q = \mathbf{R}$  :

$$(PCR) \quad \begin{cases} \partial_t u(t, q) + H(t, q, \partial_q u(t, q)) = 0, & \forall t > 0, q \in \mathbf{R} \\ u(0, q) = u_0(q), & \forall q \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

Fixons  $t_0 > 0$ . Soit  $S(t, q; \xi)$  une fgqi de la solution géométrique  $\Lambda$  de (PCR) (ou, plus précisément, une fgqi de la solution géométrique tronquée  $\Lambda^T$ , avec  $T > t_0$ ). D'après le théorème d'unicité de Viterbo,  $S_{t_0}(q; \xi) := S(t_0, q; \xi)$  est la fgqi de  $\Lambda_{t_0} = \Lambda \cap T^*(\{t_0\} \times \mathbf{R})$ ; il s'ensuit que les solutions de minimax associées à  $\Lambda$  et  $\Lambda_{t_0}$  ont la même valeur aux points  $(t_0, q_0)$  et  $q_0$  respectivement, à savoir  $\min \max\{\xi \mapsto S(t_0, q_0; \xi)\}$ .

**DÉFINITION.** On appelle *solution multivoque* un front de  $J^0\mathbf{R}$  long plat, isotope au front nul  $\{(q, 0) \in J^0\mathbf{R}\}$ , projection d'une courbe legendrienne (plongée) transversale à la base en dehors d'un compact.

Dans la suite on suppose ces fronts orientés par l'orientation induite par la première composante de  $J^0\mathbf{R}$ . Il résulte des sections 2.2 et 2.3 que le front d'onde de  $\Lambda_{t_0}$ , graphe de  $S_{t_0}$ , est de type solution multivoque.

**REMARQUE.** Le théorème d'unicité de Viterbo permet de ramener le problème de déterminer la solution de minimax d'un problème de Cauchy (PC) quelconque au cas  $Q = \mathbf{R}$ . En effet, considérons la solution  $\Lambda^T$  du problème général. Soient  $S(t, q; \xi)$  sa fgqi et  $F$  le front d'onde de  $\Lambda^T$ , graphe de  $S$ . Si  $\gamma$  est une courbe lisse, paramétrée par  $\mathbf{R} \ni s \mapsto \gamma(s) \in ]0, T[ \times Q$  et sans aucun point singulier, la restriction  $\Lambda_\gamma$  de la solution géométrique au fibré cotangent de  $\gamma$  est une sous variété lagrangienne. Une fois identifié  $\gamma$  à  $\mathbf{R}$ ,  $(s, \xi) \mapsto S(\gamma(s); \xi)$  est la fgqi de  $\Lambda_\gamma \subset T^*\mathbf{R}$  (théorème d'unicité); son graphe  $F_\gamma$  coïncide avec la restriction de  $F$  à  $J^0\gamma \simeq J^0\mathbf{R}$ . Donc pour tout  $s \in \mathbf{R}$ , le minimax de  $F_\gamma$  au point  $s$  est égal au minimax de  $F$  au point  $\gamma(s)$ .

De plus, on peut choisir  $\gamma$  de manière que  $F_\gamma$  soit un front de type solution multivoque. En effet  $F_\gamma$  est plat car  $F$  l'est. Pour que  $F_\gamma$  soit long, on peut choisir  $\gamma$  comme suit: si  $Q = \mathbf{R}^n$  on prend n'importe quelle droite  $d$  dans  $\{t_0\} \times Q$ ; sinon on choisit pour  $\gamma$  une courbe telle que  $\gamma(\pm\infty) \in \{0\} \times Q$ . Pour montrer que le front  $F_\gamma$  est isotope à un front qui est le graphe d'une fonction (et donc au front nul), considérons dans l'espace des courbes lisses dans  $]0, T[ \times Q$  sans singularités un chemin  $\{\gamma_r\}$  entre  $\gamma_0 = \gamma$  et  $\gamma_1 = \{0\} \times d$  dans le premier cas et entre  $\gamma$  et une courbe contenue en  $t = 0$  dans le second

(voir la Figure 9). Alors pour tout chemin générique de ce type,  $\{F_{\gamma_r}\}$  est l'isotopie cherchée<sup>10</sup>).

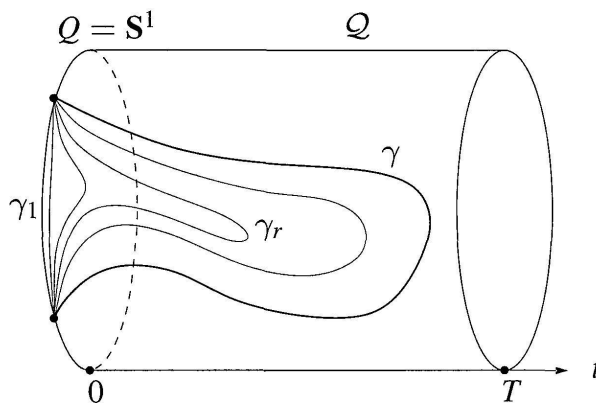


FIGURE 9

Réduction au cas unidimensionnel (dans le cas  $Q = S^1$ )

Dans la suite on va donc étudier le minimax d'un front d'onde de  $J^0\mathbf{R}$  de type solution multivoque, graphe d'une fgqi  $S(q; \xi)$ . Nous allons donner l'équivalent global (pour tout  $q \in \mathbf{R}$ ) de la subdivision des points critiques de  $\xi \mapsto S(q; \xi)$  (pour chaque  $q \in \mathbf{R}$  fixé) en point critique libre et couples de points critiques liés. La section du front parcourue par le point critique libre de  $S$  lorsque  $q$  parcourt  $\mathbf{R}$  est le graphe de la solution de minimax.

Pour utiliser le théorème de Chekanov et Pushkar il faut fermer le front en ajoutant une section à l'infini. Ce nouveau front est le graphe d'une fonction qui n'a aucun point critique libre. Lorsque  $q$  parcourt  $\mathbf{R}$ , chaque couple de points critiques liés parcourt sur le front une courbe fermée (ayant deux cusps). Ces courbes fermées sont la seule décomposition admissible du front; en particulier une de ces courbes est formée par le graphe de la solution de minimax et la section à l'infini. Par conséquent, étant donné un front de type solution multivoque, on peut déterminer le graphe de la solution de minimax à l'aide de la décomposition admissible de ce front.

Soit  $\alpha$  une branche de  $F$ ; d'après le théorème de la fonction implicite il existe une application lisse  $\bar{\xi}_\alpha: \pi_0(\alpha) \rightarrow \mathbf{R}^K$  telle que  $\alpha$  soit le graphe de  $q \mapsto S(t_0, q; \bar{\xi}_\alpha(q))$ . Pour tout point  $q$  à l'intérieur de  $\pi_0(\alpha)$ ,  $\bar{\xi}_\alpha(q)$  est un point critique non dégénéré de  $S$ . Son indice  $\text{ind}(\bar{\xi}(q))$  ne dépend pas de  $q$ . On appelle *indice* de  $\alpha$  le nombre (indépendant du choix de  $S$ )  $\text{ind}(\bar{\xi}(q)) - k_\infty$  (où  $k_\infty$  est l'indice de la forme quadratique de  $S$ ).

<sup>10</sup>) Cela n'est pas vrai en général pour tout chemin: un front  $F_{\gamma_r}$  pourrait avoir des auto-tangences, qu'on peut faire disparaître par une perturbation arbitrairement petite du chemin, puisque le front  $F$  n'a pas d'auto-tangences.

En tout point générique  $q \in \mathbf{R}$ , considérons les couples de points critiques liés de  $\xi \mapsto S(q; \xi)$ . Si le front est générique et si  $2n$  est le nombre de cusps de  $F$ , cela définit  $2n$  sections  $(\sigma_1^+, \sigma_1^-), \dots, (\sigma_n^+, \sigma_n^-)$ , prolongées par continuités aux points non génériques. On pose  $X_i := \sigma_i^+ \cup \sigma_i^-$ .

Le front  $F$  n'est pas la projection d'un nœud de  $J^1\mathbf{R}$ ; pour se ramener à cette situation il faut "fermer" le front en ajoutant deux cusps et une section à l'infini  $\sigma_\infty$  (plate), comme à la Figure 10. On note  $\tilde{F}$  ce front, qui coïncide

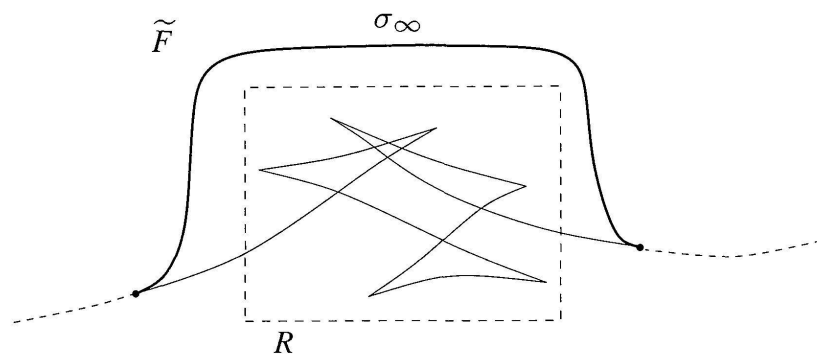


FIGURE 10

Le front  $\tilde{F}$ , compactification de  $F$

avec  $F$  dans un rectangle  $R$  de  $J^0\mathbf{R}$  contenant toutes les branches bornées de  $F$  (comme le minimax coïncide avec le max-min, on obtient les mêmes résultats si la branche à l'infini passe au dessous de  $R$ ). Ce nouveau front est la projection par  $\pi_1$  d'un nœud legendrien  $\tilde{L}$  de  $J^1\mathbf{R}$ . On fixe sur  $\tilde{F}$  l'orientation induite par celle de  $F$ .

Soit  $u$  la solution de minimax de (PCR). La *section de Chaperon-Sikorav*, notée  $\sigma_{CS}$ , est la section de  $\tilde{F}$  qui coïncide avec le graphe du minimax à l'intérieur de  $R$ . Soit  $X_0 := \sigma_\infty \cup \sigma_{CS}$ . Il est facile de voir que  $(X_0, X_1, \dots, X_n)$  est une décomposition de  $\tilde{F}$ .

**THÉORÈME 3.2.** *La décomposition  $(X_0, X_1, \dots, X_n)$  est la seule admissible.*

*Démonstration.* D'après la section 1.2, les courbes  $X_0, X_1, \dots, X_n$  satisfont les axiomes (1) et (2) des décompositions admissibles. La condition (4) est aussi vérifiée parce que la différence d'indice de deux branches est égal au nombre de cusps (comptés avec leur signe) qui les séparent le long du front (Proposition 1.10).

Il reste à montrer que la condition (3) est satisfaite, ce qui revient à montrer que les configurations interdites (I), (II) et (III) de la Figure 7 ne se produisent jamais. Pour toute courbe  $X_i = \sigma_i^+ \cup \sigma_i^-$ , et  $q$  à l'intérieur de

$\pi_0(X_i)$ , on note  $(q, \xi_i^+) \in \sigma_i^+$  et  $(q, \xi_i^-) \in \sigma_i^-$ , avec  $\xi_i^+ > \xi_i^-$ , les deux points de  $X_i$  au dessus de  $q$ ; pour  $X_0 = \sigma_\infty \cup \sigma_{CS}$ , on note  $(q, \xi_\infty) \in \sigma_\infty$  et  $(q, \xi_\ell) \in \sigma_{CS}$ , avec  $\xi_\infty > \xi_\ell$ .

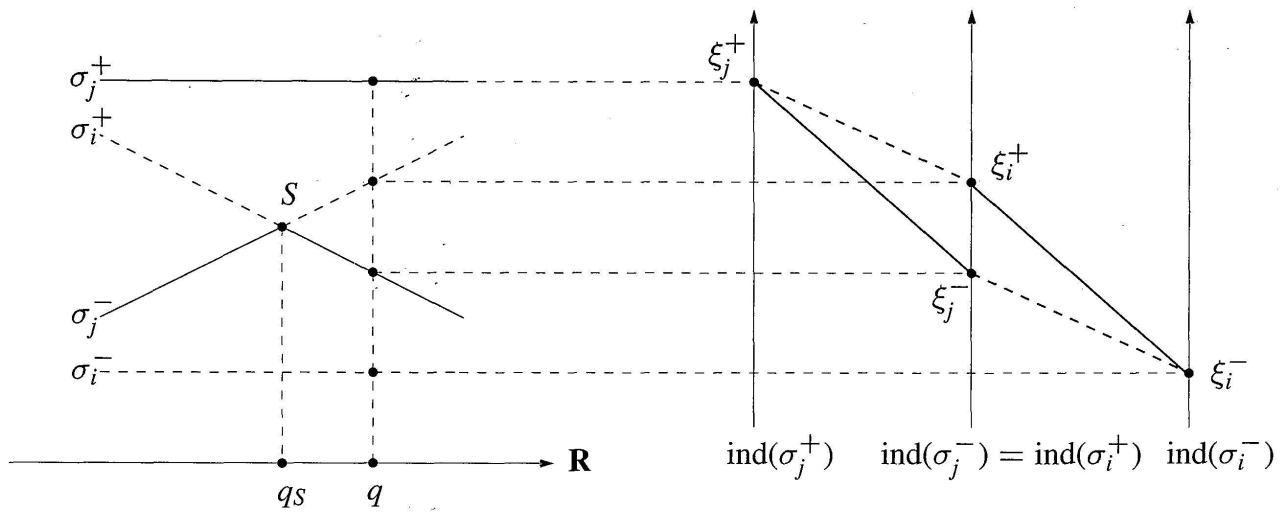


FIGURE 11

Diagramme de Morse correspondant à la configuration interdite (I)

Soient  $S$  un point de saut,  $q_s := \pi_0(S)$ ,  $q \neq q_s$  assez proche de  $q_s$ . Supposons d'abord que  $S \in X_i \cap X_j$ , avec  $i \neq j$  non nuls. Les diagrammes de Morse de  $S$  correspondant aux configurations interdites (I), (II) et (III) contredisent la Proposition 1.3, comme le montrent la Figure 11 pour la configuration (I) et la Figure 12 pour les configurations (II) et (III).

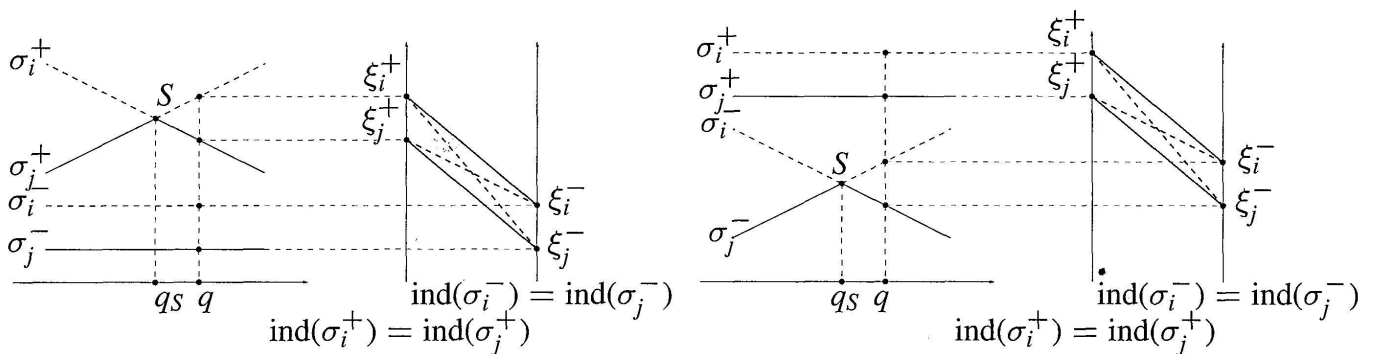


FIGURE 12

Diagrammes de Morse des configurations interdites (II) et (III)

Puisque  $\sigma_\infty$  n'a aucun point de saut, il reste les sauts de type  $S \in \sigma_{CS} \cap X_i$ , avec  $i > 0$ . Comme on suppose que la section à l'infini  $\sigma_\infty$  passe au dessus des autres sections de  $\tilde{F}$ , la configuration (III) ne se produit jamais. Les configurations (I) et (II) conduisent encore à des diagrammes de Morse qui contredisent la Proposition 1.3, voir la Figure 13.



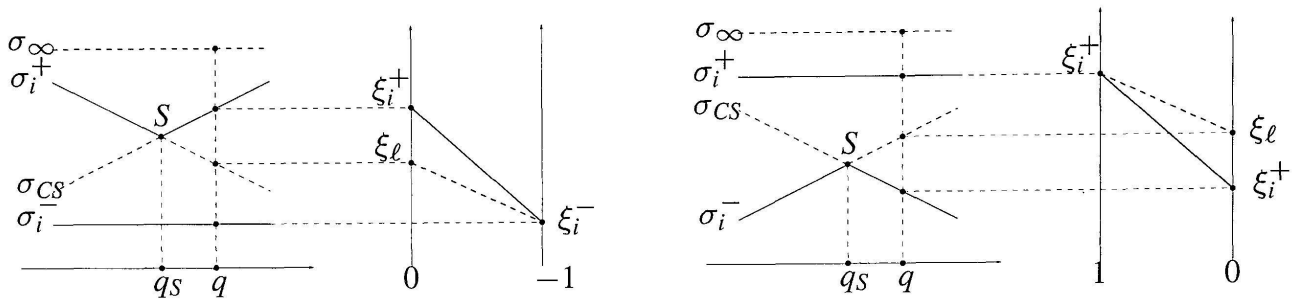


FIGURE 13

Diagrammes de Morse des configurations interdites (I) et (II)

On a ainsi démontré que notre décomposition est admissible. Comme la courbe legendrienne  $L$  dont  $F$  est la projection est isotope à  $\{(q, 0, 0) \in J^1\mathbf{R}\}$ ,  $\tilde{F}$  est isotope au front lèvres. Ce front a une seule décomposition admissible, donc par le théorème de Chekanov-Pushkar,  $\tilde{F}$  aussi admet une unique décomposition admissible.  $\square$

#### REMARQUES.

(1) Le Théorème 3.2 fournit un critère géométrique purement combinatoire qui permet de déterminer la solution de minimax d'un front d'onde (de type solution multivoque) de dimension 1: il suffit pour cela de trouver la seule décomposition admissible d'une compactification du front. La section associée à la section à l'infini est alors la section de Chaperon-Sikorav du front compactifié, ce qui détermine sans ambiguïté le graphe de la solution de minimax sur le front initial.

(2) Les axiomes qui définissent les décompositions admissibles d'un front d'onde ont été définis par Chekanov et Pushkar comme généralisation de la classification des points critiques d'une fonction de Morse en couple de fonctions critiques liés. En ce sens le Théorème 3.2 est le cas simple dont le théorème de Chekanov et Pushkar est la généralisation.

EXEMPLE 3.3. D'après l'exemple 3.1, le graphe de la solution de minimax associée au front montré à la Figure 14 est la section marquée par un trait plus épais.

#### 3.4 TRIANGLES ÉVANESCENTS

Dans cette section on donne une méthode qui permet de remplacer un front d'onde de type solution multivoque par un front plus simple du même type et ayant le même minimax. Cela permet de déterminer le minimax du front initial en itérant cette méthode un nombre fini de fois.

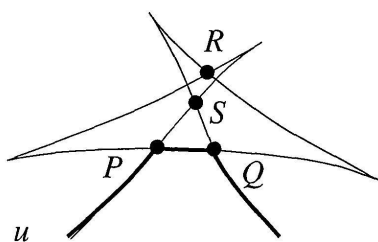


FIGURE 14

Soit  $\{F_r\}_{r \in [0,1]}$  une famille à un paramètre de fronts de type solution multivoque, projection d'une isotopie legendrienne  $\{L_r\}_{r \in [0,1]}$ .

DÉFINITION. On appelle *intersection triple* une perestroïka de  $\{F_r\}_{r \in [0,1]}$  de type "pyramide" (P), telle que le point triple soit l'intersection de trois branches de même indice.

REMARQUE. D'après la définition de décomposition admissible, la seule perestroïka de la famille  $\{F_r\}_{r \in [0,1]}$  qui change de manière non continue l'unique décomposition admissible du front initial est l'intersection triple (Figure 15).

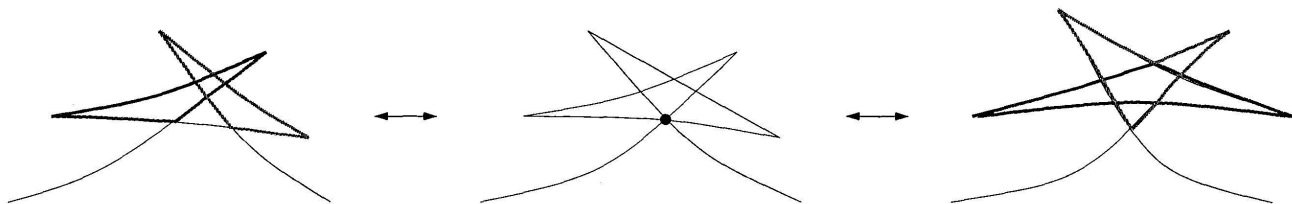


FIGURE 15

Changement de la décomposition admissible en passant par une intersection triple

Considérons maintenant le front  $F$  comme la trace d'une courbe  $\Gamma$  de  $\mathbf{R}^2 = J^0\mathbf{R}$ , paramétrée par  $s \in \mathbf{R}$ . Soit  $D = \Gamma(s_0) = \Gamma(s_1)$ , avec  $s_0 < s_1$ , un point double du front, intersection de deux branches de même indice. L'ensemble  $\Gamma([s_0, s_1])$  est un *triangle de sommet*  $D$  s'il a exactement deux cusps. On note alors  $\mathcal{T}(D)$  un tel triangle et, pour  $\epsilon > 0$  aussi petit que l'on veut,  $F - \mathcal{T}(D)$  un front de type solution multivoque qui coïncide avec l'ensemble  $\Gamma(\mathbf{R} \setminus [s_0, s_1])$  en dehors de la boule  $\mathcal{B}_D(\epsilon)$  de  $\mathbf{R}^2$  centrée en  $D$  de rayon  $\epsilon$ , et qui est le graphe d'une fonction lisse à l'intérieur de cette boule (cf. Figure 16).

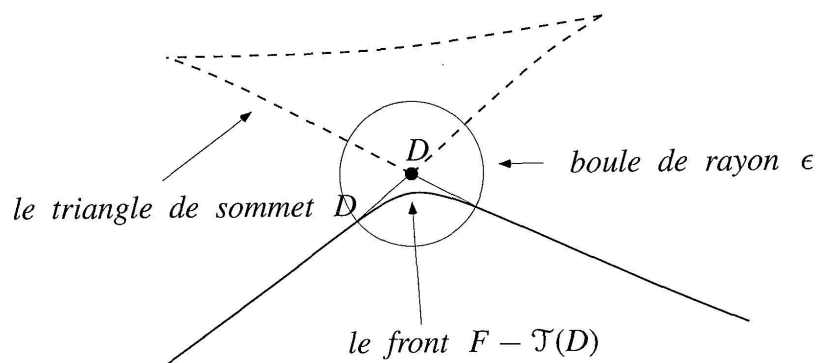


FIGURE 16

 Le front  $F - \mathcal{T}(D)$ 

**DÉFINITION.** Un triangle  $\mathcal{T}(D)$  de sommet  $D$  est *évanescent* s'il existe un chemin sans intersections triples entre  $F$  et  $F - \mathcal{T}(D)$  dans l'espace des solutions multivoques.

**EXEMPLE 3.4.** Considérons le front de l'exemple 3.3, montré à la Figure 14. Les triangles  $\mathcal{T}(P)$  et  $\mathcal{T}(Q)$  sont évanescents, tandis que le triangle  $\mathcal{T}(R)$  ne l'est pas (en effet pour l'effacer il faut forcément passer par une intersection triple au point  $S$ ).

Soit  $\mathcal{D} = \{X_0, \dots, X_n\}$  la décomposition admissible d'une compactification  $\tilde{F}$  d'un front de type solution multivoque  $F$ .

**THÉORÈME 3.5.** Si  $n \geq 1$ , au moins une des courbes  $X_i$ , avec  $i > 0$ , est un triangle évanescent.

*Démonstration.* Considérons le graphe (connexe) associé à la décomposition admissible de  $\tilde{F} = \pi_1(\tilde{L})$ , c'est-à-dire le graphe ayant un sommet pour chaque courbe  $X_i \in \mathcal{D}$  et une arête entre deux sommets pour chaque point de saut entre les courbes correspondantes. D'après le théorème de Chekanov-Pushkar, le nombre  $\#(\mathcal{D}) - \#(\mathcal{S})$  est invariant par isotopie legendrienne de  $\tilde{L}$ . Puisque  $\tilde{L}$  est isotope à un cercle dont la projection est le front lèvre, ce nombre est toujours 1 pour les fronts obtenus par compactification d'une solution multivoque. Or,  $\#(\mathcal{D})$  étant le nombre de sommets et  $\#(\mathcal{S})$  le nombre d'arêtes du graphe, on déduit que ce graphe est un arbre, dont les feuilles<sup>11)</sup> sont des triangles. Enfin, il est facile de voir que les triangles qui forment une courbe  $X_i \in \mathcal{D}$  ( $i > 0$ ) sont évanescents.  $\square$

<sup>11)</sup> Les feuilles d'un arbre sont les sommets dont est issue une seule arête.

De toute évidence on a le fait suivant.

PROPOSITION 3.6. *Si un triangle  $\mathcal{T}(D)$  est évanescent, alors les sections de minimax de  $F$  et de  $F - \mathcal{T}(D)$  coïncident en dehors de  $\mathcal{B}_D(\epsilon)$ .*

REMARQUE. La Proposition 3.6 donne une méthode pour simplifier récursivement le front d'onde dont on cherche le minimax: on recherche parmi les triangles du front ceux qui sont évanescents. Après un nombre fini de pas, on efface tous les cusps du front; la section restant coïncide, en dehors d'un nombre fini de boules arbitrairement petites, avec le minimax du front initial.

EXEMPLE 3.7. Considérons le front générique  $F$  de type solution multivoque montré à la Figure 17. A côté de chaque branche on a noté son indice. La solution de minimax est la section mise en évidence.

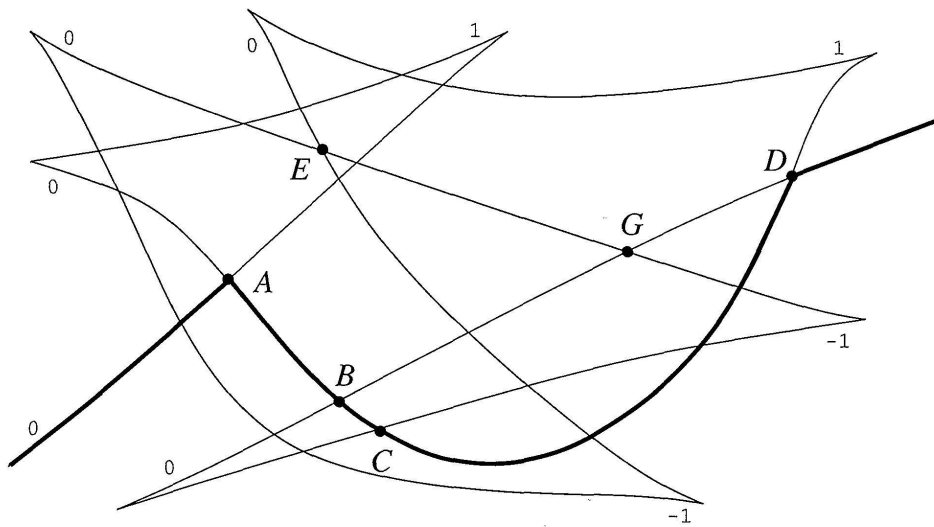


FIGURE 17

Pour montrer cela, on applique la Proposition 3.6: les triangles  $\mathcal{T}(G)$  et  $\mathcal{T}(E)$  sont évanescents (pour le premier c'est clair, pour le deuxième, il faut remarquer que la branche d'indice  $-1$  de ce triangle peut traverser les points  $A$ ,  $B$  et  $C$ ). Donc en dehors de deux boules aussi petites que l'on veut, centrées en  $G$  et en  $E$ , les sections de minimax de  $F$  et de  $F - \mathcal{T}(G) - \mathcal{T}(E)$  sont les mêmes (voir la Figure 18). Les triangles  $\mathcal{T}(A)$  et  $\mathcal{T}(D)$  du nouveau front sont de toute évidence évanescents, ce qui prouve que le minimax est bien celui annoncé.

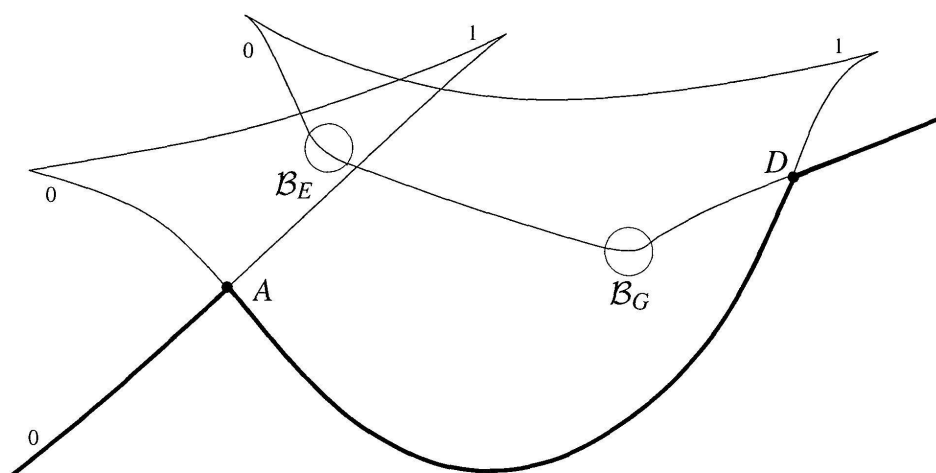


FIGURE 18

 Le front  $F - \mathcal{J}(G) - \mathcal{J}(E)$ 

## BIBLIOGRAPHIE

- [Ar1] ARNOLD, V.I. *Les méthodes mathématiques de la mécanique classique*. Mir, Moscou, 1976.
- [Ar2] ——— *Singularities of Caustics and Wave Fronts*. Kluwer, Dordrecht, 1990.
- [Ar3] ——— Invariants and perestroikas of wave fronts on the plane. *Proc. Steklov Inst. Math.* 209 (1995), 11–64.
- [Bar] BARANNIKOV, S.A. The framed Morse complex and its invariants. In: *Singularities and Bifurcations* (ed. V.I. Arnold). *Advances in Soviet Mathematics* 21, 93–115. Amer. Math. Society, 1994.
- [Car] CARDIN, F. The global finite structure of generic envelope loci for Hamilton-Jacobi equations. *J. Math. Phys.* (2) 43 (2002), 417–430.
- [Cer] CERF, J. La stratification naturelle des espaces de fonctions différentiables réelles et le théorème de la pseudo-isotopie. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* 39 (1970), 5–173.
- [Cha] CHAPERON, M. Lois de conservation et géométrie symplectique. *C.R. Acad. Sci. Paris* 312 série I (1991), 345–348.
- [Ch1] CHEKANOV, YU. Critical points of quasi-functions and generating families of legendrian manifolds. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.* (2) 30 (1996), 56–69; trad. angl. *Funct. Anal. Appl.* (2) 30 (1996), 118–128.
- [Ch2] ——— New invariants of legendrian knots. *European Congress of Mathematics, Barcelona, Vol. II. Progress in Mathematics* 202. Birkhäuser, 2000.
- [C-P] CHEKANOV, YU. and P. PUSHKAR. Arnold’s four-cusp conjecture and invariants of legendrian knots. (En préparation.)
- [DNF] DUBROVIN, B. A., A. T. FOMENKO et S. P. NOVIKOV. *Géométrie contemporaine. Méthodes et applications*. Mir, Moscou, 1985.
- [Jou] JOUKOVSKAÏA, T. Singularités de minimax et solutions faibles d’équations aux dérivées partielles. Thèse de Doctorat à l’Université de Paris VII, 1993.
- [Mil] MILNOR, J. *Morse Theory*. Princeton University Press, 1963.