Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 49 (2003)

Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ENDOMORPHISMES DES VARIÉTÉS HOMOGÈNES

Autor: Cantat, Serge

Kapitel: 4.2 Première application

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-66689

cette construction ne dépend pas de l'écriture de X sous la forme G/H. Les fibres sont isomorphes au quotient du groupe de Lie complexe $L = N/H^0$ par le sous-groupe discret cocompact $\Gamma = H/H^0$; ce sont donc des variétés parallélisables connexes. Nous renvoyons le lecteur à [9], [27], [15] et [2] pour les démonstrations de ces résultats.

VOCABULAIRE. Si X est une variété homogène compacte, les fibres et la base de la fibration de Tits de X seront appelées *fibres de Tits* et *base de Tits* de X.

4.2 PREMIÈRE APPLICATION

Soit Q la base et F la fibre de la fibration de Tits d'une variété homogène compacte X. Si f est un endomorphisme de X, il induit un endomorphisme $\bar{f}$ de la variété de drapeaux Q. Nous pouvons donc appliquer le théorème de Paranjape et Srinivas. S'il apparaît un facteur $Q = Q_0 \times Q_1$ sur lequel $\bar{f}$ induit un automorphisme $\bar{f}_0 \colon Q_0 \to Q_0$, la dynamique de f s'appauvrit considérablement: $\bar{f}_0$ est induite par une transformation linéaire isotope à l'identité.

Afin de démontrer le théorème 1.1, nous pourrons donc supposer que la base Q de la fibration de Tits est un produit d'espaces projectifs:

$$Q = \mathbf{P}^{m_1} \times \cdots \times \mathbf{P}^{m_k}, \quad k \in \mathbf{N}, \tag{11}$$

et que f agit diagonalement: $\bar{f} = (\bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_k)$ où $\bar{f}_j \in \mathrm{End}(\mathbf{P}^{m_j})$.

Soit q un point de Q et $\mathbf{P}_q^{m_j}$ l'espace projectif qui passe par q et est donné par le $j^{\text{ème}}$ facteur du produit (11). L'image réciproque de la fibration de Tits par l'injection $\mathbf{P}_q^{m_j} \to Q$ ne dépend pas de q car X est homogène. On obtient ainsi une variété homogène X_j dont la fibration de Tits a des fibres isomorphes à celles de X et une base isomorphe à $\mathbf{P}^{m_j}$. Puisque tout endomorphisme d'un espace projectif admet des points fixes, f induit un endomorphisme de X_j. Nous étudierons donc d'abord les endomorphismes des variétés homogènes dont la base de Tits est un espace projectif.

5. QUELQUES EXEMPLES

Présentons maintenant quelques exemples qui illustrent l'invariance de la fibration de Tits et donnent une petite idée des phénomènes qui peuvent apparaître lorsque la variété homogène n'est pas kählérienne.