

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 49 (2003)  
**Heft:** 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** ANALYSE DE FOURIER DES FRACTIONS CONTINUES À QUOTIENTS RESTREINTS  
**Autor:** Queffélec, Martine / Ramaré, Olivier  
**Kapitel:** 3. Dimension de Hausdorff  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-66692>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 02.04.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

d'où l'on tire

$$Q_{k+\ell}(x) = P_\ell(T^k x)Q_{k-1}(x) + Q_\ell(T^k x)Q_k(x)$$

d'où l'encadrement, puisque  $P_j \leq Q_j$  pour tout  $j$ ,

$$(6) \quad 1 \leq \frac{Q_{k+\ell}(x)}{Q_\ell(T^k x)Q_k(x)} \leq 2.$$

En nous souvenant que  $P_j(x)$  et  $Q_j(x)$  ne dépendent que des  $j$  premiers quotients partiels de  $x$ , nous avons montré

LEMME 2.3. *Si tous les  $a_i$  sont au moins égaux à 1, la différence*

$$\text{Log } Q_{k+\ell}(a_1, \dots, a_{k+\ell}) - \text{Log } Q_k(a_1, \dots, a_k) - \text{Log } Q_\ell(a_{k+1}, \dots, a_{k+\ell})$$

*est en valeur absolue inférieure à  $\text{Log } 2$ .*

### 3. DIMENSION DE HAUSDORFF

Les ensembles  $F(\mathcal{A})$  sont tous de mesure de Lebesgue nulle, mais de dimension de Hausdorff  $> 0$ . Good [4] a montré le résultat suivant :

THÉORÈME 3.1. *Soit  $\mathcal{A}$  un ensemble fini d'entiers  $\geq 0$ . Soit  $m \geq 1$ . Soit  $\alpha_{m,\mathcal{A}} > 0$  la solution en  $\alpha$  de*

$$\sum_{a_1 \in \mathcal{A}} \dots \sum_{a_m \in \mathcal{A}} Q_m(a_1, a_2, \dots, a_m)^{-2\alpha} = 1.$$

*Alors la limite de  $\alpha_{m,\mathcal{A}}$  quand  $m$  tend vers l'infini existe et vaut la dimension de Hausdorff de  $F(\mathcal{A})$  muni de la métrique induite par la distance sur  $\mathbf{R}$ .*

En fait, la preuve qui mène à ce résultat est très instructive. En notant

$$\Sigma_m(\alpha) = \sum_{a_1 \in \mathcal{A}} \dots \sum_{a_m \in \mathcal{A}} Q_m(a_1, a_2, \dots, a_m)^{-2\alpha}$$

nous constatons en utilisant (6) que  $\Sigma_{m+\ell}(\alpha) \leq \Sigma_m(\alpha)\Sigma_\ell(\alpha)$ . Par ailleurs  $\Sigma_m(\alpha)$  décroît en  $\alpha$  et par conséquent, si  $\Sigma_m(\alpha_1) \geq 1$ , alors  $\alpha_{m,\mathcal{A}} \geq \alpha_1$ . Or

$$\Sigma_m(\alpha) \geq N^{-2m\alpha} F_m^{-2\alpha} |\mathcal{A}|^m$$

où  $F_m$  est le  $m$ -ième nombre de Fibonacci. Nous souhaitons donc avoir

$$-2(\text{Log } N + \frac{1}{m} \text{Log } F_m)\alpha + \text{Log } |\mathcal{A}| \geq 0$$

ce qui nous garantit que

$$\dim_{\text{h}} F(\mathcal{A}) \geq \frac{\text{Log } |\mathcal{A}|}{2(\text{Log } N + \text{Log } \frac{1+\sqrt{5}}{2})}.$$

Cette minoration nous montre en particulier que cette dimension est strictement positive.

Notons dans l'autre sens que  $d = \dim_{\text{h}} F(\mathcal{A}) \leq 1/2$  pour certains alphabets  $\mathcal{A}$ , par exemple  $\mathcal{A} = \{1, 4\}$ . Cela résulte de la remarque suivante: s'il existe des  $m$  arbitrairement grands pour lesquels  $\Sigma_m(\alpha) < 1$ , alors  $\alpha \geq d$ ; dans le cas contraire, en effet, puisque  $\lim_m \alpha_m = d$ ,  $\alpha < \alpha_m$  et  $\Sigma_m(\alpha) \geq \Sigma_m(\alpha_m) = 1$  pour  $m$  assez grand. Par ailleurs dès que  $\Sigma_m(\alpha) < 1$  pour un  $m$  fixé, nous avons  $\Sigma_{km}(\alpha) < 1$  pour tout  $k \geq 1$ . En prenant  $m = 6$  dans l'exemple précédent, nous obtenons alors  $d \leq 0.492$ .

#### 4. UNE MESURE SPÉCIALE

Dans la construction de la mesure qui nous intéresse, nous allons éliminer du support les points pour lesquels  $\text{Log } Q_m$  est trop loin de sa valeur moyenne, auquel cas les deux structures considérées sur  $F(\mathcal{A})$  seront vraiment similaires.

Soit  $\delta < \dim_{\text{h}} F(\mathcal{A})$ . Le théorème 3.1 et la définition de la dimension de Hausdorff nous assurent que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \Sigma_m(\delta) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{a_1 \in \mathcal{A}} \cdots \sum_{a_m \in \mathcal{A}} Q_m(a_1, a_2, \dots, a_m)^{-2\delta} = +\infty;$$

nous pouvons trouver  $m$  assez grand pour que  $\Sigma_m(\delta) \geq 8$ . Fixons provisoirement  $m$  ainsi et regardons  $F(\mathcal{A})$  comme formé à partir des blocs  $\mathcal{A}^m$ .

Nous munissons le bloc  $\mathcal{A}^m$  de la mesure de probabilité discrète  $\nu_m = \nu_{m,\delta}$  définie par

$$\nu_m(\{a_1, \dots, a_m\}) = Q_m(a_1, a_2, \dots, a_m)^{-2\delta} / \Sigma_m(\delta).$$

Soit alors  $m\sigma_m(\delta)$  la moyenne de  $\text{Log } Q_m(a_1, a_2, \dots, a_m)$  pour cette mesure. Comme

$$(7) \quad \text{Log } Q_m(a_1, a_2, \dots, a_m) \geq \text{Log } Q_m(1, 1, \dots, 1) \geq (m-1) \text{Log } \sqrt{2}$$

nous avons  $m\sigma_m(\delta) \geq (m-1) \text{Log } \sqrt{2}$ .