

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 50 (2004)  
**Heft:** 1-2: L'enseignement mathématique

**Artikel:** Systèmes d'équations aux dérivées partielles linéaires à coefficients constants associés aux idéaux de colongueur finie  
**Autor:** D'Almeida, Jean  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-2639>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 09.03.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

SYSTÈMES D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES  
LINÉAIRES À COEFFICIENTS CONSTANTS  
ASSOCIÉS AUX IDÉAUX DE COLONGUEUR FINIE

par Jean D'ALMEIDA

RÉSUMÉ. On étend aux équations aux dérivées partielles linéaires à coefficients constants certains résultats classiques relatifs aux équations différentielles linéaires à coefficients constants.

1. INTRODUCTION

La théorie des équations différentielles linéaires à coefficients constants est bien connue. On considère dans un premier temps l'équation homogène. Ses solutions sont obtenues à partir des racines du polynôme caractéristique. La forme des solutions dépend de la multiplicité des racines. La dimension de l'espace des solutions est égale au degré du polynôme caractéristique. Il faut noter qu'on recherche des solutions ayant une certaine forme. Pour montrer qu'on obtient ainsi toutes les solutions il faut utiliser le théorème d'unicité pour les équations différentielles. Il faut ensuite chercher une solution particulière de l'équation complète.

On se propose d'établir des résultats analogues pour les équations aux dérivées partielles linéaires à coefficients constants.

On va considérer les idéaux  $I$  de l'anneau de polynômes  $\mathbf{C}[x_1, \dots, x_n]$  tels que le quotient  $\mathbf{C}[x_1, \dots, x_n]/I$  soit un  $\mathbf{C}$ -espace vectoriel de dimension finie. Ces idéaux correspondent aux sous-schémas de dimension zéro de l'espace affine  $\mathbf{C}^n$ . Si  $(P_1, \dots, P_k)$  désigne un système de générateurs de  $I$ , on est amené à considérer le système  $P_i(\frac{\partial}{\partial x})f = g_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ), où les  $g_i$  sont des fonctions connues,  $f$  est la fonction inconnue,  $P_i(\frac{\partial}{\partial x})$  l'opérateur différentiel obtenu en remplaçant dans l'expression du polynôme la variable  $x_j$  par l'opérateur  $\frac{\partial}{\partial x_j}$  pour  $j = 1, \dots, n$ .

Si  $n = 1$ ,  $\mathbf{C}[x_1]$  est principal et  $I$  est engendré par un polynôme  $P$ , la dimension de  $\mathbf{C}[x_1]/(P)$  est égale au degré de  $P$  et on a une équation différentielle linéaire à coefficients constants.

Comme on peut s'y attendre, la situation est plus complexe lorsqu'on a plusieurs variables. Ceci est lié au fait que le schéma de Hilbert paramétrant les sous-schémas de  $\mathbf{C}^n$  de dimension zéro et de longueur  $t$  est plus compliqué. Pour  $n = 1$  c'est tout simplement la puissance symétrique  $t$ -ième, pour  $n = 2$  le schéma de Hilbert est lisse et est une résolution des singularités de la puissance symétrique via le morphisme de Hilbert-Chow. Ce n'est plus vrai quand  $n \geq 3$ . On montrera que les solutions du système homogène  $P_i(\frac{\partial}{\partial x})f = 0$  ( $i = 1, \dots, k$ ) sont des combinaisons linéaires de solutions de la forme « exponentielle de forme linéaire » ou « polynôme multiplié par exponentielle de forme linéaire ». Il faut ensuite déterminer une solution particulière du système  $P_i(\frac{\partial}{\partial x})f = g_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ). Les fonctions  $g_i$  doivent vérifier certaines conditions pour qu'une telle solution existe. Si les fonctions  $g_i$  ont une forme « classique » on peut comme dans le cas des équations différentielles utiliser la méthode des coefficients indéterminés. On traite enfin le cas où il y a plusieurs fonctions inconnues. Si les fonctions  $g_i$  sont régulières on montre que les fonctions inconnues le sont aussi.

La philosophie de ce texte et la suivante: Les équations différentielles linéaires à coefficients constants correspondent aux sous-schémas de dimension zéro de  $\mathbf{C}$ . Pour avoir des résultats analogues en plusieurs variables il est donc naturel de considérer les systèmes d'équations aux dérivées partielles correspondant à des sous-schémas de dimension zéro de  $\mathbf{C}^n$ .

Je voudrais remercier Thierry Vust et le rapporteur pour leurs suggestions.

## 2. RAPPELS

Soit  $U$  un ouvert convexe de  $\mathbf{R}^n$  (resp.  $\mathbf{C}^n$ ) et  $P_i(\frac{\partial}{\partial x})$  ( $i = 1, \dots, k$ ) une famille d'opérateurs différentiels linéaires à coefficients constants, appelés aussi polynômes différentiels, où les  $P_i$  sont dans  $\mathbf{C}[x_1, \dots, x_n]$ . On s'intéresse au système  $P_i(\frac{\partial}{\partial x})f = g_i$ ,  $1 \leq i \leq k$  avec  $g_i \in C^\infty(U)$  (resp. holomorphe dans  $U$ ). On cherche une solution dans  $C^\infty(U)$  (resp. holomorphe dans  $U$ ). On a une condition nécessaire et suffisante pour que le système ait une solution: pour tous  $Q_i \in \mathbf{C}[x_1, \dots, x_n]$  tels que  $\sum Q_i P_i = 0$  alors  $\sum Q_i(\frac{\partial}{\partial x})g_i = 0$ . On a aussi un théorème d'approximation pour les solutions du système homogène  $P_i(\frac{\partial}{\partial x})f = 0$  ( $i = 1, \dots, k$ ). Toute solution dans  $C^\infty(U)$  (resp. holomorphe dans  $U$ ) du système homogène est la limite

dans l'espace des fonctions  $C^\infty$  sur  $U$  (resp. holomorphe dans  $U$ ) de combinaisons linéaires finies de solutions du type « polynôme-exponentielle » c'est-à-dire  $R \exp(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n)$  où  $R \in \mathbf{C}[x_1, \dots, x_n]$ , les  $\alpha_i$  étant des complexes. Ces résultats sont dus à Ehrenpreis-Malgrange-Palamodov ([H], [P] Ch.VI, VII). Les démonstrations utilisent des méthodes d'analyse fonctionnelle, des estimations  $L^2$ , des transformations de Fourier... Les résultats peuvent s'étendre si  $U$  est un ouvert de  $\mathbf{R}^n$  aux espaces de distributions dans lesquels  $C^\infty(U)$  se plonge continûment avec une image dense comme  $D'(U)$  = espace des distributions,  $H$  = espace des distributions tempérées,  $L^p_{\text{loc}}(U)$  = fonctions complexes mesurables localement dans  $L^p$  (voir [T]).

### 3. SYSTÈME HOMOGENÈME

**THÉORÈME 1.** *On considère le système homogène  $P_i(\frac{\partial}{\partial x})f = 0$  ( $i = 1, \dots, k$ ). On note  $I$  l'idéal de  $\mathbf{C}[x_1, \dots, x_n]$  engendré par  $P_1, \dots, P_k$ . On suppose que la dimension  $\dim_{\mathbf{C}} \mathbf{C}[x_1, \dots, x_n]/I = t$  est finie. Alors l'ensemble des solutions  $C^\infty$  (resp. holomorphes) du système homogène est un espace vectoriel de dimension égale à  $t$ . Toutes ces solutions sont des combinaisons linéaires de solutions de type polynôme-exponentielle.*

*Démonstration.* Mentionnons d'abord l'analogie de la formule de Leibniz pour les opérateurs différentiels linéaires à coefficients constants. Si  $P \in \mathbf{C}[x_1, \dots, x_n]$  et  $p \in \mathbf{N}^n$  on pose

$$P^{(p)} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{p_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{p_n} P \quad \text{pour } p = (p_1, \dots, p_n).$$

Pour  $u, v$  indéfiniment différentiables on a

$$(*) \quad P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)(uv) = \sum_{p \in \mathbf{N}^n} \left(\frac{1}{p!}\right) \left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^p u\right] P^{(p)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)v.$$

En vertu de la linéarité par rapport à  $P$  il suffit d'établir la formule (\*) pour un monôme. On s'intéresse aux solutions de  $P(\frac{\partial}{\partial x})f = 0$  de la forme  $R(x) \exp \langle \alpha, x \rangle = R(x) \exp(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n)$  où  $R$  est un polynôme. La formule de Leibniz généralisée montre qu'il est nécessaire que  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  appartienne à l'hypersurface d'équation  $P = 0$ .

Si  $P(\alpha) = 0$  alors  $\exp \langle \alpha, x \rangle$  est une solution de  $P(\frac{\partial}{\partial x})f = 0$ . L'idéal  $I$  définit un sous-schéma de dimension zéro et de longueur  $t$  de  $\mathbf{C}^n$ , c'est-à-dire  $t$  points comptés avec des multiplicités convenables. De façon

précise l'anneau artinien  $\mathbf{C}[x_1, \dots, x_n]/I$  s'écrit comme produit direct d'un nombre fini d'anneaux locaux artiniens. Si  $m_1, \dots, m_r$  sont les points fermés de  $\mathbf{C}^n$  où s'annulent tous les éléments de  $I$ , on a un isomorphisme  $\mathbf{C}[x_1, \dots, x_n]/I \simeq \prod_{\ell=1}^r \mathcal{O}_\ell/I\mathcal{O}_\ell$  où  $\mathcal{O}_\ell$  désigne l'anneau local de  $\mathbf{C}^n$  en  $m_\ell$ . La multiplicité en  $m_\ell$  du sous-schéma défini par  $I$  est  $\mu_\ell = \dim_{\mathbf{C}} \frac{\mathcal{O}_\ell}{I\mathcal{O}_\ell}$  et on a  $\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_r = t$ . Pour chaque  $\ell$  on pose  $m_\ell = (m_{\ell_1}, \dots, m_{\ell_n})$  et on s'intéresse aux solutions du système homogène de la forme  $R \exp \langle m_\ell, x \rangle$ . Grâce à la formule de Leibniz généralisée on montre que ceci est un espace vectoriel de dimension  $\mu_\ell$ . Il s'agit en effet de résoudre un système d'équations linéaires homogènes en les coefficients du polynôme  $R$ . On choisit une base  $R_{\ell_1}, \dots, R_{\ell_{\mu_\ell}}$  de cet espace.

Les solutions du système homogène  $P_i(\frac{\partial}{\partial x})f = 0$  qui sont combinaisons linéaires de polynômes-exponentielles forment donc un espace vectoriel de dimension  $t$  ayant pour base  $(R_{\ell_1} \exp \langle m_\ell, x \rangle, \dots, R_{\ell_{\mu_\ell}} \exp \langle m_\ell, x \rangle)$  pour  $\ell = 1, \dots, r$ . Pour montrer qu'on a ainsi toutes les solutions  $C^\infty$  (resp. holomorphes) on utilise le théorème d'approximation mentionné dans les rappels qui dit qu'une telle solution est la limite dans l'espace correspondant de combinaisons linéaires finies de solutions du type polynômes-exponentielles. L'espace des fonctions  $C^\infty$  sur  $U$  (resp. holomorphes dans  $U$ ) étant séparé, tout sous-espace vectoriel de dimension finie est fermé. Les solutions  $C^\infty$  (resp. holomorphes) sont donc toutes des combinaisons linéaires de solutions du type polynôme-exponentielle.

**COROLLAIRE 1.** *On suppose que  $I \subset (x_1, \dots, x_n)$  et que l'anneau  $\mathbf{C}[x_1, \dots, x_n]/I$  est local et Gorenstein et est un  $\mathbf{C}$ -espace vectoriel de dimension finie. Alors il existe une solution  $f \in \mathbf{C}[x_1, \dots, x_n]$  telle que toute autre solution  $C^\infty$  (resp. holomorphe) est obtenue en appliquant à  $f$  un opérateur différentiel linéaire à coefficients constants.*

*Démonstration.* Soit  $(A, \mathcal{M})$  un anneau local artinien. On dira que  $A$  est Gorenstein si l'annulateur de  $\mathcal{M}$  est de dimension 1 comme  $(A/\mathcal{M})$ -espace vectoriel. Rappelons la méthode des systèmes inverses de Macaulay ([E], p. 526). Soient  $S = \mathbf{C}[x_1, \dots, x_n]$  et  $T = \mathbf{C}[x_1^{-1}, \dots, x_n^{-1}] \subset \mathbf{C}(x_1, \dots, x_n)$  l'anneau des polynômes en les inverses des  $x_i$ . On munit  $T$  d'une structure de  $S$ -module de la manière suivante: si  $m \in S$  et  $n \in T$  sont des monômes alors  $m \cdot n$  est le monôme  $mn \in \mathbf{C}(x_1, \dots, x_n)$  s'il est dans  $T$  et 0 sinon. On a alors une correspondance bijective entre les sous- $S$ -modules de type fini  $M \subset T$  et les idéaux  $I \subset S$  tels que  $I \subset (x_1, \dots, x_n)$  et  $S/I$  est local de dimension zéro.

La bijection est donnée par

$$\begin{aligned} M &\rightarrow (0 :_S M) = \text{annulateur de } M \text{ dans } S \\ I &\rightarrow (0 :_T I) = \text{sous-module de } T \text{ annulé par } I \end{aligned}$$

et on a  $M = \omega_{S/I}$  = module canonique de l'anneau  $S/I$ . Les idéaux  $I \subset (x_1, \dots, x_n)$  tels que  $S/I$  est local de dimension zéro et Gorenstein sont exactement ceux de la forme  $I = (0 :_S f)$  où  $f$  est un élément non nul de  $T$ .

D'après [E], p.547 on a une application surprenante de la théorie des systèmes inverses aux polynômes différentiels.

Avec nos hypothèses cela signifie qu'il existe une solution polynomiale  $f$  du système homogène telle que toute autre solution polynomiale s'obtienne en appliquant à  $f$  un polynôme différentiel.

Le théorème nous permet d'affirmer qu'on a ainsi obtenu toutes les solutions  $C^\infty$  (resp. holomorphes). En effet, l'anneau étant local, le sous-schéma défini par  $I$  a pour support l'origine. Toute solution de type polynôme-exponentielle est en fait polynomiale.

REMARQUE. L'hypothèse Gorenstein est nécessaire: prendre par exemple  $n = 2$  et  $I = (x_1^2, x_1x_2, x_2^2)$ . Rappelons en outre quelques propriétés des anneaux de Gorenstein: Si  $A = R/I$  avec  $R$  local régulier et  $I$  engendré par une suite régulière alors  $A$  est Gorenstein. Si  $\text{codim} I = 1$ , alors  $A$  Gorenstein  $\iff A$  Cohen Macaulay  $\iff I$  principal. Si  $\text{codim} = 2$ , alors  $A$  Gorenstein  $\iff I$  est engendré par une suite régulière de longueur deux. Si  $\text{codim} I = 3$  il n'est pas vrai que  $A$  Gorenstein est équivalent à  $I$  engendré par une suite régulière de longueur 3. Ici la codimension (ou la hauteur) de  $I$  est la dimension de Krull du localisé  $R_I$  si  $I$  est premier. Sinon c'est le minimum des codimensions des idéaux premiers contenant  $I$ .

#### 4. SYSTÈME AVEC SECOND MEMBRE

On s'intéresse maintenant au système  $P_i(\frac{\partial}{\partial x})f = g_i$  pour  $i = 1, \dots, k$ . D'après [P] Ch. VI, VII, la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une solution est  $\sum Q_i P_i = 0 \implies \sum Q_i (\frac{\partial}{\partial x}) g_i = 0$  si les  $Q_i \in \mathbf{C}[x_1, \dots, x_n]$ . Les relations  $\sum Q_i (\frac{\partial}{\partial x}) g_i = 0$  sont appelées relations de compatibilité. Dans le cas où  $n = 1$  il n'y a pas de condition. Si  $\dim_{\mathbf{C}} \mathbf{C}[x_1, \dots, x_n]/I$  est finie et si les relations de compatibilité sont satisfaites l'ensemble des solutions est un espace affine de dimension  $t$ .

Lorsque  $(P_1, \dots, P_k)$  est une suite régulière les relations de compatibilité prennent une forme plus agréable. Dans un anneau  $A$  on dit qu'une suite d'éléments  $(f_1, \dots, f_r)$  est régulière si  $f_i$  n'est pas un diviseur de zéro dans  $A/(f_1, \dots, f_{i-1})$ . Rappelons la construction du complexe de Koszul  $K(f_1, \dots, f_r)$ . On note  $K_1$  le  $A$ -module libre de rang  $r$  et de base  $e_1, \dots, e_r$ . Pour  $p = 0, \dots, r$  on pose  $K_p = \Lambda^p K_1$  (puissance extérieure) et on définit  $d: K_p \rightarrow K_{p-1}$  par

$$d(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p}) = \sum (-1)^{j-1} f_{i_j} e_{i_1} \wedge \dots \wedge \check{e}_{i_j} \wedge \dots \wedge e_{i_p}.$$

On a  $d^2 = 0$  et ceci définit un complexe. Si la suite  $(f_1, \dots, f_r)$  est régulière, les groupes d'homologie du complexe vérifient  $H_j(K(f_1, \dots, f_r)) = 0$  pour  $j > 0$  et  $H_0(K(f_1, \dots, f_r)) = A/(f_1, \dots, f_r)$ . Dans notre situation si  $(P_1, \dots, P_k)$  est une suite régulière de  $\mathbf{C}[x_1, \dots, x_n]$  la condition  $\sum Q_i P_i = 0$  implique qu'il existe des polynômes  $\Pi_{ij}$  tels que  $Q_i = \sum \Pi_{ij} P_j$  avec  $\Pi_{ij} = -\Pi_{ji}$ .

La relation  $\sum Q_i (\frac{\partial}{\partial x}) g_i = 0$  est conséquence des relations  $P_i (\frac{\partial}{\partial x}) g_j = P_j (\frac{\partial}{\partial x}) g_i$ . On se contentera de vérifier ces  $n(n-1)/2$  relations.

Il faut ensuite s'intéresser à la recherche d'une solution particulière. Si les  $g_i$  sont des polynômes vérifiant les relations de compatibilité on peut trouver une solution particulière polynomiale en utilisant la méthode des coefficients indéterminés. On cherche un polynôme de degré au plus égal à  $\max \deg P_i + \max \deg g_i$ . On obtient un système linéaire en les coefficients du polynôme recherché. Ce système admet une solution grâce aux conditions de compatibilité.

On traite de façon analogue les seconds membres de type  $R(x) \exp \langle \alpha, x \rangle$ . Il faut distinguer selon que  $\alpha$  est ou non dans le sous-schéma défini par  $I$ . Comme pour les équations différentielles il faut augmenter le degré du polynôme en tenant compte de la multiplicité lorsque  $\alpha$  appartient au sous-schéma défini par  $I$ .

REMARQUE. Si les  $P_i$  n'ont pas de zéro commun dans  $\mathbf{C}^n$ , le théorème des zéros de Hilbert dit qu'on peut écrire  $1 = \sum A_i P_i$  où les  $A_i$  sont des polynômes. On est dans le cas où  $\dim_{\mathbf{C}} \mathbf{C}[x_1, \dots, x_n]/I = 0$ . Si les relations de compatibilité sont satisfaites l'ensemble des solutions de  $P_i (\frac{\partial}{\partial x}) f = g_i$  est un espace affine de dimension zéro. Il y a donc une solution unique. C'est tout simplement

$$f = \sum A_i (\frac{\partial}{\partial x}) g_i.$$

5. CAS DE PLUSIEURS FONCTIONS INCONNUES

On s'intéresse maintenant à un système avec plusieurs fonctions inconnues. On part d'une matrice  $(P_{ij})_{i,j}$  avec  $P_{ij} \in \mathbf{C}[x_1, \dots, x_n]$  et on considère le système  $\sum_{j=1}^h P_{ij}(\frac{\partial}{\partial x})f_j = g_i$  pour  $i = 1, \dots, k$ .

On suppose que les  $g_i \in C^\infty(U)$  (resp. holomorphe sur  $U$ ) et sont données. On cherche les fonctions  $f_j$ .

THÉORÈME 2. On considère le système homogène  $\sum_{j=1}^h P_{ij}(\frac{\partial}{\partial x})f_j = 0$  pour  $i = 1, \dots, k$ . On note  $I$  l'idéal engendré par les mineurs maximaux de la matrice  $(P_{ij})_{i,j}$ .

On suppose que la dimension  $\dim_{\mathbf{C}} \mathbf{C}[x_1, \dots, x_n]/I = t$  est finie. Alors l'ensemble des solutions  $C^\infty$  (resp. holomorphes) du système est un  $\mathbf{C}$ -espace vectoriel de dimension finie égale à  $t$ .

Toutes les solutions sont combinaisons linéaires de solutions du type exponentielle de forme linéaire multiplié par vecteur colonne de polynômes.

Démonstration. Elle est analogue à celle du paragraphe 3 avec les adaptations évidentes. Le théorème d'approximation s'étend au cas de plusieurs fonctions inconnues. Pour chaque point fermé  $m = (m_1, \dots, m_n)$  du sous-schéma défini par  $I$  on s'intéresse aux solutions du système homogène de la forme  $\exp(m_1x_1 + \dots + m_nx_n)\vec{V}$  où le vecteur colonne  $\vec{V}$  a  $h$  composantes polynomiales. Si  $\mu$  est la multiplicité du point  $m$  comme point du schéma défini par  $I$  on trouvera  $\mu$  vecteurs  $\vec{V}$  linéairement indépendants convenables.

REMARQUE 1. Si l'on s'intéresse aux solutions du système avec second membre  $\sum_{j=1}^h P_{ij}(\frac{\partial}{\partial x})f_j = g_i$  la condition d'Ehrenpreis-Malgrange-Palamodov s'écrit  $\sum_{i=1}^k Q_i P_{ij} = 0$  ( $j = 1, \dots, h$ )  $\implies \sum Q_i(\frac{\partial}{\partial x})g_i = 0$ . Lorsque le sous-schéma défini par  $I$  a la bonne codimension dans  $\mathbf{C}^n$  c'est-à-dire  $k - h + 1$ , cette condition peut être remplacée par la suivante: soit

$$D(i_1, \dots, i_h) = \begin{vmatrix} P_{i_1 1} & & P_{i_1 h} \\ & \ddots & \\ P_{i_h 1} & & P_{i_h h} \end{vmatrix} \text{ un mineur de la matrice } (P_{ij}). \text{ Pour chaque}$$

$i_{h+1} \in \{1, \dots, k\} - \{i_1, \dots, i_h\}$  on pose

$$\Delta(i_1, \dots, i_h, i_{h+1}) = \begin{vmatrix} P_{i_1 1} & & P_{i_1 h} & g_{i_1} \\ & \ddots & & \\ P_{i_h 1} & & P_{i_h h} & g_{i_h} \\ P_{i_{h+1} 1} & \dots & P_{i_{h+1} h} & g_{i_{h+1}} \end{vmatrix}.$$



La condition est que tous les  $\Delta(i_1, \dots, i_h, i_{h+1})$  soient nuls chaque fois que  $D(i_1, \dots, i_h)$  est non nul. Cette condition traduit l'exactitude du complexe d'Eagon-Northcott (généralisation du complexe de Koszul) que donne une résolution de  $\mathbf{C}[x_1, \dots, x_n]/I$ .

REMARQUE 2. Si le sous-schéma défini par  $I$  est vide et que les relations de compatibilité sont vérifiées le système a une solution unique que l'on obtient par le théorème des zéros de Hilbert et les formules de Cramer. Par exemple si le système s'écrit

$$\begin{pmatrix} A & D \\ B & E \\ C & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix},$$

on a  $1 = U(AE - BD) + V(AF - DC) + W(BF - CE)$ .

L'unique solution est

$$\begin{aligned} f_1 &= U(Eg_1 - Dg_2) + V(Eg_2 - Dg_3) + W(Eg_3 - Dg_1) \\ f_2 &= U(Ag_2 - Bg_1) + V(Ag_3 - Cg_1) + W(Bg_3 - Cg_2). \end{aligned}$$

THÉORÈME 3. On considère le système  $\sum_{j=1}^h P_{ij}(\frac{\partial}{\partial x})f_j = g_i$  pour  $i = 1, \dots, k$ . On note  $I$  l'idéal engendré par les mineurs maximaux de la matrice  $(P_{ij})$ . On suppose que  $\dim_{\mathbf{C}} \mathbf{C}[x_1, \dots, x_n]/I = t$  est finie et que les  $g_i$  sont analytiques sur un ouvert  $U$  de  $\mathbf{R}^n$  et vérifient les conditions de compatibilité.

Alors les solutions sont analytiques et forment un espace affine de dimension  $t$ .

*Démonstration 1.* Il suffit de démontrer que l'on a une solution analytique. Pour avoir les autres il faudra ajouter les solutions du système homogène qui sont des combinaisons linéaires de polynômes-exponentielles d'après le théorème du paragraphe 3.

On utilise pour cela le résultat suivant de Goldschmidt [G]: soit  $X$  une variété analytique réelle et  $E, F$  deux fibrés vectoriels analytiques sur  $X$ .

Soit  $D: E \rightarrow F$  un opérateur analytique réel formellement intégrable. Alors il existe un fibré vectoriel analytique  $G_1$  et un opérateur analytique  $D_1: F \rightarrow G_1$  tel que le complexe  $E \xrightarrow{D} F \xrightarrow{D_1} G_1$  soit exact. Cette exactitude exprime l'existence d'une solution.

On vérifie que l'intégrabilité formelle est équivalente aux relations de compatibilité lorsque l'opérateur est linéaire à coefficients constants.

*Démonstration 2.* On dit qu'un système  $\sum P_{ij}(\frac{\partial}{\partial x})f_j = g_i$  est elliptique si le sous-schéma défini par les mineurs maximaux de la matrice  $(P_{ij})$  n'a pas de point réel à l'infini. On peut vérifier que cette condition est équivalente à la suivante: toute solution  $f$  est analytique sur l'ouvert  $U$  de  $\mathbf{R}^n$  si  $g$  est analytique sur  $U$  [M]. Dans notre cas, l'ellipticité résulte du fait que le sous-schéma considéré est fini. Il est donc égal à sa clôture projective. Comme les conditions de compatibilité ont lieu, le système admet des solutions. Elles sont toutes analytiques.

REMARQUE. On dit que le système est hypoelliptique si toutes les solutions distributions sont  $C^\infty$  quand les  $g_i$  sont  $C^\infty$ . Sous l'hypothèse  $\dim_{\mathbf{C}} \mathbf{C}[x_1, \dots, x_n]/I$  finie, toutes les solutions du système homogène sont  $C^\infty$  d'après Ehrenpreis-Malgrange-Palamodov. Toutes les solutions sont  $C^\infty$ . On a l'hypoellipticité. Si  $h = k = 1$  on a une équation différentielle linéaire à coefficients constants et il est bien connu que les résultats du théorème et de la remarque sont valables dans ce cas.

## BIBLIOGRAPHIE

- [E] EISENBUD, D. *Commutative Algebra. With a View Toward Algebraic Geometry.* GTM 150. Springer-Verlag, 1995.
- [G] GOLDSCHMIDT, H. Existence theorems for analytic linear partial differential equations. *Ann. of Math. (2)* 86 (1967), 246–270.
- [H] HÖRMANDER, L. *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables.* Van Nostrand, 1966.
- [M] MATSUURA, S. On general systems of partial differential operators with constant coefficients. *J. Math. Soc. Japan* 13 (1961), 94–103.
- [P] PALAMODOV, V.P. *Linear Differential Operators with Constant Coefficients.* Springer-Verlag, 1970.
- [T] TRÈVES, F. *Linear Partial Differential Equations with Constant Coefficients.* Gordon and Breach Science Publishers, 1966.

(Reçu le 5 mai 2003)

Jean D'Almeida

Université des Sciences et Technologies de Lille  
 UFR de Mathématiques  
 UMR AGAT CNRS  
 Cité Scientifique  
 F-59655 Villeneuve d'Ascq Cedex  
 France

Leere Seite

Blank page

Page vide