

Zeitschrift: Bulletin de la Société Fribourgeoise des Sciences Naturelles = Bulletin der Naturforschenden Gesellschaft Freiburg

Herausgeber: Société Fribourgeoise des Sciences Naturelles

Band: 57 (1967-1968)

Heft: 3: Rapport annuel = Jahresbericht

Artikel: Einige merkwürdige Eigenschaften der Kugeloberfläche : oder wie ein Igel zu kämmen ist

Autor: Holmann, Harald

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-308435>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 01.04.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Vorträge und Besichtigungen während des Vereinsjahres 1967/68

Einige merkwürdige Eigenschaften der Kugeloberfläche (oder wie ein Igel zu kämmen ist)

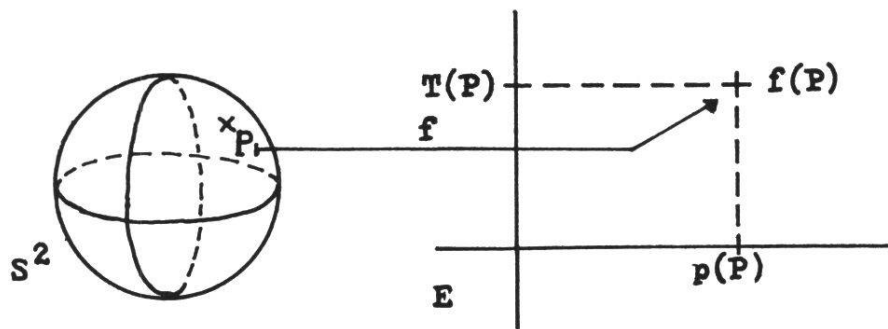
VON HARALD HOLMANN

Mathematisches Institut der Universität Freiburg i. Ue.

Als ich vor einiger Zeit den Titel dieses Vortrages angeben mußte, versah ich ihn mit einem Untertitel, der meine Absichten ein wenig illustrieren sollte. Damals ahnte ich noch nicht, daß schon ein Obertitel vorgegeben war, der dem Untertitel in gewisser Weise widerspricht. Die Vorträge dieses Wintersemesters stehen nämlich unter dem Motto: «Theorie und Praxis in Mathematik, Physik, etc.» Ich aber hatte nicht vor, etwa über die Bedeutung der Mathematik für Physik, Biologie, Technik oder über ihr Eindringen in alle möglichen anderen Bereiche des Lebens zu sprechen; ich hatte gedacht, ich dürfe Ihnen einfach etwas Schönes aus der Mathematik erzählen. Vielleicht hatte ich dabei jenen Vorschlag im Sinn, den G. B. Shaw machte, als er gefragt wurde, was wir bloß eines Tages mit unserer Muße anstellen sollten, wenn Wissenschaft und Technik uns weitgehend von der Arbeit befreit haben werden. G. B. Shaw schlug vor, sich mit höherer Mathematik zu beschäftigen. Sollte es mir gelingen, Sie mit diesem Vortrag zu überzeugen, daß dieser Vorschlag vielleicht doch nicht nur aus reiner Boshaftigkeit gemacht worden ist, so würde es mich freuen.

Ich werde Ihnen also etwas über einige Kuriositäten der Kugeloberfläche erzählen und es teilweise auch beweisen. Dabei sollen die Beweise sehr anschaulich geführt werden. Die Experten unter Ihnen wird das sicher nicht stören, da sie sofort sehen, wie man die gleichen Beweise vollkommen streng durchführen kann.

Fangen wir mit einem Beispiel an. Wenn die Meteorologen zu einem Zeitpunkt auf der ganzen Erde Druck und Temperatur messen, so sieht das für einen Mathematiker wie folgt aus: Die Erdoberfläche wird zu einer Kugeloberfläche S^2 abstrahiert; die Meßwerte von Temperatur T und Druck p auf der Erde werden zu einer Abbildung $f: S^2 \rightarrow E$, wobei E die euklidische Ebene mit den Koordinaten T und p ist. Wir wollen annehmen, daß Druck und Temperatur stetig auf der Erde variieren, d. h. daß $f: S^2 \rightarrow E$ eine stetige Abbildung darstellt.



Figur 1.

Für solche stetigen Abbildungen gilt nun eine merkwürdige Aussage:

Satz 1: *Ist $f: S^2 \rightarrow E$ eine stetige Abbildung, so gibt es ein Paar (P, Q) von Diametralpunkten auf S^2 , so daß $f(P) = f(Q)$.*

Was bedeutet das aber nun für die Meteorologie? Zu jedem Zeitpunkt gibt es irgend zwei Antipoden, die unter gleichen Druck- und Temperaturverhältnissen leben. Das merkwürdige an einer solchen Aussage ist, daß sie für jede stetige Wetterverteilung auf der Erdoberfläche gilt.

Satz 1 läßt aber noch eine ganz andere Deutung zu. Wenn man einen Gummiball nimmt und ihn irgendwie platt auf den Boden drückt, dann gibt es immer mindestens ein Paar von Diametralpunkten des Balles, die übereinander zu liegen kommen. Von dieser Deutung hat der Satz seinen Namen als Satz vom Fußball. Wenn Sie etwas Phantasie haben, können Sie sich leicht weitere Interpretationen des obigen Satzes ausdenken.

Es gibt nun über die Kugeloberfläche noch eine ganze Reihe weiterer kurioser Aussagen, die alle mit den gleichen Methoden bewiesen werden wie der Satz vom Fußball. Ich will einen dieser Sätze herausgreifen, den sogenannten Satz vom Igel, der auch unter dem Namen Satz vom Stachelschwein bekannt ist.

Wir betrachten folgende geometrische Situation: S^2 liege eingebettet im dreidimensionalen Raum R^3 (der Tripel (x, y, z) reeller Zahlen) und werde beschrieben durch die Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Unter einem Tangentenvektor an die Kugeloberfläche S^2 im Punkte P von S^2 versteht man eine gerichtete Strecke, einen sogenannten Pfeil oder Vektor, der im Punkte P angeheftet ist und in der Tangentialebene an S^2 im Punkte P liegt.

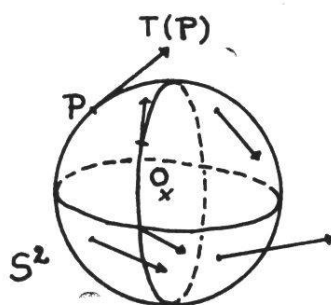


Fig. 2

Ordnet man jedem Punkt P von S^2 einen Tangentenvektor $T(P)$ an S^2 im Punkte P zu, so spricht man von einem Vektorfeld auf der Kugeloberfläche.

Es ist zu bemerken, daß man Vektoren nicht unterscheidet, die gleiche Richtung und Länge besitzen, d. h. durch Parallelverschiebung in einander überführt werden können. Das gibt uns die Möglichkeit, alle Vektoren im festen Punkt $0 = (0, 0, 0)$ des R^3 anzuheften und dann mit den Koordinaten der Pfeilspitzen zu identifizieren. Ein Vektor kann also eindeutig als Punkt des R^3 charakterisiert werden. Ein Vektorfeld auf der Kugeloberfläche läßt sich dann beschreiben als eine Abbildung $T: S^2 \rightarrow R^3$, wobei $T(P)$ für P aus S^2 zur Tangentialebene an S^2 im Punkte P parallel ist. Man spricht von einem stetigen Vektorfeld $T: S^2 \rightarrow R^3$ an die Kugeloberfläche, wenn T eine stetige Abbildung darstellt, d. h. anschaulich, wenn Richtung und Länge der Vektoren des Feldes stetig variieren, wenn man auf der Kugelfläche herumfährt.

Betrachten wir ein Beispiel. Die horizontalen Komponenten der Windgeschwindigkeit in einem Punkt der Erde besitzen eine Richtung und eine Stärke, lassen sich also als Tangentenvektoren interpretieren. Heften wir zu einem bestimmten Zeitpunkt jedem Punkt der Erde seinen so bestimmten Geschwindigkeitsvektor an, so haben wir ein Vektorfeld auf einer Kugeloberfläche. Ich behaupte nun, daß Phänomene wie Windstillen und Wirbelstürme aus rein mathematischen Gründen notwendig sind. Das liegt an folgender Aussage:

Satz 2: *Die Kugelfläche besitzt kein stetiges Vektorfeld ohne Nullstellen.*

Diesen Satz nennt man auch den Satz vom Igel. Das liegt an folgender Deutung: Wenn ein Igel sich zusammenrollt, so kann man ihn mit einer Kugel vergleichen, deren Oberfläche mit Vektoren ausgerüstet ist. Den Igel kämmen heißt mathematisch nichts anderes, als seine Stacheln tangentiell auszurichten, so daß ein gekämmter Igel eine Kugeloberfläche mit einem Vektorfeld darstellt. Unser obiger Satz besagt nun, daß ein Igel nicht stetig zu kämmen ist, d. h. nicht ohne Wirbel, Scheitel etc.

Unser Satz enthält aber auch für den ungekämmten Igel, wenn er seine Stacheln stetig variiert, eine Aussage. Die horizontalen Komponenten seiner Stacheln bilden nämlich ein stetiges Vektorfeld. Das muß nach unserem Satz aber irgendwo Nullstellen haben, d. h. es gibt Punkte, wo der Igel seine Stacheln genau senkrecht stellt.

Wir wollen uns nun den Beweisen der Sätze vom Igel bzw. Fußball zuwenden. In beiden Fällen werden als wichtige Hilfsmittel Aussagen über Vektorfelder auf Kreisscheiben $K_r: = \langle (x, y) \in E; x^2 + y^2 \leq r^2 \rangle$ in der Ebene E (mit $0 = (0, 0)$ als Mittelpunkt und r als Radius) herangezogen. Ordnet man jedem Punkt (x, y) von K_r einen dort angehefteten Vektor $f(x, y)$ zu, so nennt man diese Zuordnung f ein Vektorfeld auf K_r . Analog wie bei Vektorfeldern auf der Kugeloberfläche S^2 kann man ein Vektorfeld auf K_r als Abbildung $f: K_r \rightarrow E$ beschreiben. Damit ist auch klar, was man unter einem stetigen Vektorfeld auf K_r zu verstehen hat.

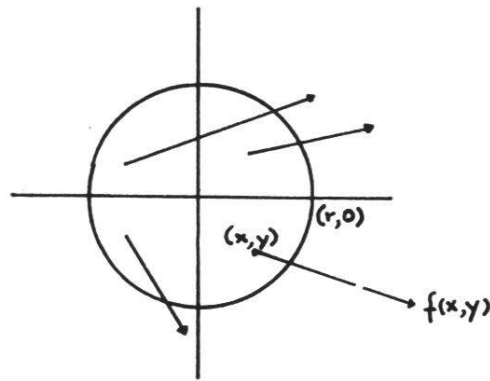


Fig. 3

Über solche (stetige) Vektorfelder $f: K_r \rightarrow E$ kann man durch Vergleich mit einem Standardvektorfeld $t: K_r - \langle 0 \rangle \rightarrow E$ auf der im Nullpunkt gelochten Kreisscheibe $K_r - \langle 0 \rangle$ interessante Aussagen gewinnen.

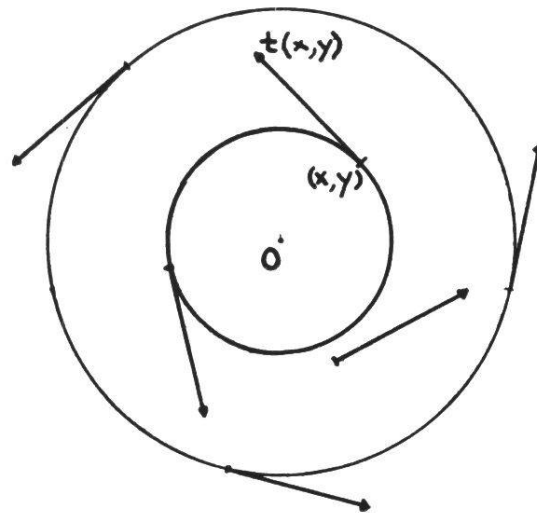


Fig. 4

Dabei ist der in (x, y) aus $K_r - \langle 0 \rangle$ angeheftete Vektor $t(x, y)$ wie folgt definiert: Er liege auf der Tangente an den Kreis durch (x, y) mit 0 als Mittelpunkt, weise in die Richtung des mathematisch positiven Umlaufsinnes dieses Kreises und seine Länge sei zu 1 normiert (siehe Fig. 4).

Bevor wir Aussagen über Vektorfelder auf Kreisscheiben zusammenstellen, müssen wir den Begriff der Umlaufzahl eines Vektorfeldes erläutern. $C_\rho := \langle (x, y) \in E; x^2 + y^2 = \rho^2 \rangle$ bezeichne den Kreis um 0 mit Radius ρ , wobei $0 < \rho \leq r$. $f: K_r \rightarrow E$ sei ein stetiges Vektorfeld ohne Nullstellen auf K_r . Wir wollen nun den Kreis C_ρ einmal im mathematisch positiven Sinne durchfahren und dabei den Vektor $f(x, y)$ relativ zu dem mitfahrenden Koordinatensystem betrachten, dessen erste Achse im Punkte (x, y) durch $t(x, y)$ festgelegt ist, während die zweite Achse auf den Nullpunkt hinweist. (Man stelle sich vor, man durchfahre den Kreis C_ρ mit einem Auto und betrachte alles relativ zum Auto als Bezugssystem.)

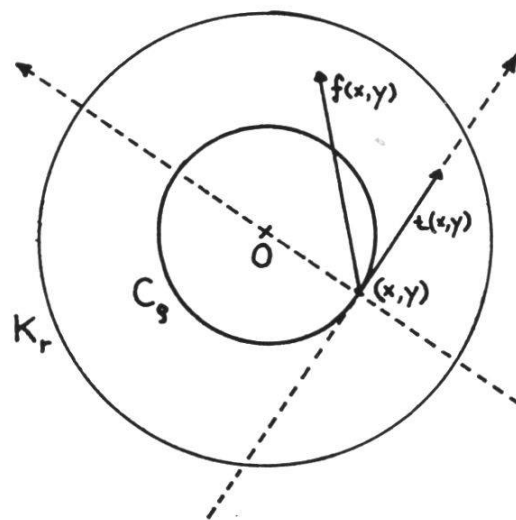


Fig. 5

Nach einem Umlauf auf dem Kreis C_ρ nimmt der Vektor $f(x, y)$ relativ zu diesem Koordinatensystem wieder dieselbe Position wie zu Beginn ein; während des Umlaufs hat er sich jedoch relativ zu diesem Koordinatensystem ein paarmal um 360° gedreht. Die Anzahl der Drehungen sei als Umlaufszahl $U(f, \rho)$ des Vektorfeldes f auf dem Kreis C_ρ bezeichnet. Man beachte dabei, daß die Umlaufszahl positiv bzw. negativ ist, je nachdem ob die Drehungen im mathematisch positiven oder negativen Sinne erfolgen.

Betrachten wir das Beispiel eines konstanten Vektorfeldes $f_0: K_r \rightarrow E$. Wie man der Fig. 6 entnimmt, ist $U(f_0, \rho) = -1$ für alle ρ mit $0 < \rho \leq r$,

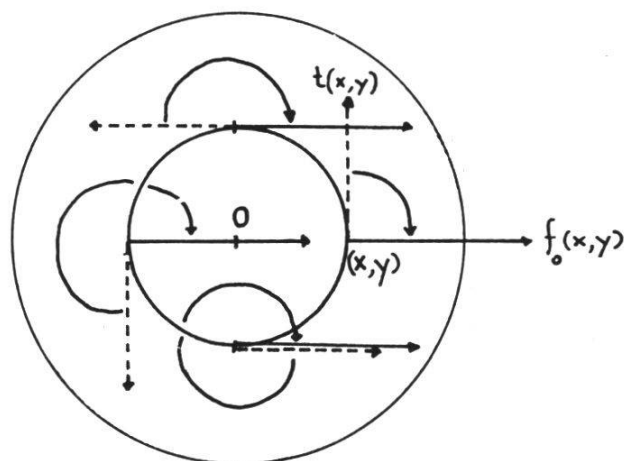


Fig. 6

Wir wollen nun eine Reihe von Hilfssätzen formulieren:

Hilfssatz 1: $f: K_r \rightarrow E$ sei ein stetiges Vektorfeld auf K_r ohne Nullstellen, dann ist die Umlaufszahl $U(f, \rho)$ für alle Kreise C_ρ , $0 < \rho \leq r$, die gleiche.

Bemerkung: Unter den Voraussetzungen von Hilfssatz 1 können wir also $U(f)$ statt $U(f, \rho)$ schreiben.

Zum Beweis überlegt man sich, daß die Umlaufszahl $U(f, \rho)$ stetig von ρ abhängt. Da sie aber nur ganze Zahlen als Werte annimmt, so muß sie konstant sein.

Hilfssatz 2: f und f' seien stetige Vektorfelder ohne Nullstellen auf K_r ; f lasse sich stetig über eine einparametrische Schar stetiger Vektorfelder ohne Nullstellen in f' deformieren. Dann haben f und f' die gleiche Umlaufszahl.

Wir verwenden die gleichen Überlegungen wie beim Beweis zu Hilfssatz 1. Die Umlaufszahlen für die Vektorfelder der Schar können sich nur stetig mit dem Scharparameter ändern, müssen also konstant sein, da die Umlaufszahlen nur ganze Zahlen als Werte annehmen.

Hilfssatz 3: $f: K_r \rightarrow E$ sei ein stetiges Vektorfeld ohne Nullstellen auf K_r , dann ist seine Umlaufszahl $U(f) = -1$ (wie bei konstanten Vektorfeldern).

Zum Beweis wähle man eine genügend kleine Kreisscheibe K_ρ , $0 < \rho < r$, so daß f sich dort in ein konstantes Vektorfeld f_0 deformieren läßt. Das geht, da sich das Vektorfeld f wegen seiner Stetigkeit auf einer genügend kleinen Kreisscheibe um 0 beliebig wenig vom konstanten Vektorfeld $f_0(x, y) = f(0, 0)$ unterscheidet. Die obigen Hilfssätze 1 und 2 zusammen mit der Tatsache, daß für ein konstantes Vektorfeld die Umlaufszahl gleich -1 ist, ergeben, daß auch $U(f) = -1$ ist.

Wir wollen nun erklären, wann zwei auf $C_r = \langle (x, y) \in E; x^2 + y^2 = r^2 \rangle$ definierte und dort nirgends verschwindende Vektorfelder $f, f': C_r \rightarrow E$ konjugiert heißen. Das soll genau dann der Fall sein, wenn für alle (x, y) von C_r die Vektoren $f(x, y)$ und $f'(x, y)$ bezüglich der durch den Vektor $t(x, y)$ gegebenen Geraden zueinander symmetrisch liegen.

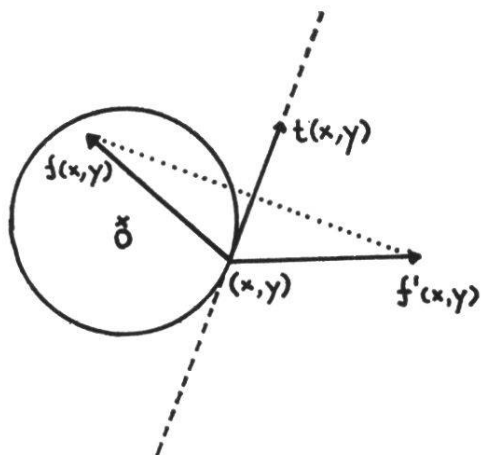


Fig. 7

Es gilt nun, wie man unmittelbar der Definition der Umlaufszahl entnimmt:

Hilfssatz 4: f und f' seien konjugierte stetige Vektorfelder ohne Nullstellen auf C_r . Dann ist $U(f, r) = -U(f', r)$.

Wir nennen ein Vektorfeld $f: C_r \rightarrow E$ auf einem Kreis C_r *ungerade*, wenn für alle (x, y) von C_r gilt: $f(-x, -y) = -f(x, y)$.

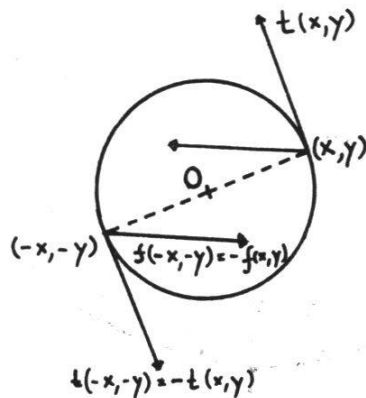


Fig. 8

Als Beispiel betrachte man das Standardvektorfeld $t: K_r \setminus \langle 0 \rangle \rightarrow E$, das auf allen Kreisen C_ρ , $0 < \rho \leq r$, ungerade ist.

Es gilt:

Hilfssatz 5: $f: K_r \rightarrow E$ sei ein stetiges Vektorfeld ohne Nullstellen auf K_r . Dann kann f auf C_r nicht ungerade sein.

Nehmen wir zum Beweis einmal an, daß f auf C_r doch ungerade sei. Wenn man dann auf C_r irgendwo zum Durchlaufen des Kreises C_r startet, so erscheint einem nach einem halben Umlauf relativ zum oben beschriebenen mitfahrenden Koordinatensystem der Vektor f wieder in der gleichen Position. Die Anzahl der relativen Drehungen von f um 360° nach einem halben Umlauf wird bei einem ganzen Umlauf verdoppelt, d. h. $U(f, r)$ ist eine gerade ganze Zahl im Widerspruch zum Hilfssatz 3, wonach $U(f, r) = -1$.

Wir kommen nun zum Beweis des Satzes vom Igel. Angenommen, es gibt ein stetiges Vektorfeld $T: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ auf der Kugeloberfläche $S^2 = \langle (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1 \rangle$ ohne Nullstellen (wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß die Länge der Vektoren $T(x, y, z)$ stets kleiner als 1 ist). Wir bezeichnen nun den Punkt $(0, 0, 1)$ als Nordpol, den Punkt $(0, 0, -1)$ als Südpol der Kugel; die Punkte $(x, y, 0)$ bilden dann die Äquatorebene E , deren Koordinaten wir auch einfach mit x und y bezeichnen können. Der Durchschnitt von S^2 und E ist der sogenannte Äquator C_1 der Kugeloberfläche S^2 .

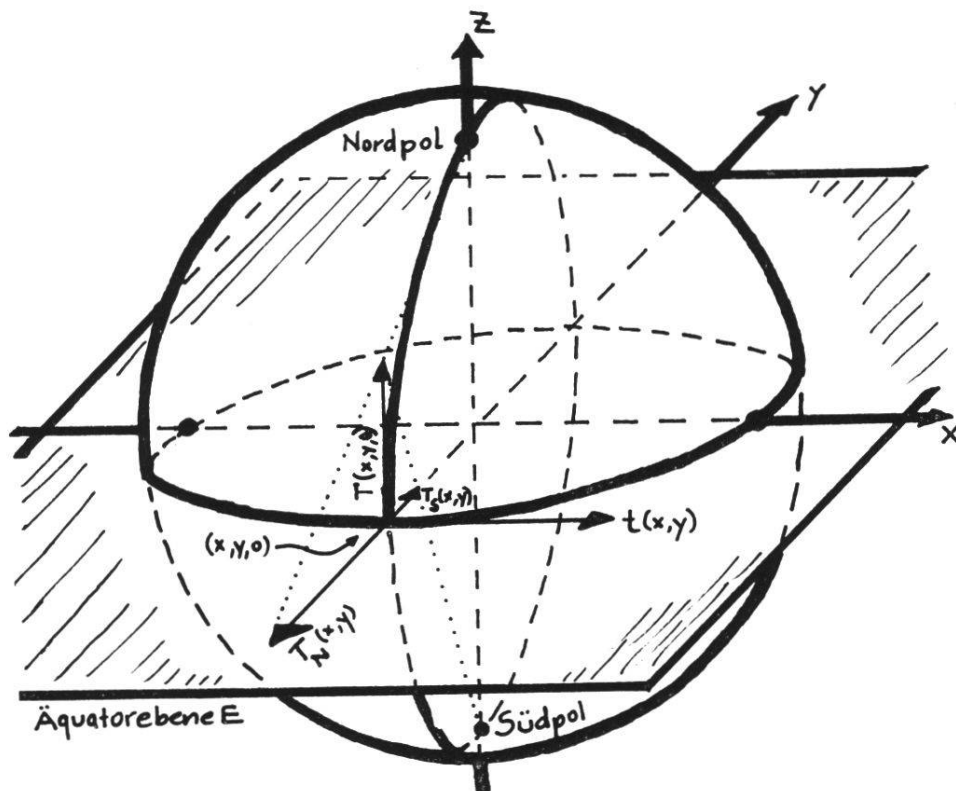


Fig. 9

Wir betrachten nun die stereographischen Projektionen der nördlichen bzw. südlichen Halbkugel auf den Einheitskreis $K_1 := \langle (x, y) \in E; x^2 + y^2 \leq 1 \rangle$ in der Äquatorialebene E , und zwar vom Südpol bzw. Nordpol aus. Die zugehörigen Vektorfelder werden ebenfalls mitprojiziert und liefern stetige Vektorfelder ohne Nullstellen T_S und T_N auf K_1 (siehe Fig. 9). Auf dem Äquator C_1 sind die Vektorfelder T_N und T_S konjugiert, wie man aus der Winkeltreue der stereographischen Projektion sofort ersieht. Also gilt auf Grund von Hilfssatz 4, daß $U(T_N, 1) = -U(T_S, 1)$ im Widerspruch zu $U(T_N, 1) = U(T_S, 1) = -1$.

Nehmen wir uns nun den Beweis des Satzes vom Fußball vor. Sei $f: S^2 \rightarrow E$ eine stetige Abbildung. Angenommen, es gelte $f(x, y, z) \neq f(-x, -y, -z)$ für alle (x, y, z) von S^2 . Dann hat die stetige Abbildung $F: S^2 \rightarrow E$, $F(x, y, z) := f(x, y, z) - f(-x, -y, -z)$ keine Nullstellen und es gilt: $F(-x, -y, -z) = -F(x, y, z)$ für alle (x, y, z) von S^2 , d. h. f ist eine ungerade Abbildung. Sei $p: K_1 \rightarrow S^2$ die folgende stetige Abbildung des Einheitskreises K_1 in der Äquatorialebene auf die nördliche Halbkugel, die jedem Punkt (x, y) aus K_1 den Punkt $(x, y, \sqrt{1-x^2-y^2})$ von S^2 zuordnet. Der Äquator wird dabei identisch auf sich selbst abgebildet. Die Hintereinanderschaltung $T := F \circ p: K_1 \rightarrow E$ stellt dann ein stetiges Vektorfeld auf K_1 ohne Nullstellen dar, das auf dem Äquator C_1 ungerade ist. So ein Vektorfeld kann es aber wegen Hilfssatz 5 nicht geben.

Wir wollen aus dem Satz vom Fußball und dem Satz vom Igel je ein Corollar ableiten:

Corollar 1: (Spezialfall des Brouwerschen Dimensionssatzes) *Es gibt keine eindeutige stetige Abbildung einer 3-dimensionalen Kugel in die Ebene* (natürlich kann man in dieser Aussage 3-dimensionale Kugeln durch offene Mengen im \mathbb{R}^3 ersetzen).

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus dem Satz vom Fußball, nach welchem nicht einmal eine stetige eindeutige Abbildung des Randes einer Vollkugel in die Ebene existiert.

Corollar 2: *Sei $f: S^2 \rightarrow S^2$ eine stetige Selbstabbildung der Kugeloberfläche, dann gibt es einen Punkt (x_0, y_0, z_0) auf S^2 mit $f(x_0, y_0, z_0) = (x_0, y_0, z_0)$ oder $f(x_0, y_0, z_0) = (-x_0, -y_0, -z_0)$.*

Der Beweis läßt sich mit Hilfe des Satzes vom Igel führen. Wenn die Behauptung des Satzes nicht stimmt, d. h. wenn $f(x, y, z) \neq \pm(x, y, z)$ für alle (x, y, z) aus S^2 ist, dann könnte man nämlich wie folgt ein stetiges Vektorfeld T ohne Nullstellen auf S^2 konstruieren, was nach dem Satz vom Igel natürlich nicht existieren darf. Man zerlege einfach für jeden Punkt (x, y, z) von S^2 den dort angehefteten Vektor $f(x, y, z) - (x, y, z)$ in zwei zueinander orthogonale Komponenten, wobei die eine in der Tangentialebene an S^2 im Punkte (x, y, z) liegt, während die zweite dazu senkrecht steht. Die tangentiellen Komponenten $T(x, y, z)$ der Vektoren $f(x, y, z) - (x, y, z)$ müßten ein stetiges Vektorfeld ohne Nullstellen auf S^2 bilden.

Anorganische Chemie – Renaissance einer Wissenschaft

VON ERNST SCHUMACHER, CIBA Photochemie AG, Marly

Einheit der modernen Chemie

Wer sich heute in Forschung und Lehre der Anorganischen Chemie verschreibt, steht inmitten einer weltweiten Entwicklung seiner Wissenschaft, zu der keine frühere Epoche an Spannung und Ausblick taugliche Vergleiche bietet. Man spricht von der Renaissance unseres Gebietes und blickt dabei auf die erste Hälfte des letzten Jahrhunderts zurück. Damals löste sich die Chemie aus den Fesseln steriler Spekulation und begann das Zeitalter des quantitativen Experiments. Die Analyse der Mineralien – der anorganischen Naturstoffe –, das Aufspüren und Erkennen neuer Elemente und die Entdeckung der grundlegenden Gesetze der Atom-Verbands-Bildung waren Substanz und Auftrag einer wenige Jahrzehnte blühenden Disziplin. Viele dieser Fragestellungen schienen jedoch bald an die Grenze der methodischen Hilfsmittel zu stoßen, während die organische Schwesterwissenschaft mit dem gleichen Arsenal beispiellose Triumphe feiern konnte und damit ohne grundsätzliche Änderungen während hundert Jahren bis in unsere Zeit fast die gesamte Frucht chemischen Bemühens erntete. Aus dem proteusartigen Kohlenstoffatom bauten Heerscharen von Forschern,