Zeitschrift: Jahrbuch für Philosophie und spekulative Theologie

Band: 2 (1888)

Artikel: Der Dom zu Köln

Autor: Pfeifer, F.X.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-762145

DER DOM ZU KÖLN,

gegründet 1248, vollendet 1880,

seine logisch-mathematische Gesetzmäfsigkeit und sein Verhältnis zu den berühmtesten Bauwerken der Welt.

Motto: „Überhaupt spielt in keiner der anderen bildenden Künste die Logik eine so bedeutsame Rolle, als in der Architektur."

„Man darf wohl sagen, dafs die christliche Baukunst des Mittelalters, das Gigantische und Phantastische der orientalischen Architektur mit der Harmonie, der Klarheit, der strengen Konsequenz und Gesetzmäfsigkeit der griechischen zu einer höheren Einheit verbindet."

August Reichensperger, die christlich-germanische Baukunst. 3. Ausgabe S. 14 u. 16.

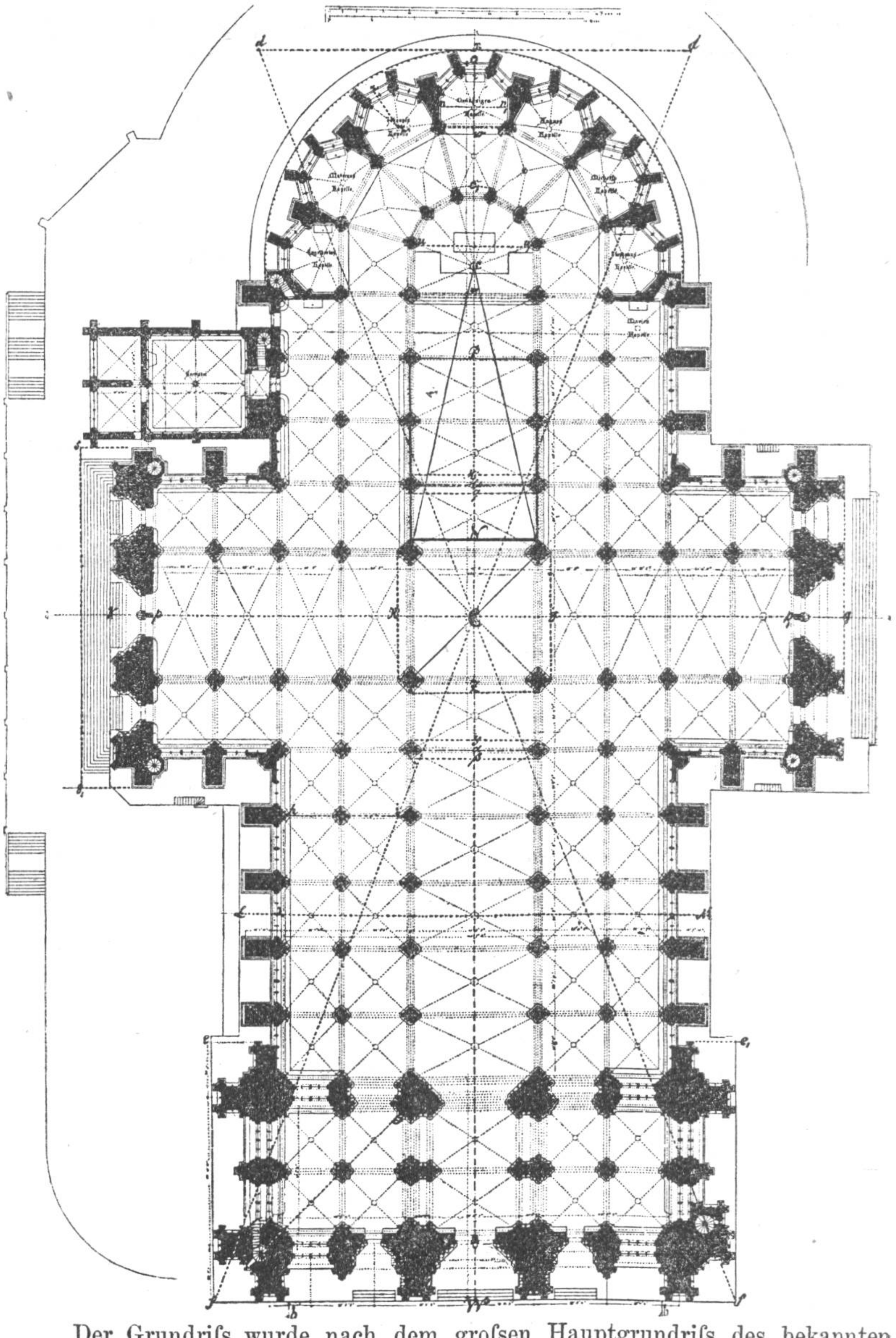
Von

Dr. FRZ. XAV. PFEIFER,

KGL. LYCEAL-PROFESSOR IN DILLINGEN.

Entstehung, Inhalt und Einteilung dieser Abhandlung.

Der Autor dieser Abhandlung hält seit vielen Jahren Vorlesungen über Geschichte der kirchlichen Architektur, weshalb er auch auf Ferienreisen stets darauf bedacht war, solche Städte, wo grofse Meisterwerke der kirchlichen Architektur zu sehen



Der Grundriſs wurde nach dem groſsen Hauptgrundriſs des bekannten Werkes von Schmitz durch Photographie und Zinkographie hergestellt und zwar in einem solchen Maſsstabe, daſs jeder Meter der wirklichen Dimensionen in der Zinkographie genau durch einen Millimeter wiedergegeben ist. Es kann daher jedermann, der etwa Lust und Zeit hat, sowohl die absoluten Maſse, als auch die in der Abhandlung angegebenen Proportionen mit einem Millimetermaſsstab bestimmen und prüfen und so unsere Angaben kontrollieren.

sind, zu besuchen. Von allen Kirchen, die der Autor auf diesen Reisen zu betrachten Gelegenheit hatte, machte der Dom zu Köln bei wiederholtem Besuche den tiefsten und nachhaltigsten Eindruck, einen viel mächtigern, als selbst solche Kirchen, welche den Kölner Dom an Flächengröfse bedeutend übertreffen, wie der Dom zu Mailand und die Peterskirche zu Rom. Die Folge dieses mächtigen Eindrucks und der dadurch geweckten Begeisterung für den Kölner Dom war, dafs der Autor im Herbst des vorigen Jahres nach der Heimkehr von Köln sich daran machte, in seinen freien Stunden über die Dimensionen und Proportionen jenes durch Schönheit und Gröfse gleich ausgezeichneten Bauwerkes eingehende Studien zu machen. Die Grundlage dieser Studien war das bekannte grofse Werk von Schmitz über den Dom zu Köln, dessen genaue und grofse Zeichnungen mit beigefügten Mafsstäben und Mafsangaben es ermöglichen, sowohl die absoluten Dimensionen, als auch die Proportionen jenes Baues und seiner Teile mit grofser Genauigkeit zu bestimmen, denn die zahlreichen, in die Abbildungen hineingezeichneten Mafsangaben erstrecken sich oft sogar noch auf die Linien, und die Abbildungen haben eine so bedeutende Gröfse, dafs auch in solchen Fällen, wo die Mafse erst mit Hilfe der Abbildungen bestimmt werden müssen, die Mafsbestimmungen noch bis auf ein paar Zolle, oft noch weiter herab, sicher sind. Wo schon in den Abbildungen Mafse angegeben sind, wurden stets diese zu Grunde gelegt, jedoch die im preufsischen oder rheinländischen Fufsmafs angegebenen Dimensionen stets in Metermafs umgerechnet, was allerdings etwas mühsam war, da hiebei stets mit sechs Dezimalstellen gerechnet wurde.

Übrigens waren die absoluten Mafsbestimmungen hiebei nur Mittel und Vorbereitung für die Bestimmung der Mafsverhältnisse oder Proportionen. Die Untersuchung und Bestimmung der Proportionen, diese spezifisch mathematische Arbeit führte bald zur Überzeugung, dafs die Mathematik des Kölner Domes erst vom Standpunkt der Logik in der rechten Beleuchtung erscheint. Wie das gemeint ist, wollen wir kurz erklären. Dafs in der Architektur, namentlich in der monumentalen, die Mathematik eine nicht unbedeutende Rolle spielt, ist längst bekannt und folgt aus der geometrischen Natur der Bauwerke. Es ist ferner auch von verschiedenen Kunstschriftstellern, namentlich von Bötticher in seiner Tektonik[1]) der Hellenen hervorgehoben worden, dafs es in Werken der monumentalen Architektur, insbesondere im dorischen Stile, eine logische Folgerichtigkeit gebe. Es ist also bereits bekannt und anerkannt, dafs ein Bauwerk Mathematik und dafs es Logik in sich enthalten könne. Im Dome zu Köln nun sind Logik und Mathematik auf ganz eigentümliche Weise vereinigt, nämlich so, dafs aus zwei Fundamentalgröfsen, wovon die eine eine absolute, im Dome gegebene Mafsgröfse, die andere aber ein Quotient, also eine relative Gröfse ist, alle wichtigeren Mafse und Mafsverhältnisse durch logisch-mathematische Operationen sich ableiten lassen. Die zwei angedeuteten Fundamentalgröfsen haben hiebei eine ähnliche Bedeutung und Funktion, wie die Prämissen eines logischen Schlusses und das operative Verfahren, wodurch aus jenen Gröfsen andere abgeleitet werden, ist im Wesentlichen deduktiv. Ich lege auf diesen Punkt Gewicht, weil schon durch dieses Verfahren die gegenwärtige Abhandlung sich wesentlich unterscheidet von den Artikeln A. Zeisings in der Augsburger Allg. Zeitung 1869 Nr. 216 bis 218 über die Verhältnisse des Kölner Domes nach dem Grundrisse von Franz Schmitz. Zeising hat in jenen Artikeln ein frequentes Auftreten der Proportion des g. Schnittes im Grundrisse des bezeichneten Domes nachgewiesen, er verfuhr aber hiebei rein induktiv, indem er einfach durch Mafsangaben zeigt, dafs und in welchen Mafsen des Domes jene Proportion sich finde. Dieses Verfahren verschafft nun zwar einen gewissen Einblick in die mathematische Gesetzmäfsigkeit des Domes, aber es gewährt noch keine Einsicht in den logischen Zusammenhang, der zwischen den Mafsverhältnissen der mannigfaltigen Teile und Gliederungen jenes Baues besteht, weil bei jenem Verfahren jene Mafse, zwischen denen das Verhältnis des goldnen Schnittes nachweisbar stattfindet, nicht aus einem einheitlichen Fundamentalmafse, und zwar aus einem solchen, das dem Dome selbst angehört, abgeleitet sind. Es trägt aber der Kölner Dom in seinem centralsten

Teile ein solches Fundamentalmaſs in sich, woraus mit Anwendung des Quotienten des goldnen Schnittes die andern Hauptmaſse, sowohl horizontale als vertikale, durch Rechnung sich bestimmen lassen. Welches jenes Fundamentalmaſs sei und wie die andern Maſse daraus abgeleitet werden, wird sogleich weiter unten im Beginn des ersten Teiles dieser Abhandlung gezeigt werden. Der erste Teil dieser Abhandlung soll nämlich den Kölner Dom für sich allein betrachten, und zwar in Rücksicht auf dessen logische und mathematische Gesetzmäſsigkeit; der zweite Teil aber soll eine architekturgeschichtliche Vergleichung des Kölner Domes mit einer Anzahl der berühmtesten Bauwerke aus den Hauptepochen der gesammten Architekturgeschichte geben. Der erste Hauptteil wird wieder in zwei Unterabteilungen sich zerlegen, wovon die erste mit den geometrischen, die zweite mit den arithmetischen Verhältnissen und Gesetzen des Domes sich befassen wird. Ein kurzer Nachweis des inneren Zusammenhanges dieser zwei Kategorieen mathematischer Verhältnisse im Kölner Dome, der geometrischen und arithmetischen nämlich, wird den ersten Hauptteil beschlieſsen.

Auch der zweite Hauptteil wird zwei Untereinteilungsglieder haben, wovon das erste den Kölner Dom mit einigen Bauwerken der vorchristlichen, der zweite aber denselben mit einigen berühmten Kirchenbauten der christlichen Zeit vergleichen soll. Eine kurze Zusammenfassung des Ergebnisses der geschichtlichen Vergleichung wird diesen zweiten Teil beschlieſsen. Bevor wir an die Ausführung gehen, ist noch etwas Weniges zu bemerken über die Stellung unserer Abhandlung zu der schon vorliegenden Literatur über den Kölner Dom. Soweit der Autor dieser Abhandlung jene Literatur kennt, ist der bei weitem überwiegend gröſsere Teil historisch, oder doch vorwiegend historisch. Auſser den schon erwähnten Artikeln Zeisings in der Allg. Ztg. ist mir keine einzige Publikation, welche die mathematischen Verhältnisse des Domes speziell und eingehend behandeln würde, bekannt). Da mir daran lag, von etwa vorhandenen Publikationen mathematischen Inhaltes über den Dom Kenntnis zu erhalten, habe ich vor mehreren Monaten in der Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht von Hoffmann, Jahrg. 1887, Heft II, S. 158, Fragekasten Nr. 33 die Frage gestellt: „Ist seit Vollendung des Kölner Domes irgend eine Publikation erschienen, welche speziell und eingehend die mathematischen Verhältnisse dieses Bauwerkes behandelt?“ Eine Antwort auf diese Anfrage ist bis jetzt nicht gegeben worden. Es scheint demnach keine derartige Publikation zu existieren.

A. Der Dom zu Köln für sich allein in seiner mathematischen und logischen Regelmäfsigkeit betrachtet.

I. *Geometrische Verhältnisse, Mafse und Proportionen.*

Bei dem Nachweise der geometrischen Regelmäfsigkeit des Domes, welche in seinen Proportionen sich zeigt, wird eine Frage sich nahe legen, von deren Beantwortung wir jedoch vorerst Umgang nehmen müssen, nämlich die Frage, ob die thatsächlich nachweisbaren Proportionen so, wie sie vorliegen, von dem Urheber des Domplanes mathematisch vorausberechnet und konstruiert worden seien. Wir werden, wie schon angedeutet, von dieser Frage vorerst ganz absehen und blofs mit möglichster Exaktheit nachweisen, welche Mafse und Mafsverhältnisse thatsächlich vorliegen. Das Verfahren bei diesem Nachweise wurde im allgemeinen schon oben als ein deduktives charakterisiert, indem wir sagten, dafs aus einem im Dome selbst gegebenen Fundamentalmafse die andern Hauptmafse sich ableiten lassen. Es ist deshalb vor allem jenes Grundmafs und der Modus der Ableitung anderer Mafse aus demselben genauer zu bestimmen.

a) Das Fundamentalmafs im Kölner Dom.

Als der Autor dieser Abhandlung bei seinem zweiten Besuche des Kölner Domes (im Herbste 1886) längere Zeit in der Mitte der Vierung, wo das Mittelschiff des Lang- und Querhauses sich schneiden und von wo aus man das Innere am besten überschauen kann, stand, drängte sich ihm der Gedanke auf, ob nicht vielleicht in den Mafsen dsr Vierung ein einheitliches

Grundmafs, welches in den andern Mafsen seine weitere Explikation finde, gegeben sei. In dieser Vermutung lag eine Art Hypothese, welche sich mathematisch prüfen liefs. Die Vierung im Kölner Dom ist nahezu, aber nicht genau ein Quadrat, in dessen vier Ecken vier Pfeiler stehen, die etwas stärker als die andern Mittelschiffpfeiler sind, weil sie den Mittelthurm oder Dachreiter zu tragen haben. (Vgl. im Plane das mit punktierten Linien eingefafste Viereck in der Mitte des Transseptes.) Im Plane von Schmitz ist der Axenabstand der Vierungspfeiler sowohl in der Richtung der Breiten- als Längenaxe des Domes genau angegeben; derselbe beträgt nach jenen Angaben

α) in der Längenaxe 47 Fufs 1 Zoll 6 Linien = 14,79017 m.[2])

β) in der Breitenaxe 47 Fufs 6 Zoll = 14,90780 m.

Denken wir uns nun die Axen je zweier Vierungspfeiler in diagonaler Richtung durch eine Gerade verbunden und nennen wir eine solche Gerade die Vierungsdiagonale (d), so läfst sich aus den angegebenen Axenabständen die Gröfse der Diagonale ganz genau berechnen, genauer als die Bestimmung durch Abmessung am Plane sein würde. Die Rechnung ergibt, dafs jene Diagonale = 20,9998 m. ist, so dafs also von 21 Meter nur noch ein Fünftel Millimeter fehlt. Dies ist bei einem solchen Bauwerke eine so verschwindende Gröfse, dafs wir einfach sagen können: die Vierungsdiagonale, die wir in Rechnungen konstant mit d bezeichnen werden, ist = 21 m. Es ist dieser Umstand, dafs die Vierungsdiagonale gerade durch eine ganze Zahl von Metern sich genau ausdrücken läfst, gewissermafsen ein günstiger Zufall, weil, wie wir sehen werden, gerade jene Diagonale das Grundmafs ist. Bei meiner Hypothese, dafs die Vierung vielleicht das Grundmafs enthalte, vermutete ich anfangs, dafs der direkte Axenabstand der Vierungspfeiler das Grundmafs sein dürfte; aber schon der Umstand, dafs jener Abstand in der Breite- und Längenaxe nicht ganz gleich ist, war eine negative Instanz gegen jene Vermutung; ich hätte jedenfalls aus jenen beiden Axenabständen erst das Mittel nehmen müssen. Bei den Diagonalen fällt die Ungleichheit weg, weil bekanntlich ein Rechteck, auch wenn es kein genaues Quadrat ist, gleiche Diagonalen hat. Ferner lassen sich, wenn die Diagonale als Grundmafs angenommen wird, die andern Hauptmafse des Domes viel vollständiger und genauer ableiten, als aus dem Axenabstand in direkter Richtung.

b) **Modus der Ableitung aus dem Fundamentalmafs.**

Schon lange bevor ich in der Diagonale der Vierung das Fundamentalmafs vermutete, hatte ich durch messende Untersuchungen am Grundrisse von Schmitz, ähnlich wie Zeising, ein frequentes Auftreten des goldnen Schnittes in den Mafsverhältnissen des Domes beobachtet. Indem ich nun diese Beobachtung mit der auf das Fundamentalmafs bezüglichen Hypothese kombinierte, verfiel ich auf die Idee, das Fundamentalmafs mit den Quotienten des goldnen Schnittes in mehreren Potenzen zu multiplizieren und dann nachzusehen, wie die bei dieser Operation sich ergebenden Produkte zu den Hauptdimensionen des Domes sich verhalten. Das Ergebnis dieses Versuches war überraschend und wird sogleich dargelegt werden, nachdem zuvor über den Quotienten des goldnen Schnittes das Nötige gesagt sein wird. Es darf hier wohl als bekannt vorausgesetzt werden, dafs die Proportion des goldnen Schnittes, weil sie irrational ist, in Zahlen nur annähernd sich ausdrücken läfst, aber die Zahlausdrücke können so genau gemacht werden, dafs der Fehler bei mefsbaren Gröfsen nicht mehr in Betracht kommt. Setzt man nun den kleinern Teil des goldnen Schnittes $= 1$, so ist der bis auf 6 Dezimalen angenäherte Ausdruck für den gröfsern Teil (Major) $= 1,618033$. Man kann diesen gemischten Bruch, da er eigentlich auf einer Division des Major durch den Minor beruht, den aufsteigenden Quotienten des goldnen Schnittes nennen. Setzt man aber den Major $= 1$, und bestimmt dann darnach die Gröfse des Minor, so ist der letztere $= 0,618033$. Diesen reinen Dezimalbruch kann man füglich den absteigenden Quotienten des goldnen Schnittes nennen, weil man durch denselben vom Major zum Minor herabsteigt. Ist irgend eine Gröfse gegeben, die man als Major des goldnen Schnittes behandeln will und sucht man dazu den Minor, so erhält man letztern bis auf sechs Dezimalen dadurch, dafs man die gegebene Gröfse mit 0,618033 multipliziert.

Sucht man aber umgekehrt zu einer Gröſse, welche man als Minor setzt, den zugehörigen Major, so hat man die gegebene Gröſse mit 1,618033 . . . zu vermehren. Man steigt also durch Multiplikation mit der einen Bruchzahl vom Major zum Minor herab, mit der andern aber vom Minor zum Major auf. Wir bezeichnen deshalb die Bruchzahl 1,618033 als den aufsteigenden, die andere 0,618033 als den absteigenden Quotienten des goldnen Schnittes, und werden der Kürze wegen den ersten durch Q, den zweiten durch q ausdrücken.

Es ist jetzt nur noch über die Potenzen dieser Quotienten etwas Weniges zu bemerken, weil wir von beiden Quotienten die ersten vier Potenzen anwenden werden. Da der Quotient Q ein gemischter Bruch ist, müssen die Werte mit den Potenzen zunehmen; beim Quotienten q, welcher ein reiner Dezimalbruch ist, müssen die Werte mit den Potenzen abnehmen. Die Werte der vier ersten Potenzen von Q bis auf 6 Dezimalen bestimmt sind:

$$Q = 1{,}618033\ldots$$
$$Q^2 = 2{,}618030\ldots$$
$$Q^3 = 4{,}236058\ldots$$
$$Q^4 = 6{,}854085\ldots.$$

Die vier ersten Potenzen des absteigenden Quotienten q sind:

$$q = 0{,}618033\ldots$$
$$q^2 = 0{,}381964\ldots.$$
$$q^3 = 0{,}236066\ldots.$$
$$q^4 = 0{,}145896\ldots$$

Wir können nun zur Anwendung dieser Quotienten schreiten.

1. Ableitung der Gröſse der Längenachse des Domes und ihrer wichtigeren Abteilungen aus dem Grundmaſse d durch die Quotienten Q, Q² etc.

Die Gröſse der ganzen Längenachse des Domes und die Maſse der wichtigeren Abteilungen jener Achse stehen zur Diagonale d, deren Gröſse wir bereits kennen, in einem solchen Verhältnisse, daſs man die Gröſse der ganzen Längenachse und jener Abteilungen, welche gröfser als d sind, durch Multiplikation der Gröfse d mit einer der vier ersten Potenzen des Quotienten Q bis auf eine verhältnismäfsig sehr geringe Differenz erhält, während eine Abteilung der Längenmafse gerade $= d$ ist.

Die Richtigkeit des soeben aufgestellten Satzes soll nun nachgewiesen werden, wobei wir mit der ganzen Längenachse beginnen und zu den Teilen fortschreiten wollen.

a) Die Gröfse der ganzen Längenachse des Domes, den Turmbau mit eingerechnet (in unserem Plane die Linie OW), ist im Plane von Schmitz sehr genau angegeben und beträgt demnach 458 Fufs 10 Zoll 2 Linien, was in Metermafs umgerechnet, mit Weglassung der 2 Linien, 144 Meter gibt. Das ist bis auf eine Differenz von 63 mm $= dQ^4$, denn $Q^4 = 1{,}618033^4 \ldots = 6{,}854085 \ldots$ und demnach ist $dQ^4 = 21\,\mathrm{m} \times 6{,}854085 = 143{,}935$ m. Es fehlen zu 144 m nur noch 65 mm = etwa $2^1/_2$ Zoll, was bei einer so grofsen Dimension kaum mehr in Betracht kommt.

b) Diese ganze Längenachse ist durch die Chorschranken, welche unmittelbar an die östlichen Vierungspfeiler sich anschliefsen (im Plan die Linie N) in zwei Hauptteile, wovon der kleinere auf den Chorbau, der gröfsere auf das Langhaus trifft, so geteilt, dafs die Längenachse des Chores (NO) bis auf eine Differenz von etwa 1 Zoll gleich ist dQ^2 und die Achse des Langhauses (NW), westlich von den Chorschranken bis zur Façade $= dQ^3$. Es ist nämlich $dQ^3 = 88{,}957$ m und $dQ^2 = 54{,}978$ m; die Chorlänge ist 55 m, die Strecke von den Chorschranken bis zur Westfront beträgt 89 m.

c) Im Chore selbst ist jene Strecke, durch welche die Reihe der Chorstühle hindurchgeht, wenn wir die Mitte jener Pfeiler bei welchen das Chorgestühl östlich abschliefst, als Grenze annehmen, (im Plan Linie NP) so lang als die Diagonale $d = 21$ m und es bleibt demnach für den übrigen Teil der Chorlänge (im Plane PO) $55\,\mathrm{m} - 21 = 34$ m, was nahezu dQ ist, denn dQ ist $= 33{,}978$ m.

Stellen wir nun die bis jetzt bestimmten Gröfsen in aufsteigender Ordnung zusammen und zwar so, dafs wir zu den

Werten, welche in Dezimalbrüchen ausgedrückt sind, jene ganzen Zahlen, wovon die Dezimalbrüche nur wenig differieren, in Parenthese beifügen, so erhalten wir folgende Reihe:

1. Diagonalen der Vierung AE und BD $= d = 21$ m.
2. Länge des Domherrenchores mit dem Chorgestühle $= d = 21$ m.
3. Länge des Chores östlich vom Chorgestühle $= dQ = 33{,}978$ (34 m.)[3])
4. Länge des ganzen Chores $= dQ^2 = 54{,}978$ m (55 m.)
5. Länge des Langhauses und Thurmbaues von den Chorschranken bis zur Westfaçade $= dQ^3 = 88{,}957$ m (89 m.)
6. Länge des ganzen Domes $= dQ^4 = 143{,}935$ m (144 m.)

Dies sind die Gröſsen, resp. Maſse, welche sich ergeben, wenn wir von d aufwärts steigend mit den Potenzen des Quotienten Q das Grundmaſs multiplizieren.

Wenn das Grundmaſs d mit dem absteigenden Quotienten des goldenen Schnittes, welchen wir mit q bezeichnet haben, in verschiedenen Potenzen multipliziert wird, so erhält man Gröſsen, welche kleiner als d sind und zwar in dem Verhältnisse, daſs die folgende Gröſse zur nächst vorangehenden als Minor sich verhält. Es entsteht auf diese Weise die absteigende Reihe: $d, dq, dq^2, dq^3, dq^4 \ldots$, worin immer das vorangehende Glied Minor zum nächstfolgenden ist.

Nun wissen wir bereits, daſs $d = 21$ Meter und $q = 0{,}618033 \ldots$ ist. Daraus ergeben sich dann für die anderen Glieder dieser absteigenden Reihe folgende Werte:

$$dq = 21 \text{ m} \times 0{,}618033 = 12{,}978 \text{ m (13 m.)}$$
$$dq^2 = 21 \text{ m} \times 0{,}381964 = 8{,}021 \text{ m (8 m.)}$$
$$dq^3 = 21 \text{ m} \times 0{,}236066 = 4{,}957 \text{ m (5 m.)}$$
$$dq^4 = 21 \text{ m} \times 0{,}145916 = 3{,}063 \text{ m (3 m.)}$$

Den Bruchzahlen sind in Klammern jene ganzen Zahlen, von welchen die ersteren nur wenig differieren, beigesetzt.

Es läfst sich nun zeigen, dafs die Mafse, welche durch die Glieder dieser absteigenden Reihe repräsentiert sind, ebenfalls mit grofser Annäherung in den Teilen der Längenachse des Domes sich finden. Nachweis:

a) für dq = 12,978 (13 m.)

In der östlich vom Chorgestühle liegenden Partie des Chorbaues bildet der Hochaltar eine Abteilung der Längenachse. Im Plane ist die Stelle des Hochaltares durch ein längliches Viereck angezeigt und eine Transversallinie gezogen, welche durch jenes Viereck hindurchgeht und diejenigen Pfeiler, welche rechts und links vom Hochaltar stehen, berührt (u u). Die Strecke nun, welche vom östlichen Ende des Chorgestühles, resp. vom Punkte P bis zu jener Transversallinie (u u) reicht, mifst gerade 13 m, also blofs 22 mm mehr als dq beträgt; ebenso grofs, oder nur sehr wenig davon verschieden ist die Strecke von jener Transversallinie, welche durch die Grundfläche des Hochaltares geht, (u u) bis zu jener Querlinie (w), welche die Pfeiler am Eingange in die Dreikönigenkapelle verbindet, so dafs also die ganze Strecke Pw nahezu = 2 $\times$ dq oder abgerundet = 2 $\times$ 13 m = 26 m ist.

b) Mit dq^2 = 8,021 m stimmt überein die Strecke, welche im Grundrisse von O bis w reicht, das ist vom Ostende der Längenaxe bis zum Eingang der Dreikönigenkapelle; diese Strecke mifst $25\frac{1}{2}$ Fufs, was ein wenig über 8 Meter macht.

c) Der Gröfse dq^3 = 4,957 m (resp. abgerundet 5 m) entspricht im Plane der Teil der Längenaxe der vom Centrum der Dreikönigenkapelle bis O reicht.

d) Mit der Gröfse dq^4 endlich stimmen überein erstens jene kleine Strecke der Längenaxe, welche zwischen dem Centrum der Dreikönigenkapelle und dem Punkte w (am Eingang in die Dreikönigenkapelle) liegt; zweitens derjenige Durchmesser der Sockel der Vierungspfeiler, welcher zur Mittelaxe des Domes parallel ist. Dieser Durchmesser ist bei zwei verschiedenen Pfeilern, deren Durchschnitte bei Schmitz Lfg. 11, Bl. 5 abgebildet sind, ein wenig verschieden; im Mittel beträgt er 3,06 m, ist also fast genau = dq^4. Wir haben hiermit eine Art Kreislauf vollendet, wobei der Ausgangspunkt die Diagonale des Vierungsquadrates und der Endpunkt der Durchmesser der Sockel der Vierungspfeiler ist. Übrigens läſst sich auch dieser Durchmesser als eine Diagonale betrachten, denn die Durchschnitte der Sockel der Vierungspfeiler haben die Form von Quadraten mit abgestumpften Ecken und jener Durchmesser, der hier in Betracht kommt, geht durch zwei einander gegenüberstehende abgestumpfte Ecken, ist also insofern Diagonale des Durchschnittes.

Von der Diagonale d ausgehend haben wir nun zwei Reihen von Maſsgröſsen gefunden, eine von d an aufsteigende, nämlich d, dQ, dQ^2, dQ^3, dQ^4 und eine von d an in bezug auf Gröſse des Wertes absteigende, nämlich d, dq, dq^2, dq^3, dq^4. Dem 4ten Glied der aufsteigenden Reihe entspricht im Dome selbst die totale Längenachse; dem vierten Gliede der absteigenden Reihe entspricht als Maſsgröſse im Dome der Sockeldurchmesser der Vierungspfeiler. Die zwei bezeichneten Reihen von Gröſsen bilden eine einzige stetige Reihe von 9 Gliedern, worin dq^4 das an Wert kleinste, dQ^4 das an Wert gröſste und d dasjenige Glied ist, welches an Wert zwischen dq^4 und dQ^4 gerade in der Mitte steht, so daſs diese drei Glieder dq^4, d und dQ^4 eine stetige geometrische Proportion bilden. Hieraus folgt, daſs die Vierungsdiagonale mit dem Durchmesser der Vierungspfeilersockel und mit der Längenachse des Domes fast genau eine stetige geometrische Proportion gibt, was auch die Rechnung bestätigt, denn das Mittelglied dieser Proportion ist $d = 21$ m, und 21^2 ist 441. Die zwei extremen Glieder haben die Werte 3,06 m und 144 m, und das Produkt $3{,}06 \times 144$ ist $= 440{,}64$. Dieses Produkt differiert von jenem Quadrate nur sehr wenig.

Wenn man bei jenen Maſsgröſsen, welche durch Multiplikation der Gröſse d mit den Quotienten q und Q sich ergeben, statt des genauern Ausdruckes in Form eines Dezimalbruches jene ganzen Zahlen, wovon die Dezimalbrüche nur wenig differieren, setzt und dieselben nach der Gröſse ordnet, so erhält man diese Reihe: 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144. Diese Reihe befolgt das Gesetz, daſs zwei vorangehende Zahlen addiert immer die nächstfolgende geben. Es ist diese Zahlenreihe ein Teil derjenigen, welche zuerst von Leonardo von Pisa, einem Zeitgenossen Friedrichs II. des Hohenstaufen, aufgestellt und später nach dem Franzosen Lamé die Lamésche Reihe genannt worden ist[4]). Jene Zahlenreihe hat ferner auch die Eigenschaft, daſs das Verhältnis je zweier benachbarter Glieder dem Verhältnis des goldnen Schnittes um so mehr angenähert ist, je weiter die Glieder vom Anfang der Reihe entfernt sind.

Die soeben nachgewiesenen Maſsgröſsen bilden, nach der Gröſse geordnet, eine stetige Reihe, in welcher je zwei benachbarte Glieder wie Teile des goldnen Schnittes sich verhalten. Es kommen aber in der Längenachse des Domes auſserdem noch einige Maſsverhältnisse vor, die gleichfalls dem goldnen Schnitte entsprechen, aber nicht in die obige Reihe sich einfügen. Dies ist der Fall bei jenem Teile der Längenachse, der von der Westfaçade bis zum Punkte c, des Grundrisses reicht. Diese Strecke, welche volle 130 m miſst, ist in c, dem Mittelpunkt der Vierung, sehr annähernd nach dem goldnen Schnitt geteilt. Ferner verhalten sich jene Linien, welche die Axen der östlichen Vierungspfeiler mit dem Chorcentrum verbinden, zur Diagonale d wie Major zu Minor.

2. Verhältnis der wichtigeren Maſse in der Breitenaxe zu dem Grundmaſse d.

Wenn man diejenigen Dimensionen der Breitenaxe, welche dem Grundmaſse d, oder einem durch den goldnen Schnitt davon abgeleiteten Maſse gleich (resp. sehr annähernd gleich) sind, nach der Gröſse ordnet, so erhält man folgende Reihe:

1. Der diagonale Sockeldurchmesser der Vierungspfeiler ist in der Breitenaxe des Domes derselbe, wie in der Längenaxe, nämlich 3,06 m. (dq^4.)

2. Die innere Breite eines äuſseren Seitenschiffes (zwischen den Pfeilersockeln gemessen) ist = 5 m. (dq^3.)

3. Die innere gröſste Breite der Chorkapellen (siehe im Plane die Linie n n,) miſst nahezu 8 m. (dq^2.)

4. Die innere lichte Breite des Mittelschiffes, zwischen den Hauptdiensten zweier gegenüberstehender Pfeiler des Langhauses auſser der Vierung gemessen, beträgt 13 m = (dq). Wegen der gröſseren Stärke der Vierungspfeiler ist die lichte Breite zwischen den Hauptdiensten zweier gegenüberstehenden Vierungspfeiler um ein Bedeutendes (circa 1 m) geringer, als die lichte Breite zwischen den andern Mittelschiffpfeilern. (Vgl. im Plane die Linie α zwischen zwei Mittelschiffpfeilern.)

5. Die innere Breite zweier Seitenschiffe zusammen (vgl. im Plane die Linie hi) ist ebenfalls = 13 m (resp. dq).

6. Nimmt man zu der in Nr. 5 angegebenen Breite noch einen Strebepfeiler und den auf derselben Seite des Domes gegenüberstehenden Mittelschiffpfeiler (in unserem Grundrisse den Strebepfeiler bei h und den Mittelschiffpfeiler bei i) hinzu, so erhält man eine Breite = 21 m (= d).

7. Wird zu der in Nr. 6 bestimmten Breite noch die lichte Mittelschiffbreite addiert, so ist die Summe = 21 m + 13 m = 34 m (= dQ).

8. Die ganze äuſsere Langhausbreite endlich (im Plane die Linie LM) ist = 55 m (= dQ^2).

Wir haben also folgende Reihe von Maſsgröſsen: dq^4, dq^3, dq^2, dq, d, dQ, dQ^2.

Von den übrigen Dimensionen und Maſsverhältnissen in der Breitenaxe des Domes verdienen noch folgende einer besondern Hervorhebung. Etwas versteckt ist die Proportion des goldnen Schnittes enthalten in dem Verhältnis der Breite des Chorbaues zu derjenigen Breite, welche der Dombau durch das Transsept erhält. Im Grundrisse sieht man in jedem der vier äuſsern Pfeiler an den Portalen des Transseptes kleine Kreise gezeichnet; es sind das bekanntlich die Wendeltreppen, durch welche man aufsteigen kann. Eben solche Wendeltreppen sind in jenen zwei Strebepfeilern, womit das Chorhaupt beginnt, zu sehen. Miſst man nun die Distanzen von dem Mittelpunkte einer Wendeltreppe zu dem Mittelpunkte der gegenüberstehenden, so findet man bei jenen Wendeltreppen, welche in den Pfeilern des Süd- und Nordportales des Transseptes angebracht sind, eine Distanz von 75 m, bei den andern am Chorhaupte eine Distanz von 46,3 m. Diese zwei Distanzen verhalten sich ziemlich genau wie die zwei Teile des goldnen Schnittes, denn betrachtet man die gröfsere Distanz als Major und berechnet dazu den Minor, so ist dieser = 46,35 m. Die ganze äufsere Ausdehnung des Transseptes ist 86 m. Da am Südportale die Pfeiler in der süd-nördlichen Richtung stärker entwickelt sind, als am Nordportale, so ist infolgedessen die südliche Hälfte des Transseptes etwas länger als die nördliche. Die nördliche ist sehr annähernd = 2 d, denn 2 d ist 42 m und circa 42,5 m mifst die nördliche Hälfte des Transseptes incl. des Portalbaues. Wenn also die südliche Hälfte des Transseptes der nördlichen gleich wäre, so betrüge dessen ganze Ausdehnung nur etwa 1 m über 4 d; so aber mifst sie 2 m mehr als 4 d.

Die Breite der Westfront ist sowohl nach den am Plane von Schmitz vorgenommenen Messungen, als auch nach einer Angabe in der Leipziger illustrierten Zeitung 1880 (Kölner Dombaufest) 61 m, wenn unmittelbar über dem Pflaster die Breite des ersten Stockwerkes gemessen wird. Über dem Gesims, womit das erste Stockwerk endet, ist die Breite der Front noch 60 m.

In unserm Grundrifs ist die Frontbreite mit ff bezeichnet und ihr Verhältnis zum Grundmafs d und zugleich zur Langhausbreite läfst sich durch folgende zwei Formeln ausdrücken: ff = Langhausbreite + $2dq^4$; oder ff = $dQ^2 + 2dq^4$, denn die Langhausbreite ist dQ^2. Berechnet man nach der Formel ff = $dQ^2 + 2dq^4$ die Frontbreite, so erhält man 61,104 m. Die Frontbreite geht jederseits über die Langhausbreite um dq^4 hinaus, daher das Plus $2dq^4$.

3. Die wichtigsten Dimensionen der Höhe in ihrem Verhältnisse zum Grundmafse d betrachtet.

Da das von uns angenommene Grundmafs d der Vierung angehört, so ist es angezeigt, unter den Höhendimensionen zuerst jene, welche in, resp. über der Vierung liegen, in Betracht zu ziehen.

a) Die Höhe der Vierungspfeiler, welche zugleich die Höhe aller Mittelschiffpfeiler und der senkrecht aufsteigenden Partie des Mittelschiffes ist, gemessen bis zu dem Punkte, wo die Gewölbegurten über den Pfeiler-Kapitälen ansetzen, beträgt 108 Fuſs = 33,896 m, was nahezu = dQ, jedoch um 0,082 m weniger ist.

β) Die soeben bezeichnete Höhe des senkrechten Teiles des Mittelschiffes ist durch die Triforien-Gallerie, welche das Mittelschiff sowohl des Langhauses als des Transseptes durchzieht und eine Hauptzierde[5]) desselben bildet, in drei Teile zerlegt, wovon der unterste bis zur Triforien-Gallerie reicht, der mittlere jene Gallerie selbst ist und der oberste von jener Gallerie bis zu den Ansatzpunkten der Gewölbegurten sich erstreckt. Die Maſsverhältnisse der bezeichneten Teile sind nun folgende: α) Die unterste Strecke bis zum Sockel der Stäbe der Triforien-Gallerie miſst 66 Fuſs = 20,714 m, was annähernd = d ist. β) Die Triforien-Gallerie selbst hat eine Höhe von 5 m, was nur wenig von dq^3 (4,957) differiert. Die zwei über einander liegenden Teile der Triforien-Gallerie, nämlich Stabwerk und Maſswerk, verhalten sich ihrer Höhe nach zu einander wie dq^4 zu dq^5, resp. wie die zwei Teile des goldnen Schnittes. Es beträgt nämlich die Höhe des Stabwerkes etwas über 3 m (3,1), während dq^5 = 1,9 m die Höhe des Maſswerkes ist.

Hinsichtlich der Triforien-Gallerie sei ferner noch bemerkt, daſs selbst die Durchmesser der Stäbe im Wesentlichen das Gesetz des goldnen Schnittes befolgen; es sind nämlich die Durchmesser der Stäbe und der Sockel derselben von 3 verschiedenen Dimensionen; die stärksten hahen einen Sockeldurchmesser von 17 Zoll. Teilt man nun diesen stärksten Durchmesser nach dem goldnen Schnitt, so treffen auf den Major $10^1/_2$ und auf den Minor noch $6^1/_2$ Zoll. Nahezu ebenso groſs als dieser Minor, nämlich 7 Zoll ist nach der Abbildung bei Schmitz (Lfg. 5, Bl. 6) der Sockeldurchmesser der schwächsten Stäbe, während der Sockeldurchmesser der mittleren fast genau dem angegeben Major entspricht. (Zwischen 10 und 11 Zoll.) Es bilden demnach die Durchmesser jener Stäbe wiederum sehr annähernd eine stetige geometrische Proportion.

γ) Die Strecke, welche von der Triforien-Gallerie bis zum Ansatzpunkte der Gewölbegurten reicht, miſst noch etwas Weniges über 8 m und kann ohne bedeutenden Fehler $= dq^2$ gesetzt werden.

Wir hätten demnach bis jetzt in dem vertikalen Teile des Mittelschiffbaues diese zum Grundmaſse d in Beziehung stehenden Dimensionen gefunden:

1. Stabwerkhöhe der Triforien $=$ 3,1 m (nahezu dq^4).
2. Höhe der Triforien-Gallerie $\doteq$ 5 m („ dq^3).
3. Höhe der Strecke vom oberen Ende der Triforien bis zum Ansatz der Gurtbögen $=$ 8 m („ dq^2).
4. Vom Pflaster bis zu den Triforien $=$ 20,714 m („ d).
5. Totale Höhe der Vierungs- resp. Mittelschiffpfeiler $=$ 33,896 m („ dQ).

Es fehlt in dieser Reihe noch, wie man sieht, zwischen Nr. 3 und 4, resp. zwischen d und dq^2, das Mittelglied dq, welchem ein Maſs von 13 m (abgerundet) entspricht. Dieses Maſs nun ist gegeben in derjenigen Strecke der Mittelschiff- resp. Vierungspfeiler, welche vom Pflaster bis zu dem Ansatzpunkte der Gurtbögen der Seitenschiffgewölbe reicht, denn diese Strecke miſst (nach den Durchschnitten von Schmitz Lfg. 7, Bl. 1 u. 2, Lfg. 12, Bl. 6) gerade 13 m. Wenn man ferner von der Mitte der Oberfläche derjenigen Pfeilerkapitäle, auf welchen die Gurtbögen des Mittelschiffes ansetzen, eine gerade Linie zur Mitte des Schluſssteines, worin die Gurtbögen von zwei entgegengesetzten Seiten zusammentreffen, zieht, so miſst auch diese Linie wieder 13 m. Für die letztere Strecke ist die Messung jedoch nicht so sicher, daſs eine mögliche Abweichung des wirklichen Maſses von dem angegebenen um einige Centimeter ausgeschlossen wäre.

Wir haben demnach auch in den inneren Höhenverhältnissen eine Reihe von Maſsgröſsen erhalten, welche sehr annähernd der stetigen Reihe dq^4, dq^3, dq^2, dq, d, dQ entspricht.

Noch ist zu bemerken, daſs die ganze innere Mittelschiffhöhe nahezu das Dreifache des mittleren Axenabstandes der Vierungspfeiler, in der Richtung der Länge und Breite des Domes genommen, ist, denn der Axenabstand der Vierungspfeiler in der Breitenaxe ist 14,907 m und der Axenabstand in der Längenaxe ist 14,790. Das Mittel aus beiden Abständen ist also 14,848 m und das Dreifache davon ist 44,544 m. Die Gewölbhöhe des Mittelschiffes beträgt aber zwischen 44 und 45 m.

Die wichtigsten Höhendimensionen im Äufseren und deren Beziehungen zum Grundmafse d sind:

a) Die Höhe des Dachfirstes beträgt, wenn die eiserne Bekrönung, welche den Dachfirst ziert, mitgerechnet wird, 63 m, also gerade das Dreifache des Grundmafses d = (3 $\times$ 21 m). Da wir nun vorher fanden, dafs die innere Mittelschiffhöhe das Dreifache des mittleren Axenabstandes der Vierungspfeiler ist, und da andererseits die Dachfirsthöhe das Dreifache der Vierungsdiagonale ist, so folgt hieraus diese Proportion: die innere Mittelschiffhöhe verhält sich zur äufsern Dachfirsthöhe, wie der mittlere Axenabstand der Vierungspfeiler (in der Breiten- und Längenaxe des Domes genommen) zur Diagonale der Vierung.

b) Über den Dachfirst des Transseptes hinaus ragen die Kreuzblumen über den Spitzgiebeln des Süd- und Nordportales. Der höchste Punkt dieser Kreuzblumen hat vom Kirchenpflaster einen vertikalen Abstand von rund 68 m d. i. ein wenig mehr als 2dQ, denn dies ist = 67,956 m.

c) Der Dachreiter hat nach einer aus Cöln mir direkt zugekommenen Mitteilung eine Höhe von 109,8 m, womit auch die in den Aufrissen des Werkes von Schmitz vorgenommenen Messungen bis auf kleine Differenzen stimmen. Diese Mafsgröfse nun ist bis auf eine kleine Differenz = $2dQ^2$, denn dieses ist = 109,956 m. Beachten wir nun dafs der Dachreiter getragen ist von den Vierungspfeilern, so stellt sich eine bemerkte Korrespondenz heraus zwischen den Diagonalen der Vierung und der Höhe des Dachreiters. Die Diagonalen der Vierung sind zusammen = 42 m. Diese Summe mit Q^2 multipliziert gibt 109,956 m, also nur wenig mehr, als die Höhe des Dachreiters.

d) Zwischen der Summe der beiden Vierungsdiagonalen, der Höhe der höchsten Kreuzblumen über dem Süd- und Nordportal und der Höhe des Dachreiters besteht ein solches Verhältnis, dafs diese drei Gröfsen bis auf eine verhältnismäfsig kleine Differenz eine stetige geometrische Proportion und zwar die des goldnen Schnittes bilden, worin die mittlere Proportionale die Höhe der bezeichneten Kreuzblumen ist. Zum Beleg hiefür wollen wir die Quotienten der Verhältnisse der betreffenden Proportion angeben. Teilt man mit der Summe der Vierungsdiagonalen = 42 m, in die Höhe der bezeichneten Kreuzblume (68 m), so ist der Quotient 1,6190. Dieser Quotient weicht von dem des goldnen Schnittes ab um 0,001. Teilt man mit der Höhe jener Kreuzblumen in die Höhe des Dachreiters, so ist der Quotient 1,6147 und dessen Abweichung vom Quotienten des goldnen Schnittes ist = 0,0033. Es differieren also diese beiden Quotienten verhältnismäfsig nur wenig von dem des goldnen Schnittes. Drückt man die drei Mafsgröfsen, welche die obige stetige Proportion bilden, durch d und Q aus, so erhält man folgende Proportion: $2d : 2dQ : 2dQ^2$, oder noch einfacher: $d : dQ : dQ^2$.

e) Diejenigen drei Höhen des äufseren Dombaues, welche als die drei Hauptstufen der äufseren Höhendimensionen sich darstellen, sind die Höhe des Dachfirstes (incl. der Bekrönung), des Dachreiters und der Türme. Diese drei Höhen nun bilden zwar nicht die stetige Proportion des goldnen Schnittes, aber bis auf eine kleine Differenz eine stetige arithmetische Proportion; denn die Differenz zwischen der Höhe des Dachreiters (109,8 m) uud der Dachfirsthöhe (63 m) ist = 46,8 m. Andererseits ist die Differenz zwischen der Höhe der Thürme (157 m) und der Höhe des Dachreiters = 47,2 m. Es ist also die Differenz dieser zwei Differenzen = 0,4 m, was bei solchen Dimensionen unbedeutend ist. Da also die Differenzen nahezu gleich sind, haben wir eine stark angenäherte arithmetische Proportion.

f) Weil in den Türmen die vertikalen Dimensionen des Domes ihr Maximum erreichen, so wollen wir das Verhältnis der Thurmhöhe zu dem Grundmafse d und zu einigen anderen Hauptdimensionen des Domes noch einer speziellen Betrachtung unterziehen.

Über die Höhe der Türme finden sich in der Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht von

Hoffmann Band XIII und XIV zwei verschiedene Angaben; es ist nämlich in Bd. XIII, S. 90 die Höhe zu 157 m, dagegen in Bd. XIV, S. 478 zu 156 m angegeben. Da nun die neueste Schrift über den Dom von Theodor Helmken die Turmhöhe ebenfalls zu 157 m bestimmt, nehmen wir diese Maſsangabe als die richtige an.[6])

Wenn wir nun fragen, wie sich die bezeichnete Turmhöhe zu dem Grundmaſse d verhalte, so ist folgendes zu bemerken: Konstruktiv steht die Turmhöhe in keiner unmittelbaren Beziehung zur Vierung und zur Diagonale derselben, denn es liegt ein ziemlich groſser Zwischenraum zwischen der Vierung und den Türmen. Diejenige Dimension, zu welcher die Turmhöhe in der nächsten und unmittelbarsten Beziehung steht, ist die Breite der Westfaçade, denn die Turmhöhe ist zugleich die Höhe der Westfaçade. Es sind also die Turmhöhe und die Breite der Westfaçade zwei Dimensionen eines und desselben Hauptteiles des Gebäudes.

Bezüglich der Breite der Westfaçade wurde nun weiter oben bereits bemerkt, daſs dieselbe unten resp. im ersten Stockwerke 61 m, oberhalb des Gesimses aber, womit das erste Stockwerk schlieſst, gerade noch 60 m beträgt. Diese letztere Frontbreite nun steht zur Turmhöhe in einem Verhältnisse, das wieder durch den goldnen Schnitt oder den Quotienten Q bestimmt ist, denn die Frontbreite von 60 m mit Q^2 multipltziert gibt 157,081 m also fast genau die Turmhöhe. Würde man umgekehrt von der Turmhöhe als gegebener Gröſse ausgehen, und dieselbe nach dem goldnen Schnitt teilen, so wäre der kleinere Teil bis auf eine Differenz von 1 Zoll gleich der Frontbreite von 60 m. Zwischen der Turmhöhe und Frontbreite besteht dasselbe Verhältnis, wie zwischen der Längenaxe des Domes und der äuſsern Langhausbreite, denn teilt man die Längenaxe, welche 144 m beträgt, nach dem goldnen Schnitt, so ist der kleinere Teil (55,008 m) gleich der äuſsern Langhausbreite. Es besteht also die Proportion, daſs die Langhausbreite zur Längenaxe des Domes sich ebenso verhält, wie die Frontbreite (im Westen) zur Turmhöhe. Wollte man die Turmhöhe durch eine Formel, welche bloſs die Gröſsen d, q und Q enthält, ausdrücken, so würde sehr annähernd diese Formel entsprechen: Turmhöhe $= dQ^4 + dq$; der genaue Wert hiervon ist 156,912 m, was von der gemessenen Turmhöhe nicht ganz um 2 Dezimeter differiert.

Die Turmhöhe steht auch zu den in unserem Grundrisse gezeichneten Diagonalen fd, fd in einem bemerkenswerten Verhältnisse. Die betreffenden Diagonalen gehen, wie man aus dem Grundrisse sieht, von den Ecken des die Westfaçade umschliefsenden Quadrates durch den Mittelpunkt der Vierung bis zur Linie dd, welche als Tangente an den die Ecken der Chorpfeiler umfassenden Halbkreis gezogen ist. Die Länge dieser Diagonalen beträgt in unserem Plane 157 mm, welche in der Wirklichkeit einer Mafsgröfse von 157 m entsprechen. Nun ist aber die Thurmhöhe = 157 m. Jene Diagonalen repräsentieren also die Turmhöhe.

Wenn jener Halbkreis, der die Chorpfeiler umschliefst und berührt, vervollständigt und rektifiziert wird, so ist dessen Peripherie = der Turmhöhe; denn der Radius jenes Kreises ist = 25 m, der Diameter also = 50 m; folglich die Peripherie $= 50 \times 3{,}14159 = 157{,}079$ m. Da der Chorkreis und die Turmhöhe in keiner konstruktiven Beziehung zu einander stehen, ist jene Übereinstimmung der Thurmhöhe mit dem rektifizierten Chorkreis wohl als zufällig zu betrachten.

Die Höhe der Türme selbst ist durch die Lage des höchsten auf der Wendeltreppe ersteigbaren Punktes wieder nach dem goldnen Schnitt geteilt, denn jener Punkt liegt nach Angabe der neuesten Auflage des Meyerschen Reisehandbuches (Rheinlande) 97 m hoch; es bleiben also für die höher gelegene Partie 60 m. Der genau berechnete untere Teil wäre 97,026 m also nur um 1 Zoll gröfser.

II. *Arithmetische Verhältnisse.*

In einem Bauwerke von der Art wie der Kölner Dom lassen sich zweierlei mathematische Elemente unterscheiden: geometrische und arithmetische, Mafs und Zahl, weil ein solcher Bau aus mefsbaren und zählbaren Teilen besteht.

Bei Betrachtung der wichtigsten Mafse und Mafsverhältnisse dieses Domes haben sich zwei Hauptpunkte herausgestellt, erstens nämlich, dafs die Diagonale der Vierung diejenige Mafsgröfse ist, aus welcher die meisten anderen durch den goldnen Schnitt sich ableiten lassen; zweitens daſs die Proportion des goldnen Schnittes in allen drei Raumdimensionen des Baues, in Länge, Breite und Höhe, nicht bloſs vereinzelt, sondern reihenförmig auftritt, also die herrschende Proportion ist.

Mit dieser geometrischen Gesetzmäſsigkeit in den Maſsen des Domes ist nun eine arithmetische Gesetzmäſsigkeit in den Zahlenverhältnissen der diskreten Bauteile nicht bloſs äuſserlich associiert, sondern innerlich durch ein gemeinschaftliches Prinzip verbunden. Dieses gemeinschaftliche, sowohl die Maſs- als Zahlenverhältnisse des Domes beherrschende Prinzip ist das der Dreigliederung.

Bekanntlich ist jede stetige Proportion dreigliedrig. Da nun im Dome, wie wir gesehen, die stetige Proportion des goldnen Schnittes herrscht, so folgt, daſs in den geometrischen Maſsverhältnissen die Dreigliederung dominiert; ohne jedoch die viergliedrige (diskrete) Proportion ganz auszuschlieſsen, denn wir haben gesehen, daſs der mittlere (direkte) Axenabstand der Vierungspfeiler und die Vierungsdiagonale mit der Mittelschiffhöhe und Dachfirsthöhe eine viergliedrige Proportion bilden.

Wie nun in den Maſsverhältnissen — nach dem vorher Gesagten — die dreigliedrige Proportion herrscht, so dominiert in den Zahlenverhältnissen der Bauteile ebenfalls die Dreigliederung resp. Dreizahl, jedoch so, daſs dieselbe in gewissen Bauteilen, wie wir bald sehen werden, zur Fünf- oder Neunzahl entfaltet ist. Am deutlichsten ist die Dreigliederung, wenn wir dieselbe zunächst im Grundrisse verfolgen, ausgesprochen in der Anzahl der Portale, der Turmpfeiler und der Schiffe des Transseptes. Der Dom hat bekanntlich drei Portale: das Hauptportal in der Westfront, dann das Süd- und Nordportal im Querhause. Jedes Portal hat wieder drei Öffnungen, so daſs sich die Dreizahl der Portale zu einer Neunzahl von Portalöffnungen entfaltet. Jeder der beiden Haupttürme erhebt sich, wie man aus dem Grundrisse sieht, auf 3×3 Pfeilern, welche bei jedem einzelnen Turme, wie die Durchschnitte zeigen, in Stärke und Form verschieden sind. Im Transsepte begegnet uns die einfache Dreizahl als Anzahl der Schiffe. Die Fünfzahl der Schiffe im Langhause ist eigentlich als eine weitere Entfaltung der Dreizahl zu betrachten, denn je ein Paar der Seitenschiffe ist in Bezug auf Breite dem Mittelschiffe äquivalent, da die ganze Breite des Langhauses zwar nicht absolut genau, aber sehr annähernd das Dreifache der von Pfeileraxe zu Pfeileraxe gerechneten Breite des Mittelschiffes ist.

Auch in der Längenaxe des Domes zeigt sich zunächst eine Dreigliederung, welche aber, ähnlich wie die Breitenaxe des Langhauses durch eine Untereinteilung der extremen Glieder zur Fünfgliederung sich aufschliefst. Das Mittelglied in der Richtung der Längenaxe ist das Transsept; die beiden extremen Glieder sind die Partieen des Domes östlich und westlich vom Transsept. Jede dieser beiden Partieen ist in zwei Unterglieder geteilt. Die Unterglieder der westlichen Partie sind erstens die beiden Türme mit der von ihnen eingeschlossenen Vorhalle, dann die westliche Partie des Langhauses; die beiden Unterglieder des östlich vom Transsept gelegenen Baues sind der rechtwinklige und der polygone Teil des Chores. Die Herrschaft der Fünfzahl erstreckt sich auch noch auf die Gestalt der Chorkapellen, deren Begrenzung, wie man aus dem Grundrisse sieht, fünfseitig ist.

Was die Siebenzahl der Chorkapellen betrifft, so ist zu bemerken, dafs die sieben Kapellen aus sieben Seiten eines regulären Zwölfeckes, welches dem Chorhaupte zu Grunde liegt, konstruiert sind. Das reguläre Zwölfeck hat aber zu seiner Voraussetzung das reguläre Sechseck und die einfachste reguläre Figur, worauf das Sechseck sich zurückführen läfst, ist bekanntlich das reguläre Dreieck, welches ja auch der Konstruktion des Spitzbogens zu Grunde liegt.

In den vertikalen Dimensionen und deren Abstufungen zeigt sich die Dreigliederung am deutlichsten, wenn man den Bau von aufsen, und zwar von der Rheinbrücke her kommend betrachtet. Drei Hauptstufen der Höhenverhältnisse fallen dann vor allem ins Auge, nämlich der Dachfirst, der Dachreiter und die Türme. Dafs diese drei Höhen nahezu eine stetige arithmetische Proportion bilden, wurde schon früher hervorgehoben.

An dem Türmen selbst aber zeigt sich wieder eine Dreigliederung, denn der Turmbau ist in den untern Stockwerken viereckig, geht dann über zum Oktogon, über welchem zu oberst der Helm sich erhebt.

Im Innern ist zwar die Dreigliederung weniger scharf ausgesprochen, als im Äufsern, aber sie ist vorhanden, am deutlichsten im Mittelschiffe, und zwar so, dafs primär drei, sekundär 2 × 3 also sechs Glieder der ganzen Höhe sich unterscheiden lassen. Das unterste Glied reicht bis zur Triforiengallerie; das zweite Glied ist diese Gallerie selbst, das dritte reicht von dieser Gallerie bis zum Schlufs des Mittelschiffgewölbes. Jede dieser drei Partieen zerlegt sich wieder in zwei Teile; bei der untersten Partie reicht der untere Teil bis zu den Ansatzpunkten der Gurten der Seitenschiffgewölbe; der obere Teil von da bis zu den Triforien: diese gliedern sich vertikal in Stabwerk und Mafswerk; in der Strecke ober den Triforien reicht der untere Teil bis zu den Ansatzpunkten der Gurtbögen des Mittelschiffes, der obere Teil ist durch diese Bögen selbst gebildet.

Die Mittelschiffhöhe zerlegt sich also in 2 × 3 Glieder. Das Prinzip der Dreigliederung hätte in seiner Anwendung auf die Höhenverhältnisse des Innern verlangt, dafs den innern Seitenschiffen eine etwas gröfsere Höhe als den äufsern gegeben worden wäre, was jedoch im Kölner Dome nicht der Fall ist. Im Mailänder Dome, auf den wir später im vergleichenden Teile noch zu sprechen kommen werden, ist die im Kölner Dome fehlende Abstufung der Seitenschiffhöhen eingehalten. Man kann das Fehlen jener Abstufung im Kölner Dome als einen Mangel an Konsequenz in der Durchführung des Prinzips der Dreigliederung betrachten. Auch das proportionale Verhältnis der Seitenschiffhöhe zur Mittelschiffhöhe hätte gewonnen, wenn den innern Seitenschiffen eine etwas gröfsere Höhe als den äufsern gegeben worden wäre. Bei dem gegenwärtigen Verhältnisse ist der Gegensatz zwischen Mittelschiff- und Seitenschiffhöhe etwas zu stark und unvermittelt, wenn auch der Höheneindruck des Mittelschiffes dadurch gewinnen mag.

Wir haben jetzt noch jene arithmetischen Verhältnisse, welche in der Anzahl der Pfeiler sich zeigen, ins Auge zu fassen. Es kommen aufser den Turmpfeilern, welche wir schon in Betracht gezogen, noch drei andere Kategorieen von Pfeilern vor, nämlich im Innern die bündelförmigen Gewölbepfeiler, dann im Aufsenbau die Strebepfeiler und die Portalpfeiler am Nord- und Südportale. Von den Bündelpfeilern sind die meisten freistehend; jene jedoch, die an den Eingängen der Chorkapellen sich finden, sind mit den grofsen Chorstrebepfeilern konstruktiv verbunden.

In allen drei soeben genannten Pfeilergattungen des Domes ist hinsichtlich der Anzahl derjenigen Pfeiler, welche derselben Kategorie angehören, oder eine Gruppe bilden, das Gesetz befolgt, dafs die betreffende Pfeilerzahl Vier oder ein Vielfaches, resp. eine Potenz von Vier ist. Die Zahlen der bündelförmigen Gewölbepfeiler durchlaufen die drei ersten Potenzen der Vierzahl. Die erste Potenz ist gegeben in der Anzahl der Vierungspfeiler, die zweite Potenz in der Anzahl der Transseptpfeiler, deren es, in zwei Reihen verteilt, 16 sind; die dritte Potenz sodann ist repräsentiert in der Gesamtzahl der Bündelpfeiler, denn es sind deren gerade 64. Wir sehen hierin wieder die mafsgebende Bedeutung der Vierung. Bei Betrachtung der Mafsverhältnisse fanden wir, dafs die Vierungsdiagonale mit Q^4 multipliziert die ganze Längenaxe des Domes gab, und jetzt bei der Betrachtung der arithmetischen Verhältnisse bemerken wir, dafs die Anzahl der Vierungspfeiler zur dritten Potenz erhoben die Gesamtzahl der Gewölbepfeiler gibt.

Auch in den zwei andern, oben erwähnten Pfeilergattungen, den Strebe- und Portalpfeilern, tritt die Vierzahl als Grundzahl auf, denn jedes der zwei Seitenportale am Transsepte hat 4 grofse Pfeiler. Strebepfeiler sodann sind es in der westlichen Partie des Langhauses, zwischen den Türmen und dem Transsepte, jederseits 4, also 2×4; desgleichen hat das Transsept aufser den Portalpfeilern auf jeder Seite noch 4 Strebepfeiler, also wieder im ganzen 2×4. Am Chore endlich, östlich vom Transsepte, sind 3×4 grofse und ebenso viele kleinere Strebepfeiler. Im ganzen sind es 10×4 Strebepfeiler. Übrigens tritt in diesen Zahlen, obwohl Vier die Grundzahl ist, doch auch die Dreizahl wieder als bedeutsam auf, denn die Zahlen der Bündelpfeiler im Innern durchlaufen drei Potenzen der Vierzahl, die erste, zweite und dritte; und in den Zahlen der Strebepfeiler gehen die Koeffizienten der Vierzahl bis zur Dreizahl, indem es im Chore 3×4 groſse und 3×4 kleinere Strebepfeiler sind. Die Grundzahl ist 4, aber deren Potenzen und Koeffizienten gehen bis 3.

Schluſsreflexionen zum ersten Teile.

Der Nachweis der Maſse und Maſsverhältnisse hat ein zweifaches Einheitsprinzip oder Maſsprinzip herausgestellt, ein absolutes und ein proportionales; das absolute Einheitsmaſs, wonach die andern sich richten, ist die Diagonale der Vierung; das proportionale Maſsprinzip ist der goldne Schnitt. Diese beiden Maſsprinzipe stehen aber nicht getrennt neben einander, sondern verbinden sich so mit einander, daſs durch Rechnungsoperationen, in welchen die absolute Maſseinheit d mit den Quotienten des goldnen Schnittes vereinigt auftritt, sowohl die wichtigsten absoluten Maſse als die Proportionen des Baues sich bestimmen lieſsen. Durch diese Kombination des goldnen Schnittes mit einer absoluten, innerhalb des Baues liegenden Maſseinheit, unterscheidet sich das hier angewendete Verfahren wesentlich von dem Zeisings.

Mit dem nachgewiesenen zweifachen Maſsprinzip korrespondiert ein zweifaches Zahlprinzip. Der absoluten Maſseinheit der Vierungsdiagonale analog ist die Anzahl der Vierungspfeiler, welche durch Erhebung zur dritten Potenz die Gesamtzahl der Bündelpfeiler und durch Multiplikation mit den Koeffizienten 2 und 3 die Zahl der gruppenweise zusammengehörigen Strebepfeiler gab. Wie die Dimension jener Diagonale als Grundmaſs zu den andern Maſsen sich verhält, so verhält sich die Anzahl der Vierungspfeiler als Grundzahl zu den andern in den Pfeilern auftretenden Zahlen. So entsprechen sich ein Grundmaſs und eine Grundzahl, welche beide in der Vierung vereinigt sind. Wir haben aber noch eine andere Zahl, die Drei, als Grundzahl auftreten sehen und diese korrespondiert mit dem proportionalen Maſsprinzip des goldnen Schnittes insofern, als dieser eine dreigliedrige Proportion ist. Die Dreizahl spielt demnach eine doppelte Rolle, erstens eine geometrische in den Maſsverhältnissen, insofern die darin dominierende Proportion dreigliedrig und geometrisch ist, zweitens eine arithmetische, welche letztere wieder doppelt ist. Denn die Dreizahl tritt auf sowohl selbständig für sich, als auch in Subordination unter die Vierzahl. Wo die Dreizahl als Koeffizient oder als Exponent der Vierzahl erscheint, was bei den Pfeilern der Fall ist, da ist sozusagen die erstere Zahl der letztern subordiniert, denn die Grundzahl ist dort Vier. Wo aber die Dreizahl, oder die zweite Potenz derselben, als Zahl der Portale, der Schiffe, der Turmpfeiler, der Höhenabstufung vorkommt, dort ist sie selbst die Grundzahl. Mit dieser durchgehenden Herrschaft der Drei- und Vierzahl, welche beide bald getrennt, bald zu einem Produkte verbunden auftreten, stimmt nun recht gut die Thatsache überein, dafs der Chor aus einem regulären Zwölfeck, also aus einem Polygon von 3×4 Seiten konstruiert ist. Frägt man etwa noch, welche von diesen zwei Zahlen, Drei und Vier, die prinzipiellere sei, so ist zu antworten, dafs zwar für die Pfeiler des Kirchenbaues, abgesehen von den Türmen, die Vierzahl, für das Ganze aber die Dreizahl die prinzipalere sei, denn die Hauptgliederungen sind, wie wir gezeigt haben, in allen drei Hauptdimensionen von der Dreizahl beherrscht.

Diese Überordnung der Dreizahl über die Vier und die davon abgeleiteten entspricht endlich auch der Idee und Bestimmung des christlichen Gotteshauses, dessen höchster Zweck ja die Anbetung des dreieinigen Gottes durch das Opfer des neuen Bundes ist. Der christliche Kult beruht wesentlich auf zwei Grunddogmen, wovon jedes mit der Dreizahl im engsten Zusammenhange steht. Das erste dieser Dogmen ist das von der hl. Dreieinigkeit, das zweite ist das von der Erlösung der Welt durch den Mittler und Gottmenschen Jesus Christus.[7])

Wir sind hiermit bei einem Punkte angelangt, wo die bisher betrachtete mathematische Gesetzmäfsigkeit des Kölner Domes im Lichte einer höheren religiösen Idee erscheint. Die mathematische Gesetzmäfsigkeit in den Mafs- und Zahlenverhältnissen jenes Baues ist weder erstes Prinzip, noch letzter Zweck. Das tiefer liegende Prinzip ist vielmehr die Idee des christlichen Kultus, für welchen der Dom gebaut wurde, und die mathematische

Gesetzmäfsigkeit, namentlich die Herrschaft der Dreizahl, ist blofs eine architektonische Manifestation der Grundidee dieses Kultus. Es zeigt sich ein eigentümliches Zusammentreffen von Mathematik mit der Religion im Kölner Dom. Es stimmt nämlich die hevorragendste mathematische Eigentümlichkeit dieses Domes vollkommen überein mit dem eigentümlichen Wesen des Kultus, für welchen der Bau errichtet ist. Der katholische Kultus ist die höchste Form der Vermittlung des Gegensatzes zwischen Gott und der Menschheit, denn der gottmenschliche Mittler selbst ist als Hoherpriester und Opfer der Mittelpunkt dieses Kultus. Mit diesem innersten Wesen und Zweck des kathol. Kultus stimmt nun die mathematische Eigentümlichkeit des Kölner Domes insofern überein, als jener mathematischen Eigentümlichkeit ebenfalls das Prinzip der Vermittlung zu Grunde liegt; denn als geometrische Eigentümlichkeit erkannten wir die Herrschaft der stetigen Proportionen, insbesondere des goldnen Schnittes, worin zwei extreme Glieder durch ein Mittelglied verbunden sind; und als arithmetisches Charakteristikon fanden wir die Herrschaft der Dreizahl, welche, soweit sie im Kölner Dom auftritt, wieder aus der Vermittlung zweier extremen Glieder sich ergibt.[8])

Ob nun diese Übereinstimmung des mathematischen Charakters des Kölner Domes mit dessen gottesdienstlicher Bestimmung aus absichtlicher Berechnung hervorgegangen sei oder nicht, diese Frage wollen wir nicht entscheiden.

B. Der Kölner Dom verglichen mit den berühmtesten Bauwerken der verschiedenen Hauptperioden der Architekturgeschichte.

Diese Vergleichung hat den Zweck zu zeigen, welche Hauptstadien die monumentale Architektur durchlaufen hat, bis sie das Ziel, welches im Kölner Dome vor uns steht, erreichte; zugleich soll durch diese Vergleichung dargelegt werden, wie diejenigen architektonischen Elemente, welche der Kölner Dom vereinigt und vollendet zeigt, in frühern Bauwerken teils vereinzelt auftreten, teils vorbereitet sind. Besondere Rücksicht werden wir dabei auf die Maſse und Proportionen nehmen.

a) *Die Cheopspyramide und der Kölner Dom.*

Es ist bekannt, daſs die ägyptischen Pyramiden eigentlich Grabmonumente ägyptischer Könige waren. Sie hatten im Innern eine Grabkammer zur Aufnahme der einbalsamierten Leiche desjenigen Königs, der die Pyramide bauen lieſs. Die gröſste Pyramide, die wir hier mit dem Kölner Dome vergleichen, wurde von dem Könige Chufu oder Cheops, welcher circa 3000 v. Chr. regierte, erbaut. Andrerseits wissen wir, daſs im Dome zu Köln die Reliquien der hl. drei Könige ruhen, weshalb auch eine von den Chorkapellen, die östlichste, die Dreikönigenkapelle heiſst. Es verdankt, wie Beissel[9]) hervorhebt, der Kölner Dom eigentlich seine Entstehung der begeisterten Verehrung der hl. drei Könige und der Wallfahrt zu deren Reliquien. Wir wollen jedoch auf diese Ähnlichkeit der verglichenen zwei Bauwerke in der Entstehungsweise und Bestimmung kein besonderes Gewicht legen. Bedeutsamer für uns sind die architektonischen Verhältnisse, in welchen teils Ähnlichkeit teils Gegensatz sich zeigt. Eine architektonische Ähnlichkeit liegt vor allem in der Pyramidenform, welche auch beim Kölner Dome, nämlich in den Helmen der Türme uns entgegentritt. Freilich ist ein groſser Unterschied zwischen der Cheopspyramide und den Helmen der Kölner Domtürme. Dort haben wir eine vierseitige, hier eine achtseitige Pyramide; dort steht die Pyramide auf der Erde, hier ist der pyramidale Teil des Turmes, der Helm, über einen Unterbau von ca. 96 m aufgesetzt. Dort ist die Pyramide eine äuſserst einfache ungegliederte Masse, hier sind die Massen aufgelöst, gegliedert. Aber die geometrische Grundform ist doch beiderseits dieselbe. In beiden Bauwerken manifestiert sich die der monumentalen Architektur inwohnende Tendenz zur Höhe in imponierenden vertikalen Dimensionen, indem die absolute Höhe der Cheopspyramide nur um 10 bis 11 m geringer als jene der Kölner Domtürme ist. Nach einer Mitteilung von Cl. Riefler, Fabrikant mathematischer Instrumente beträgt die Höhe 146 m, während Ebers[10]) 147 m für die Höhe mit ergänzter Spitze angibt.

Vergleicht man aber beide Bauwerke nicht blofs hinsichtlich der absoluten Höhen, sondern auch mit Rücksicht auf das Verhältnis der Höhe zu den horizontalen Dimensionen, so tritt allerdings im Kölner Dome, resp. in dessen Türmen, der sogenannte Vertikalismus viel reiner und entschiedener auf, als in jener Pyramide. Dies zeigt sich namentlich dann, wenn bei beiden Bauwerken das Verhältnis der Frontbreite zur Höhe näher mathematisch bestimmt wird. Für den Kölner Dom haben wir schon früher das Verhältnis der Breite der Westfront zur Turmhöhe dahin bestimmt, dafs die Frontbreite ff mit Q^2 multipliziert die Turmhöhe gebe. Bei der Cheopspyramide ist die Frontbreite gleich der Länge der Basis = 233 m; diese mit dem absteigenden Quotienten q multipliziert gibt 144 m, was bis auf etwa 2 m Differenz die Höhe der Pyramide ist. Beim Kölner Dome erhält man aus der Frontbreite die Höhe durch Multiplikation der Breite mit dem aufsteigenden Quotienten Q in der zweiten Potenz; bei der Pyramide dagegen gibt die Multiplikation der Breite mit dem absteigenden Quotienten nahezu die Höhe.

b) *Der Kölner Dom verglichen mit einigen ägyptischen Tempeln.*

Der grofse Tempel zu Karnak (vgl. Lepsius, Denkmäler aus Ägypten etc. Abt. 1, Bl. 75 und 78) besteht aus zwei grofsen Komplexen, deren Längenachse eine westöstliche Richtung hat. Der westliche Bau, welcher der besser erhaltene ist, besteht wieder aus zwei grofsen Abteilungen, einer ungedeckten, mit Säulenreihen gezierten Vorhalle und einem grofsen hypostylen Saale mit 134 Säulen. Der Grundrifs beider Räume zusammen ist ein längliches Viereck, an dessen westlicher Seite zwei grofse Pylonen, zwischen denen ein Portal ist, stehen.

Die ganze Baufläche, welche von den Pylonen der Vorhalle und dem Säulensaale bedeckt wird, beträgt über 18000 qm. (18900) und ist ungefähr doppelt so grofs als die vom Kölner Dom incl.

der Türme bedeckte Fläche, welche nach der Angabe von Wiethase (der Dom zu Köln Text S. III) 9850 qm ist. Der Flächeninhalt der Vorhalle allein, und zwar im Lichten, beträgt ca. 8000 qm und ist ungefähr so grofs, wie der Flächeninhalt des Kölner Domes ohne die Türme. Rechnet man beim Säulensaal zur inneren Fläche noch die Fläche, welche die denselben umfassenden Mauerwerke bedecken, so beträgt die Gesamtfläche ebenfalls wenigstens 8000 qm.

Wir sehen hieraus, dafs hinsichtlich der horizontalen Dimensionen, resp. des Flächeninhaltes die bezeichneten zwei Hauptabteilungen des Tempels zu Karnak, schon einzeln genommen, dem Kölner Dome nahezu gleichkommen und zusammen denselben an Fläche weit übertreffen.

Vergleicht man aber diese Bauwerke hinsichtlich der vertikalen Dimensionen, so fällt das Resultat entschieden und in jeder Beziehung zu Gunsten des Kölner Domes aus, denn die Pylonen an der Westfronte des Tempels zu Karnak, welche durch ihre Stellung und Funktion den zwei Türmen an der Westfronte des Kölner Domes analog sind, haben blofs eine Höhe von 43,5 m und werden also von den Kölner Domtürmen mehr als $3\frac{1}{2}$ mal übertroffen; ja sogar die lichte Höhe des Mittelschiffes des Kölner Domes ist gröfser als die Höhe jener Pylonen. Auch die Vergleichung der Freistützen, nämlich der Säulen und Pfeiler in beiden Bauwerken hinsichtlich der Höhe fällt entschieden zu Gunsten des Kölner Domes aus. In beiden Bauwerken — und es ist dies eine bemerkenswerte Analogie — ist das Mittelschiff erhöht über die Seitenschiffe und hat infolge dessen das erstere höhere Freistützen. Beim Tempel zu Karnak nun beträgt die Höhe der Mittelschiffsäulen mit Basis und Kapitäl knapp 19 m, während die Mittelschiffpfeiler des Kölner Domes nahezu 34 m (33,896 m) hoch sind.

Umgekehrt sind die Durchmesser sowohl der Säulen selbst, als auch der Säulensockel und der Kapitäle bei dem ägyptischen Tempel weit gröfser als die korrespondierenden Dimensionen der Pfeiler des Kölner Domes. Die Kapitäle der grofsen Säulen jenes ägyptischen Tempels haben oben, wo sie tellerförmig sich ausbreiten, den kolossalen Durchmesser von 6,7 m. Bei den Kapitälen der grofsen Pfeiler des Kölner Domes ist der Durchmesser nicht einmal halb so grofs. Wir sehen auch hierin wieder die Präponderanz der horizontalen Dimensionen bei dem heidnischen und der vertikalen Dimensionen bei dem christlichen Tempel.

Die Höhen der kleineren Freistützen in den Seitenschiffen der beiden verglichenen Bauwerke differieren nur wenig, denn die kleineren Säulen des ägyptischen Tempels haben inclus. Kapitäl eine Höhe von fast 12, und die Seitenschiffpfeiler im Kölner Dom eine Höhe von 13 m.

Hinsichtlich der Proportionen bemerken wir, dafs die Proportion des goldenen Schnittes auch schon in dem altägyptischen Tempel sowohl im Grundrifs als Aufrifs vorkommt, jedoch nicht so oft und so reihenförmig, wie im Kölner Dom. Im Grundrifs nämlich verhält sich die Langseite desjenigen länglichen Viereckes, welches den Pylonenbau, Vorhof und Säulensaal umfafst, zur Schmalseite oder Breite bis auf eine kleine Differenz wie der Major des goldenen Schnittes zum Minor. Und dasselbe Verhältnis findet statt bei den Säulen zwischen den Durchmessern der Sockel und des Säulenschaftes, sowohl bei den grofsen, als kleinen Säulen, jedoch genauer bei den letzteren.

Der Tempel vom Abydos.

Während der grofse Tempel von Karnak mit dem Dome von Köln hauptsächlich in den kolossalen absoluten Dimensionen Verwandtschaft zeigt, hat dagegen der Tempel von Abydos, dessen Länge noch nicht die Hälfte derjenigen des Kölner Domes beträgt, in den Proportionen eine mehrfache Ähnlichkeit mit dem Dome von Köln. Bei diesen beiden Bauwerken ist die Hauptfaçade breiter als der hinter der Façade liegende Bau, und sogar das Verhältnis dieser zwei Breiten ist nahezu identisch. Beim Kölner Dom verhält sich die Langhausbreite zur Turmfrontbreite wie $55:61 = 1:1{,}109$; beim Tempel von Abydos verhält sich die Tempelbreite hinter den Pylonen zu der durch die Pylonen gebildeten Front wie $37:41 = 1:1{,}08$. Für bedeutsamer jedoch halten wir eine andere Analogie. Bei beiden Bauwerken nämlich erhält man, wenn die Längenaxe nach dem goldnen Schnitt geteilt wird, solche Teile, wovon einer fast genau einer Hauptdimension der Breitenaxe gleich ist, jedoch mit dem Unterschiede, daſs beim Kölner Dom der kleinere Teil der Längenaxe gleich ist der Breite des Langhauses, wogegen beim Tempel von Abydos der gröſsere Teil der geteilten Längenaxe fast gleich ist der Breite der Fronte. Es ist nämlich bei letzterem Tempel die totale Länge = 65,8 m. Der gröſsere Teil hievon nach dem goldenen Schnitt ist 40,664 m, und 41 m beträgt die wirkliche Breite der Front. Nebenbei sei hier bemerkt, daſs auch beim Tempel von Ombos ein ganz ähnliches Verhalten der Frontbreite zur Länge sich zeigt, wie beim Tempel von Abydos, nur mit dem Unterschiede, daſs beim Tempel von Ombos, wenn die innere totale Länge nach dem goldnen Schnitt geteilt wird, der Majorteil nicht der äuſsern, sondern innern Frontbreite gleich ist. Bei dem Tempel von Abydos finden wir aber noch eine weitere und auffallendere Analogie mit dem Kölner Dome. Die Cella jenes ägyptischen Tempels spielt nämlich hinsichtlich der Dimensionen und Proportionen eine ähnliche Rolle, wie im Kölner Dome die Vierung. Zieht man in der Cella jenes Tempels, deren Grundriſs die Form eines länglichen Rechteckes hat, eine Diagonale von einer Ecke zur andern, so miſst diese 9,75 m. Wenn nun diese Diagonale mit Q multipliziert wird, so erhält man gerade das Maſs des Abstandes der Auſsenwand der Tempelmauer von der Innenwand der Cella, welcher Abstand 15,775 m beträgt.

Bezeichnen wir die Diagonale der Cella mit d, die innere Breite derselben mit b, die ganze Tempelbreite mit B, so läſst sich die proportionale und zugleich symmetrische Gliederung der Breitenaxe jenes Tempels in dem Teil, wo die Cella ist, durch folgende Formel darstellen: $B = dQ + b + dQ$, d. h.: Wenn man an die innere Breite der Cella ($= b$) beiderseits eine Strecke $= dQ$ ansetzt, so erhält man die ganze Tempelbreite. Wir wollen diese Behauptung durch Maſsangaben rechtfertigen. Die innere Cellabreite b ist 5,5 m, die innere Diagonale d ist = 9,75 m; dQ ist = 15,775 m; demnach ist $dQ + b + dQ = b + 2\,dQ$

$= 5{,}5 \text{ m} + 2 \times 15{,}775 \text{ m} = 37{,}05$ m. Nun ist die wirkliche totale Breite des Tempels (B) = 37 m.

Tempel von Dendera.

Noch viel durchgreifender als bei dem betrachteten Tempel ist die Analogie mit dem Kölner Dom bei dem grofsen Tempel von Dendera. Nach dem Grundrisse und Mafsstabe im Werke von Lepsius Abth. I Bl. 66 ist die totale äufsere Länge dieses Tempels 82 m. Die Diagonale der Cella von einer Ecke zur andern mifst 12 m. Bezeichnen wir die Diagonale wieder mit d, so ist $dQ = 19{,}416$ m und fast genau soviel, nämlich 19,5 m mifst die innere Tiefe des vordern grofsen Säulensaales dieses Tempels. Es ist ferner $dQ^2 = 31{,}416$ m und fast genau solang ist jener Teil des Tempels, der zwischen dem so eben bezeichneten Saale und der Cella liegt, wenn die Dicke der zwischen dem erstern und zweiten Saale stehenden Mauer mit gerechnet wird. Dieser Teil hat eine Länge = 31,5 m. Der Abstand des Cellaeinganges vom Eingang in den vordern Saal, resp. von der Innenwand der Frontmauer, mifst 50,75 m und diese Gröfse ist fast identisch mit dQ^3, denn dQ^3 ist $= 50{,}832$ m. Endlich ist, wie schon oben bemerkt, die ganze Tempellänge = 82 m, und dieses Mafs ist nicht stark verschieden von dQ^4, was $= 82{,}248$ m ist. Die bemerkenswerteste Analogie dieses Tempel mit dem Kölner Dome liegt nun darin, dafs beim Kölner Dome die Diagonale der Vierung, hier aber die Diagonale der Cella mit Q^4 multipliziert sehr annährend die ganze Länge des Baues gibt, nur ist die Differenz der berechneten und der gemessenen Dimension beim Kölner Dome noch kleiner als bei jenem ägyptischen Tempel, denn sie beträgt in Köln nur circa 6 cm, hier dagegen nahezu ein Viertel m, was allerdings bei einer absoluten Länge des Tempels von 82 m eine verhältnismäfsig kleine Abweichung ist, da sie weniger als $^1/_{300}$ der ganzen Länge beträgt.

c) *Der Kölner Dom verglichen mit griechischen Tempeln.*

Der Parthenon, zu dessen Bau die Vorbereitungen von Perikles um 460 v. Chr. getroffen wurden, ist wahrscheinlich im Jahre 438 v. Chr. vollendet worden und gilt als das vollendetste Meisterwerk der hellenischen Architektur.

Was die absoluten Gröſseverhältnisse des Parthenon betrifft, so stehen alle hinter jenen des Kölner Domes weit zurück. Aus dem Grundrisse in dem Werke von Baumeister, Denkmäler des klassischen Altertumes S. 1172 berechnet sich die Länge, wenn man die Säulenreihen an den Flanken als Länge annimmt, zu 70 m; der Unterbau hat eine Länge von 73 m. Die Säulenreihe an der Front hat eine Ausdehnung von 31 m; der Unterbau an der Front ist 34 m breit. Die vom Tempel samt Unterbau bedeckte Fläche miſst demnach circa 2400 qm, was etwa ein Viertel der vom Kölner Dom bedeckten Fläche ist. Noch stärker ist die Präponderanz des Kölner Domes in den vertikalen Dimensionen, denn die ganze Höhe des Parthenon von der untersten Stufe des Unterbaues bis zur Giebelspitze beträgt nicht ganz 20 m (genauer 19,8 m.) Die Giebelspitze des Parthenons erreicht demnach nicht einmal die halbe Höhe des Mittelschiffes des Domes zu Köln und die Kölner Domtürme sind fast achtmal höher als der ganze Parthenon. Dieser gewaltige Unterschied der Höhenverhältnisse, der sich hier bei Vergleichung des Parthenon mit dem Kölner Dome herausstellt, ist im innersten Wesen der Religionen, aus welchen jene Bauwerke hervorgegangnn sind, begründet. Eine Religion, deren ganzes Wesen und Wirken darauf abzielt, den Menschen über alles Irdische zu erheben, muſste notwendig auch in der Architektur ihren Ausdruck finden und Höhenverhältnisse schaffen, welche über jene der heidnischen Bauwerke weit hinausgehen.

Die Proportionen des Parthenon zeigen einige bemerkenswerte Analogieen mit jenen des Kölner Domes, insofern nämlich die Dimensionen der Cella hier eine ähnliche maſsgebende Bedeutung für die anderen Dimensionen haben, wie beim Kölner Dome die Dimensionen der Vierung. Es ist jedoch im Parthenon nicht so durchweg die Diagonale der Cella, wie beim Kölner Dome die Diagonale der Vierung, sondern teils die Diagonale, teils die innere Breite der Cella maſsgebend. Die innere Cellabreite wird angegeben zu 19,19 m (Vgl. das Werk von Baumeister, Denkmäler etc. Plan S. 1172). Diese Breite mit Q vermehrt gibt 31,04 m, was mit der bei Baumeister angegebenen Tempelbreite von rund 31 m zureichend stimmt. Ferner ist die Tempelhöhe von der untersten Stufe bis zur Giebelspitze nur wenig von der innern Cellabreite verschieden, denn jene Höhe bewegt sich zwischen 19,7 m und 19,8 m.

Einige Hauptdimensionen aber stehen zur Diagonale der Cella in einem solchen Verhältnisse, dafs sie durch gewisse einfache Operationen aus jener Diagonale sich herleiten lassen. Da die innere Cellabreite 19,19 m und deren innere Länge 29,89 m beträgt, berechnet sich hieraus die Diagonale auf 35,5 m. Diese Diagonale verdoppelt gibt ziemlich annähernd die ganze Tempellänge, welche im Brockhaus'schen Lexikon (neueste Auflage. Athen) zu 71,3 m angegeben ist. Hiebei ist wohl die Länge des Stylobates gemeint. Wenn man die Celladiagonale mit Q multipliziert, ist das Produkt 57,4 m und das ist der Längenabstand zwischen jenen zwei innern Säulenreihen, welche an den beiden Schmalseiten des Tempels parallel zu den äufsern Reihen stehen, wenn der Abstand von Säulenaxe zu Säulenaxe genommen wird. Wird die Celladiagonale mit dem absteigenden Quotienten q vermehrt, so erhält man sehr annähernd die äufsere Cellabreite, welche gemessen 21,72 m ist. (Die Formel dq würde 21,9 m geben.) Ferner ist $dq^2 = 35{,}5 \text{ m} \times 0{,}3819 = 13{,}55 \text{ m}$, was mit der Tiefe des Opisthodomos = 13,37 m ziemlich annähernd stimmt.

Im Grundrisse des kleinen Tempels von Pästum (abgebildet in Winkelmanns Werken Tafel 5) erhält man aus der Diagonale der Cella durch Multiplikation mit Q den Axenabstand der Säulen der Front von den Säulen an der Rückseite des Tempels. Im Grundrisse des gröfsern Tempels von Pästum erhält man aus der äufsern Breite der Cella durch Multiplikation mit Q den Axenabstand der beiden Ecksäulen an der Front von einander. Jene Breite und dieser Abstand sind parallel.

d) *Die Basilica des hl. Paulus zu Rom verglichen mit dem Dom zu Köln.*

Unter den altchristlichen Basiliken war eine der gröfsten und schönsten die Basilika des hl. Paulus zu Rom aufser den Mauern, welche im Jahre 1823 durch einen Brand gröfstenteils zerstört, aber in der ursprünglichen Gröfse und Stylart wieder neu aufgebaut wurde. Hübsch in seinem Werke: die altchristlichen Kirchen, Text S. 16. sagt von dieser Kirche: „Die Grundanlage der Paulskirche is über alle Mafsen grofsartig; eine fünfschiffige Basilika mit einem immensen Transsept.“ Über die Flächengröfse sagt derselbe Autor: „Der Riesenbau der Paulskirche verwirklichte die Überdeckung des immensen Raumes von beiläufig 7000 qm und übertraf weitaus die gröfsten überdeckten Räume der heidnischen Welt; noch mehr wurden letztere durch diesen christlichen Bau in der Kühnheit der Konstruktion übertroffen. Auf zwei Säulenbogenstellungen von ziemlich weiten Interkolumnien erhoben sich die Mittelschiffmauern bis zu einer Höhe von 28 m vom Boden.“

Die lichte Mittelschiffhöhe dieser Basilika übertrifft weit nicht blofs die innere, sondern auch die äufsere Höhe aller vorchristlichen heidnischen Tempelbauten. Selbst das Mittelschiff des Tempels zu Karnak würde mit seiner Steindecke noch nicht an den Plafond jener Basilika hinaufreichen. Es würden dazu wenigstens noch 4 m fehlen, und die Gröfse des überdeckten Innenraumes ist bei der Pauls-Basilika um wenigstens anderthalb Tausend Quadratmeter gröfser, als bei dem grofsen Säulensaale zu Karnak. Auch von dem Kölner Dome wird die Pauls-Basilika, was die Gröfse des freien Innenraumes betrifft, nicht übertroffen, denn dieser innere Raum beträgt bei der Pauls-Basilika circa 6800 qm.

Der Fortschritt, welchen die Architektur des Kölner Domes über jene Basilika hinaus aufweist, zeigt sich vorzugsweise in der reichen Ausbildung des Chores, dann im Transsept, welches beim Kölner Dome dreischiffig und mit zwei grofsen Portalen geziert ist, was bei jener Basilika nicht der Fall ist, ferner in der gewölbten Decke, den Türmen und den vertikalen Dimensionen, welche jene der Paulsbasilika allerdings noch stark übertreffen, denn die Mittelschiffhöhe des Kölner Domes geht über die jener Basilika noch um 17 m hinaus. In den Proportionen zeigt sich wieder eine bemerkenswerte Analogie. Zwar hat jene Basilika keine Vierung, aber der Durchmesser der Apsis hat hier für die Hauptdimensionen eine ähnliche Bedeutung, wie beim Kölner Dome die Diagonale der Vierung. Von jenem Durchmesser ist im Plane von Hübsch das Mafs 22,7 m angegeben. Diesem Durchmesser gleich ist nun die Breite, resp. Tiefe des Transseptes. Wird jener Durchmesser (D) mit Q multipliziert, so ist das Produkt 36,7 m und so grofs ist die Tiefe des Transseptes und der Absis zusammen, wenn bei letzterer die Mauerdicke mitgemessen wird.

An die Gröfse $DQ = 36{,}7$ würde sich nun zunächst DQ^2 anschliefsen, was $= 59{,}4$ m ist. Unter den Mafsen der Basilika nähert sich dieser Gröfse am meisten die innere totale Breite des Langhauses, welche von Mauer zu Mauer 60,7 m beträgt. Wie man sieht ist die Abweichung dieser Dimension von der Gröfse DQ^2 ziemlich bedeutend, nämlich 1,3 m. Viel mehr stimmt die nächstfolgende aus D ableitbare Gröfse, nämlich DQ^3 wieder mit einer Hauptdimension jenes Baues überein. Es ist nämlich $DQ^3 = 96{,}15$ m und fast ebenso grofs ist die Länge des Baues von der Front bis zum Transsept. Die ganze Länge läfst sich aber ausdrücken durch $DQ^3 + DQ = 132{,}85$ m. Auch die absteigenden Quotienten q, q^2, mit dem Diameter der Apsis multipliziert geben solche Mafsgröfsen, die im Baue repräsentiert sind. Es ist nämlich $dq = 14{,}0$ m und so grofs, vielleicht ein wenig mehr ist die Weite des Triumphbogens, welcher aus dem Langhaus in das Transsept führt. Es ist ferner $dq^2 = 8{,}66$ m und soviel, resp. 8,6 m beträgt die Breite der äufsern Seitenschiffe, sowie auch die Tiefe der Vorhalle.

e) *Der Dom von Pisa verglichen mit dem von Köln.*

Der Bau des Domes von Pisa wurde nach einer Unterbrechung anno 1063 wieder aufgenommen. Die horizontalen Dimensionen dieses Domes stehen sowohl denen der Paulskirche als jenen des Kölner Domes bedeutend nach. Die lichte Mittelschiffshöhe ist jedoch dieselbe wie jene der Pauls-Basilika (28 m). Das Transsept zeigt einen bedeutenden Fortschritt über jene Basilika hinaus, denn es ist dreischiffig und hat an beiden Enden eine Apsis, was bei der Paulsbasilika nicht der Fall ist. Aber der Kölner Dom zeigt in der Ausbildung des Transseptes durch seine prachtvollen Portale noch einen Fortschritt über den Pisaner Dom hinaus. Die Hauptfront ist bei diesem Dome durch Arkaden reich gegliedert, aber noch ohne Türme. Die Diagonale der Vierung hat, wie wir bei Besprechung des Speyerer Domes hervorheben werden, eine ähnliche Bedeutung, wie im Kölner Dome, aber nicht so durchgreifend.

f) *Der Dom zu Speyer verglichen mit den Domen zu Pisa und Köln.*

Über das Verhältnis des Speyrer Domes (gegründet durch Kaiser Konrad II. 1030) zu dem von Pisa sagt Lützow: (Die Meisterwerke der Kirchenbaukunst. S. 112.) „Wenn man nur auf die horizontale Disposition der Teile sieht, so könnte die Gliederung des Pisaner Domes fast reicher als die der Speyrer Kathedrale erscheinen. Namentlich die Durchführung der mehrschiffigen Anlage durch den Querbau und den östlichen Teil des Langhauses bis unmittelbar vor die Altarnische geben dem Dome von Pisa einen so freien und eleganten Charakter. Umgekehrt ist die Sachlage, wenn man den Aufbau bei der Vergleichung mit ins Auge faſst. In dieser Beziehung vertritt der Dom von Speyer eine weit höhere Stufe der mittelalterlichen Kirchenbaukunst, als der von Pisa.“ Allerdings ist das Transsept des Speyrer Domes sowohl hinsichtlich der Längenausdehnung als der Einteilung weniger ausgebildet, als jenes des Domes von Pisa; aber in der Deckung der Schiffe durch Kreuzgewölbe statt der flachen Decke und in den vertikalen Dimensionen zeigt der Speyrer Dom eine entschiedene Überlegenheit über jenen von Pisa. Die lichte Mittelschiffhöhe des Pisaner Domes ist dieselbe wie die der Pauls-Basilika in Rom, 28 m, was allerdings eine bedeutende Höhe ist; aber die Mittelschiffhöhe des Domes zu Speyer ist noch um 4 m gröfser, nämlich 32 Meter und die Differenz in der Höhe der Dachfirste beträgt sogar 13 Meter. Hiezu kommt, dafs der Dom zu Speyer vier mit der Kirche architektonisch verbundene Türme hat.

Die Überlegenheit des Kölner Domes über jenen von Speyer zeigt sich am stärksten in den vertikalen Dimensionen, denn die östlichen Türme des Speyrer Domes werden von jenen zu Köln fast um das Doppelte, die westlichen um mehr als das Doppelte übertroffen und das Mittelschiff des Kölner Domes ist um 13 m höher als jenes in Speyer.

Alle drei zuletzt verglichenen Dome, jener zu Pisa, zu Speyer und zu Köln haben die gemeinsame Eigenschaft, dafs die Diagonale der Vierung mit Q oder Q^2 multipliziert die äufsere Breite des Langhauses ziemlich genau gibt. Bezüglich des Kölner Domes wurde bereits früher bewiesen, dafs die Langhausbreite $= dQ^2$ ist. Bei dem Dome von Pisa beträgt die Vierungsdiagonale 22,5 m und dQ ist dann 36,40 m, welche Gröfse der Langhausbreite dieses Domes gleich ist. Im Dome von Speyer ist die Diagonale der Vierung 23 m lang; und dQ ist 37,214 m, welche Gröfse von der äufsern Breite des Langhauses, wenn überhaupt eine Differenz besteht, jedenfalls nur sehr wenig differiert. Die Höhe der Mittelschiffpfeiler des Speyrer Domes ist jener Diagonale gleich.

g) *Vergleichung des Kölner Domes mit einigen gotischen Kirchen.*

Bekanntlich ist der gotische Kirchenbaustyl, wie die neueren Forschungen zweifellos festgestellt haben, zuerst in Frankreich entstanden und erst von dort nach Deutschland gekommen. Über die Entstehung der Gotik in Frankreich und speziell über das idealreligiöse Motiv, welches dabei wirksam war, sagt Quast (Die Entwicklung der kirchlichen Baukunst des Mittelalters S. 33) sehr treffend: „Allerdings darf nicht verkannt werden, dafs als eigentlich belebendes Prinzip die ideale Gesinnung thätig war: die Gott geweihten Hallen, in welchen man seine leibhafte

Gegenwart verehren wollte, demgemäfs in jeder Weise würdig herzustellen und sie namentlich zu einer Höhe zu erheben, wie sie die irdischen Stoffe nur irgend zuliefsen. — Hiezu war die Annahme des Spitzbogens von höchster Bedeutung. Zuerst von den Arabern zu allgemeiner architektonischer Anwendung gebracht, im südlichen Frankreich durch die Nachbarschaft derselben bereits im 11. Jahrhundert in Anwendung, fand man nun seit dem 12. Jahrhundert auch im nördlichen in ihm diejenige Form, welche allen hochstrebenden Tendenzen des Kirchenbaues die letzte Vollendung zu verleihen geeignet schien. Noch weniger lastend wie rundbogige Kreuzgewölbe, schienen die spitzbogigen mit ihren Rippen, als letzte Ausläufer des hochstrebenden Pfeilergestänges alle Gedanken, alles Sehnen der Gläubigen bis zum Himmel selbst emporzuleiten.“

Von den Kirchen gotischen Styles, welche in Frankreich vor der Gründung des Kölner Domes entstanden, wollen wir hier nur einige der bedeutenderen nennen, nämlich: die Abteikirche zu St. Denis bei Paris, erbaut von 1135—1144; die Kathedrale von Chartres, welche wenigstens vor dem Kölner Dom begonnen wurde; die Kathedrale Notre Dame zu Paris, begonnen 1163; jene von Soissons, begonnen 1175; der Dom von Rheims und jener von Amiens, 1220 mit der Westfront begonnen. Quast bezeichnet diese letztgenannte Kirche als das höchste Werk der französischen Kirchenbaukunst. Der so eben genannte Autor hat auf einer Tafel den Durchschnitt des Mittelschiffes des Kölner Domes zur Vergleichung neben die Durchschnitte des Mittelschiffes von vier verschiedenen französischen Kirchen gotischen Styles, worunter jedoch die von Amiens nicht ist, gestellt. Beim Anblick dieser Durchschnitte sieht man ohne weiteres, wie gewaltig jener des Kölner Domes über die anderen hinausgeht; der niederste jener Durchschnitte (Chor von S. Germain des Prés) erreicht nicht einmal die halbe Höhe desjenigen des Kölner Domes. Vernehmen wir auch noch das Urteil von Quast über den Kölner Dom und sein Verhältnis zu den französischen Kirchen: „Wir sehen im Grundrisse alle Teile, welche anderwärts vereinzelt oder im Werden begriffen waren, hier zur höchsten harmonischen Vollendung gediehen, nur in wenigen von dem abweichend, was Amiens bereits geleistet, aber dasselbe noch übertreffend. Dieses Vorbild ist nicht zu verkennen. — Doch bei aller Verwandtschaft ist zugleich ein gleichmäſsiger Fortschritt aller Teile beim deutschen Dome nicht zu verkennen, der auch in der absoluten Höhe die der Kathedrale von Amiens noch um mehr als zehn Fuſs übertrifft. Die aufsteigenden Verhältnisse des Innern, die Leichtigkeit der gruppierten Pfeilerbündel, die reiche Ausbildung des Triforiums und des Maſswerkes der Fenster werden von keinem bekannten Bauwerke erreicht. — Vor allem ist es aber das Äuſsere, worin unsere Kirche unübertroffen dasteht. Der Anblick des den Chorschluſs umgrenzenden Pfeilerwaldes, . . . nicht minder die zierlichst durchbrochenen Galerien der Krönungen und die ihnen eingewobenen Fenstergiebel mit ihrem reichen Maſswerk und dem der Fenster stehen einzig in der Welt da. Nur durch die Doppeltürme der Westfronte sollten sie überboten werden. — Der untere Teil des Baues, der hievon allein vollendet wurde (Quast schrieb dies 1858) und der uns aufbewahrte Riſs des Ganzen zeigen, daſs der Meister dieses Riesenentwurfs der Gröſse seiner Aufgabe im vollsten Maſse sich bewuſst und seiner würdig war, da die oberste Spitze nur die letzte Entfaltung des in konsequentester Weise zur höchsten Höhe emporstrebenden Geistes war, der bereits in den untersten Fialen und den andern sich übersteigenden Formbildungen seines Zieles gewiſs war. — Aber mit diesem Entwurfe war nicht nur das Höchste erreicht, dessen der menschliche Geist in dieser Beziehung fähig war, es trat auch alsobald ein jäher Verfall ein.“ Quast war, wie man sieht, der festen Überzeugung, daſs die Kölner Domthürme nur die letzte und notwendige Konsequenz des Prinzipes der Gotik sind, womit die Annahme, daſs die Türme nur eine spätere Zuthat zum ursprünglichen Plane seien, unvereinbar ist.[11]) Wer für die in der Geschichte der Architektur überhaupt und in der Gotik insbesondere zu Tage tretende logische Konsequenz auch nur einigen Sinn hat, wird sich nicht zu der eben erwähnten Annahme verstehen können. Verfolgt man die Geschichte der Architektur vom Gesichtspunkte der logischen Konsequenz, so sieht man, wie der architektonische Geist mit einer durch Jahrtausende hindurchgehenden Beharrlichkeit die vertikalen Dimensionen und Glieder der Bauwerke von Stufe zu Stufe zu steigern sucht. Ein grofser Schritt in dieser Richtung war die Herstellung der Gewölbe statt flacher Decken und der nächste grofse Schritt war der Spitzbogen und das Spitzbogengewölbe, der letzte Schritt aber lag in der Entwicklung des Turmbaues zu derjenigen Höhe, welche wir in den Kölner Domtürmen verwirklicht sehen. Eine weitere Steigerung der vertikalen Verhältnisse über jene des Kölner Domes hinaus hat bis jetzt in der kirchlichlichen Architektur faktisch nicht mehr stattgefunden und wäre, abgesehen von der Schwierigkeit der Ausführung auch kaum mehr ästhetisch motiviert; hat man doch im Kölner Dome schon die Höhe des Mittelschiffes als übertrieben tadeln wollen. Dafs die Seitenschiffe im Verhältnis zum Mittelschiff vielleicht etwas zu niedrig sind, möchten wir selbst nicht in Abrede stellen.

h) *Vergleichung des Kölner Domes mit jenem von Mailand.*

Man kann in der Geschichte der Architektur eine aufsteigende und absteigende Bewegung unterscheiden. Der aufsteigende Prozefs hat in der Gotik und diese wieder im Kölner Dom ihren Kulminationspunkt erreicht. Die absteigende Bewegung durchlief ähnlich wie die aufsteigende mehrere Stadien. Als erstes Stadium mufs die Spätgotik bezeichnet werden; das zweite Hauptstadium der absteigenden Bewegung war der Renaissancestyl, auf welchen bekanntlich der Roccoco- Barok- und Zopfstyl folgten.

Wir werden die Vergleichung des Kölner Domes mit anderen Meisterwerken der Architektur nur noch bis in die spätere Gotik und die Hoch-Renaissance fortsetzen, weil nur diese Stadien der absteigenden Architekturbewegung noch solche Werke, welche mit dem Kölner Dome verglichen zu werden verdienen, aufweisen.

Unter den kirchlichen Bauwerken der späteren Gotik ist der Dom zu Mailand wohl das grofsartigste und übertrifft sogar den Kölner Dom wenigstens in Bezug auf Flächeninhalt. Lützow (die Meisterwerke der Kirchenbaukunst S. 351) sagt: „Der Mailänder Dom ist hochberühmt als eines der Wunderwerke der christlichen Architektur. Keine Beschreibung erreicht den zauberhaften Eindruck seiner kolossalen Mauermassen mit ihren tausend Fialen und Statuen, welche sämtlich in dem herrlichen weifsen Marmor von Candoglia strahlen.“ Der Grundstein zu diesem Dome wurde von dem Grafen Giovanni Galeazzo Visconti, Herzog von Mailand am 15. März 1386 gelegt. Ein deutscher Architekt, Heinrich von Gmünd war nach den besten Gewährsmännern der Schöpfer und erste Leiter des Dombaues. Nach der Angabe von Lützow beläuft sich die Bodenfläche des Domes auf 110,808 P. □', das sind über 11000 qm. Die innere Länge des Ganzen beträgt nach dem genannten Autor 448½', was etwas über 145 m gibt. Demnach ist die innere Länge dieses Domes ohne Türme[12]) etwas gröfser als die äufsere Länge des Kölner mit den Türmen. Desgleichen ist auch die innere Breite gröfser nicht blofs als die innere, sondern auch als die äufsere des Kölner, nämlich 57,67 m. Die äufsere Breite ist circa 68 m und das Transept um 1 m länger als beim Kölner Dom. Auch die vertikalen Dimensionen des Innern, nämlich der Schiffe übertreffen jene des Kölner. Aber dieser übertrifft den Mailänder weit durch Reinheit des Styles, denn die Gotik des Mailänder Domes ist stark mit Renaissance-Elementen versetzt, und wegen der bedeutenden Breite sowohl des Ganzen als der Schiffe tritt der Vertikalismus im Mailänder nicht so imposant und rein auf, wie im Kölner. Im Mittelschiffe fehlt die Triforiengallerie. Das Nachlassen des Vertikalismus zeigt sich auch in dem Fehlen der Türme an der Fronte.

Hinsichtlich der Proportionen ist hervorzuheben, dafs auch im Mailänder Dom, wenn die Vierungsdiagonale bestimmt und mit d bezeichnet wird, mehre andere Hauptdimensionen durch Formeln, welche blos die Gröfsen d und Q enthalten, sich sehr annähernd ausdrücken lassen. Die Diagonale mifst hier 80 P.Fufs = 25,98 m. Der Wert von dQ ist dann 42,03 m und dieser Gröfse entspricht der Teil der Längenaxe des Domes, welcher östlich von der Vierung liegt, denn dieser mifst incl. der östlichen Chormauer etwas über 42 m. Die Formel dQ^2 gibt 68,01 m. Damit nun stimmt bis auf ein Defizit von etwa 0,5 m die volle äufsere Breite des Domes. Eine auffallende Analogie in den Proportionen zwischen Kölner und Mailänder Dom ist folgende: bei beiden Kirchen entspricht der Teil der Längenaxe, welcher von der Hauptfront bis zum Ostende der Vierung reicht, der Formel dQ^3. Beim Kölner Dom ist der Wert dieser Formel in abgerundetem Mafse 89 m. Beim Mailänder Dome, wo d gröfser ist, beträgt dQ^3 110,05 m, also abgerundet 110 m und ebensoviel mifst die Strecke von der Aufsenseite der Westfront bis zum Ostende der Vierung. Vergleicht man aber die ostwärts von der Vierung liegenden Teile beider Dome, so zeigt sich ein grofser Unterschied, denn beim Kölner Dom entspricht jener Teil der Formel dQ^2, beim Mailänder gilt die Formel dQ. Bei dem einen Dome, dem Kölner, läfst sich die Längenaxe ausdrücken durch die Summe $dQ^2 + dQ^3$; bei dem andern durch die Summe $dQ + dQ^3$. Diese Formeln sprechen deutlich für einen Vorzug des Kölner Domes in Bezug auf Proportionalität, denn die zwei Summanden der ersten Formel folgen stetig auf einander und bilden die stetige Proportion des goldnen Schnittes, was bei den Summanden der zweiten Formel nicht der Fall ist. Es fehlt dort das Mittelglied dQ^2.

Vgl. den Ausdruck $DQ + DQ^3$ als Darstellung der zwei Hauptteile der Längenaxe der Paulsbasilika zu Rom, oben S. 336.

i) *Die Peterskirche zu Rom verglichen mit dem Kölner Dom.*

Wir beschliefsen unsere Vergleichungen des Kölner Domes mit anderen Kirchen mit dem gröfsten Tempelbauwerke der christlichen Welt, dem Dome von St. Peter, dessen Bau an der Stelle der alten Peterskirche unter Papst Nicolaus V. anno 1450 begonnen und unter den nachfolgenden Päpsten fortgesetzt wurde. Die wichtigeren absoluten Dimensionen und deren Verhältnisse zu jenen des Kölner Domes sind folgende:

Innere Länge 186 m, äufsere Länge circa 215 m.

Innere Länge des Transsepts circa 140 m, äufsere circa 150 m.

Es hat also schon das Transsept eine gröfsere Ausdehnung, als die ganze Länge des Kölner Domes ist.

Der Flächeninhalt von St. Peter ist 199 926 Par. □ Fufs, etwas mehr als das Doppelte der Baufläche des Kölner Domes. Die Höhe des Mittelschiffes mifst nach Lützow $147\,^2/_3$ Fufs, nahezu 48 m, übertrifft also die Höhe des Mittelschiffes von Köln um ca 3 m. Hiebei ist jedoch zu beachten, dafs die Breite des Mittelschiffes in St. Peter fast doppelt so grofs ist, als im Dome von Köln. Beim Kölner Dom ist die Höhe des Mittelschiffes das Dreifache der Breite, in der Peterskirche noch nicht das Zweifache. Infolge dessen macht die Höhe des Mittelschiffes beim Kölner Dom einen mächtigeren Eindruck, als in der Peterskirche, obwohl die absolute Höhe in der letztern etwas gröfser ist. Die Höhe der Kuppel ist in der mathematischen Zeitschrift von Hoffmann IV. 478, zu 138,7 m angegeben, wird also von den Kölner Domtürmen um ca 8 m übertroffen.

Hinsichtlich der Proportionen und des Verhaltens zum goldenen Schnitt zeigt der Petersdom wieder ein ähnliches Verhalten wie dasjenige ist, welches wir bereits bei den Domen von Pisa, Speyer, Köln und Mailand gefunden. Es steht nämlich auch hier wieder die Diagonale der Vierung, wenn diese zwischen den Mittelpunkten zweier gegenüberstehender Pfeiler der Kuppel gezogen wird, zur mittleren Breite des Langhauses in einem solchen Verhältnisse, dafs man aus der ersteren Gröfse durch Multiplikation mit Q ziemlich annähernd die zweite erhält. Die bezeichnete Diagonale hat hier die enorme Länge von wenigstens 62 m. Dies mit Q multipliziert gibt 100,3 m. Ungefähr eben soviel beträgt nun die mittlere Breite des Langhauses zwischen der Vorhalle und dem Transsepte, welche rund 100 m (im Äufsern) ist.

Zieht man von der ganzen Länge der Kirche einerseits die Vorhalle andrerseits die Chorapsis ab, so läfst sich die Länge der mittleren Partie ausdrücken durch $dQ^2 = 162$ m.

Schlufsbetrachtungen.

Nach Vollendung vorstehender Abhandlung lasen wir in der Schrift: „Zur Literatur des Kölner Domes“ von einem ungenannten Autor, Frankfurt 1849, worin Aussprüche von verschiedenen Schriftstellern, Georg Forster, Friedrich Schlegel, Görres etc. über den Kölner Dom zusammengestellt sind, folgenden Satz von Fr. Schlegel: „Alle ergreift das Grofse dieses erhabenen Bruchstückes mit Erstaunen . . . Was aber dem, der mehrere Denkmale der gotischen Baukunst mit Aufmerksamkeit zu beobachten Gelegenheit hatte, am meisten auffällt, ist die Schönheit der Verhältnisse, das Ebenmafs bei der Zierlichkeit, die Leichtigkeit bei der Gröfse. Den Eindruck fühlt jeder, der Gefühl für etwas hat; beschreiben aber, oder erklären läfst sich dieses Gefühl weiter nicht, nur genaue Abmessungen, im Vergleiche mit andern Gebäuden ähnlicher Art, würden lehrreiche Aufschlüsse über das Geheimnis jenes dem zarteren Gefühle so merklichen Ebenmafses geben können.“ Ohne von dieser Stelle Kenntnis zu haben, war der Autor dieser Abhandlung ebenso wie Schlegel überzeugt, dafs genaue Abmessungen und Vergleichungen der gefundenen Mafse des Kölner Domes unter sich und mit denen anderer Bauwerke lehrreiche Aufschlüsse geben könnten über das Geheimnis jenes dem Gefühle sich offenbarenden Ebenmafses am Kölner Dom und er glaubt durch vorstehende Abhandlung wenigstens einige Aufschlüsse über jenes Geheimnis gegeben zu haben.

In dem angeführten Ausspruche Schlegels ist sogar die Haupteinteilung unserer Abhandlung anticipiert, denn dieselbe erwartet Aufschlüsse einerseits von genauen Abmessungen, andererseits von Vergleichung des Kölner Domes mit anderen Gebäuden. Unsere Abhandlung aber gibt im ersten Teile die aus genauen Abmessungen eruierten absoluten Mafse und Proportionen, während der zweite Teil den Dom mit den berühmtesten Bauwerken aller Hauptperioden der Architekturgeschichte vergleicht. Jene beiden Teile ergänzen sich auch in einer anderen Hinsicht gegenseitig. Das Hauptergebnifs des ersten Teiles ist das eigentümliche

Verhältnis, in welchem alle Hauptmafse und Dimensionen zur Diagonale der Vierung stehen, welche, wie wir gesehen haben, mit dem Quotienten des goldenen Schnittes combiniert, der Schlüssel zum Verständnis des Ganzen ist. Dafs für die sinnliche Anschauung und Überschau die Vierung das Centrum und der beste Standpunkt sei, hat auch schon Beissel in den Laacher Stimmen Band XX S. 181 (Vgl. Helmken, der Dom zu Köln S. 91.) ausgesprochen; derselbe sagt nämlich: „Von überraschender Wirkung ist die Rundschau aus der Mitte der Vierung zwischen den vier grofsen Pfeilern, welche den Mittelturm tragen. Das ganze Innere des Riesenbaues liegt offen vor Augen. — Man steht im Mittelpunkte des Domes, an der Stelle, der für die Gebeine der hl. drei Könige bestimmt war.“ Die zentrale Bedeutung der Vierung für die sinnliche Überschau des Baues im Innern ist hiemit klar ausgesprochen; dafs aber die Vierung auch den Schlüssel zum rationell-mathematischen Verständnisse des Ganzen enthalte, hat unseres Wissens bis jetzt kein Schriftsteller bemerkt, viel weniger bewiesen, wie dies in dem ersten Teile unserer Abhandlung geschehen ist. Es würde jedoch die im ersten Teile nachgewiesene mafsgebende Bedeutung der Vierungsdiagonale als eine singuläre Erscheinung dastehen, wenn nicht der zweite Teil nachweisen würde, dafs bei einer ganzen Reihe anderer Bauwerke entweder ebenfalls die Diagonale einer Vierung, oder die Diagonale einer Cella, oder ein anderes, dem Innern des Baues angehörendes Mafs eine ähnliche Funktion, wie die Diagonale im Kölner Dome, wenn auch nicht in so durchgreifender Weise, hat. Der zweite Teil zeigt also, dafs das, was beim Kölner Dome in der ausgeprägtesten Weise sich zeigt, etwas ist, was in minder vollkommener Weise durch die Geschichte der Architektur sich hindurchzieht, nämlich: die Bestimmtheit der Hauptmafse und Proportionen durch ein zentrales Einheitsmafs. Die durchgreifende Herrschaft dieser Mafseinheit ist jedenfalls eines der wichtigsten Momente in der ästhetischen Wirkung des Kölner Domes, denn je harmonischer in einem Kunstwerke Einheit und Mannigfaltigkeit sich verbinden, um so wohlgefälliger wirkt es, und der Kölner Dom ist gerade dadurch,

durch die Herrschaft der Einheit in der Mannigfaltigkeit nicht blos das vollendetste Bauwerk der Gotik, sondern zugleich das imposanteste steinerne Symbol der katholischen Kirche, welche, weil sie einig und katholisch zugleich ist, die gröfste Mannigfaltigkeit mit der vollkommensten Einheit in sich verbindet.

Noten.

1) Bötticher a. a. O. I S. 114 u. 115.

2) Wo Fufsmafs angegegeben ist ohne Beisatz, ist preufsischer, resp. rheinländischer Fufs gemeint, 1 Fufs = 0,313853 m.

Bei Mafsangaben in Metermafs beschränken wir uns auf drei Dezimalstellen, wenn mit der Mafsangabe keine weitere Rechnungsoperation auszuführen ist, weil in diesem Falle das etwa noch Fehlende weniger als ein Millimeter ist. Die Quotinenten Q, q aber, mit welchen Rechnungsoperationen ausgeführt sind, wurden bis zu sechs Dezimalen angegeben.

3) Neben die in gemischten Dezimalbrüchen bestimmten Werte von dQ, dQ^2 etc. sind die betreffenden Mafsgröfsen in jenen ganzen Zahlen, wovon die Brüche nur wenig differieren, gesetzt.

4) Über die erwähnte Zahlenreihe ist zu vergleichen Hoffmanns Zeitschrift für mathematischen Unterricht Jahrgang 1886, S. 250 fg. und Natur und Offenbarung Bd. 33 S. 157 fgd.

5) Über die Schönheit der Triforien vergleiche Laacher Stimmen Bd. 20. S. 181.

6) Bei Bestimmuug der Turmhöhe aus den Abbildungen im Werke von Franz Schmitz finde ich, dafs vom innern Pflaster an gemessen die Höhe 156 m, vom äufsern Pflaster jedenfalls 157 m, eher noch etwas darüber beträgt.

7) Die Beziehung des Dogmas von der Welterlösung durch Christus zur Dreizahl ist eine zweifache; erstens nämlich ist die Welterlösung das Werk des dreieinigen Gottes, zweitens ist die Welterlösung Vermittlung des Gegensatzes zwischen Gott und der Menschheit durch den Gottmenschen; jede Vermittlung setzt aber zwei Gegensatzglieder und ein Mittelglied voraus.

8) Ob die Dreizahl in den Gliederung des Domes zur Dreizahl der hl. Drei Könige in einer ursächlichen Beziehung stehe, möchten wir bezweifeln. Die Rolle, welche die Siebenzahl spielt, wie von andrer Seite schon hervorgehoben worden, ist der Dreizahl untergeordnet.

9) Laacher Stimmen Bd. 19. S. 65 fg. Der Dom zu Köln.

10) Ebers, Ägypten in Bild und Wort. I S. 147.

11) Es ist dem Verfasser dieser Abhandlung nicht unbekannt, dafs es Architekten und Kunstschriftsteller gibt, welche annehmen, es seien während der langen Zeit von der Grundlegung bis zur Vollendung des Kölner

Domes Änderungen im Plane vorgekommen. Diese Annahme, deren Gründe wir übrigens nicht eingehend diskutieren wollen, scheint mit der von uns nachgewiesenen Thatsache, dafs durch alle Hauptdimensionen hindurch ein Grundmafs und mathematisch-logische Konsequenz herrscht, schwer vereinbar zu sein. Stimmt man jener Ansicht bei, so mufs angenommen werden, dafs die Planänderungen, wenn solche vorkamen, durch einen glücklichen Takt der Architekten die mathematische Komposition und Gesetzmäfsigkeit des ursprünglichen Planes nicht alterierten sondern intakt liefsen oder eher noch vervollständigten. Übrigens hat einer der kompetentesten Beurtheiler des Kölner Domes, August Reichensperger, in seinem Kommissionsbericht über die Verwendung der Beiträge zum Kölner Dombaue, erstattet am 22. Dez. 1842 (im Anhange der Schrift „Die christlich-germanische Baukunst“ 3. Aufl. Trier 1860) über die Einheitlichkeit des Kölner Domes in folgender Weise sich ausgesprochen: „Der Dom zn Köln, der als das unübertroffene Muster kirchlicher Baukunst gilt, dessen höchster Ruhm gerade darin begründet ist, dafs ein Geist durch alle seine Formen und Gliederungen geht, dafs sein Plan sich nach einem festen, im Ganzen unabänderlichen Gesetze vom Gröfsten bis zum Kleinsten herab organisch entfaltet — diesen Dom jetzt auf die kärgste Notdurft beschränken — das würde wahrlich der Gegenwart nichts weniger als zu Ruhm und Ehre gereichen.“ Für die in diesen herrlichen Worten behauptete durchgreifende Einheit des Kölner Domes liefert unsre Abhandlung den mathematischen Beweis.

[12]) Der Mailänder Dom hat nur über der Vierung einen Thurm.

Verzeichnis kunstgeschichtlicher Litteratur, besonders über den Kölner Dom, welche bei Ausarbeitung dieser Abhandlung benützt worden ist.

1. Boisserée, Geschichte u. Beschreibung des Domes z. Köln. München 1842.

2. Franz Schmitz, der Dom zu Köln. Text von Ennen.

3. Kreuser, Kölner Dombriefe. Berlin 1844.

4. August Reichensperger, die christlich-germanische Baukunst. 3. Ausgabe. Trier 1860.

5. A. Reichensperger, zur neuen Geschichte des Dombaues in Köln. Köln 1881.

6. Die Geschichte des Kölner Domes von Dr. Fr. Frh. Goeler von Ravensburg.

7. Der Dom zu Köln von Beifsel, Laacher Stimmen. Bd. 19 u. 20.

8. Zur Literatur des Kölner Domes. Frankfurt a. M. 1849.

9. Zeising, Verhältnisse des Kölner Domes nach dem Grundrisse von Franz Schmitz. A. Allg. Zeitung 1869. Nr. 216—218.

10. Wiethase, der Dom zu Köln. Frankfurt a. M. 1884.

11. Helmken, der Dom zu Köln. Köln 1887.

12. Lützow, die Meisterwerke der Kirchenbaukunst.

13. Quast, über Form, Einrichtung und Ausschmückung der ältesten christlichen Kirchen. Berlin 1883.

14. Bötticher Carl, Tektonik der Hellenen. Potsdam 1844.

15. Die Basiliken des christlichen Rom von Bunsen.

16. Hübsch, die altchristlichen Kirchen. Carlsruhe 1862.

17. Bezold u. Dehio, die Kirchenbaukunst des Abendlandes. Stuttgart Cotta 1885 fg.

18. Mothes, die Baukunst des Mittelalters in Italien. Jena 1884.

19. Rettig, der Dom zu Mailand. 1844.

20. Denkmale aus Ägypten und Äthiopien von Lepsius. Berlin 1849.

21. Baumeister, Denkmäler des klassischen Altertums.

22. Odilo Wolff, Der Tempel zu Jerusalem. Graz 1887.

Dieses Werk kam dem Autor dieser Abhandlung leider erst kurz vor Absendung des fertigen Manuscriptes zu Gesichte. Der Verfasser führt darin den Beweis, dafs jenes Quadrat, welches im Vorhof des Salomonischen Tempels der Brandopferaltar mit seinen Stufen bedeckte, das Grundmafs sei, woraus durch geometrische Construktion die andern Mafse des Aufrisses und Grundrisses des Tempels sich ableiten lassen. Dies Verfahren ist offenbar mit dem unsrigen verwandt, doch wird dabei der goldene Schnitt nicht angewendet.