

Zeitschrift: Zeitschrift des Vereins Schweizerischer Konkordatsgeometer [ev. = Journal de la Société suisse des géomètres concordataires]
Herausgeber: Verein Schweizerischer Konkordatsgeometer = Association suisse des géomètres concordataires
Band: 5 (1907)
Heft: 6

Artikel: Die Berechnung der Koordinaten der Grenzpunkte und einige Anwendungen
Autor: Bühlmann, F.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-179753>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 13.03.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Zeitschrift

des

Vereins Schweizer. Konkordatsgeometer

Organ zur Hebung und Förderung des Vermessungs- und Katasterwesens

Jährlich 12 Nummern. Jahresabonnement Fr. 4.—

Unentgeltlich für die Mitglieder.

Redaktion:
J. Stambach, Winterthur.

Expedition:
Geschwister Ziegler, Winterthur

Die Berechnung der Koordinaten der Grenzpunkte und einige Anwendungen.

Von F. Bühlmann, Sektionsgeometer am Vermessungsamt Zürich.

1. Die Rechenwalze.

Wohl jeder Geometer kennt den Rechenschieber und seine Anwendung. Es ist ein äußerst handliches, bequemes Instrument, das namentlich für Kontroll- und andere Berechnungen, für welche keine allzugroße Genauigkeit verlangt wird, unschätzbare Dienste leistet. Wie bekannt, ist die Genauigkeit des gewöhnlichen Rechenschiebers von 12,5 cm Skalenlänge nicht größer als zirka 1 : 500. Es existieren jetzt verschiedene Konstruktionen, welche bezwecken, die Genauigkeit des Rechenschiebers zu steigern. Als solche sind zu erwähnen: der Gitterschieber (im geodätischen Bureau des Herrn Sutter in Gebrauch), die Rechenwalze und verschiedene andere. Im Vermessungsamt der Stadt Zürich ist namentlich die Rechenwalze von Julius Billeter †, jetzt Ernst Billeter, in Gebrauch, und ich möchte hier dies in der Geometerwelt wenig bekannte Instrument und dessen Gebrauch näher beschreiben.

Wie ein Aufsatz nicht auf eine einzige Zeile geschrieben, sondern in nicht allzulange Linien zerlegt wird, hat Herr Billeter, der, nebenbei gesagt, ein Zürcher war und seine ersten Fabrikate in verschiedenen kaufmännischen Bureaux in Zürich absetzen konnte, die Logarithmen der Zahlen 1—10 nicht fortlaufend auf

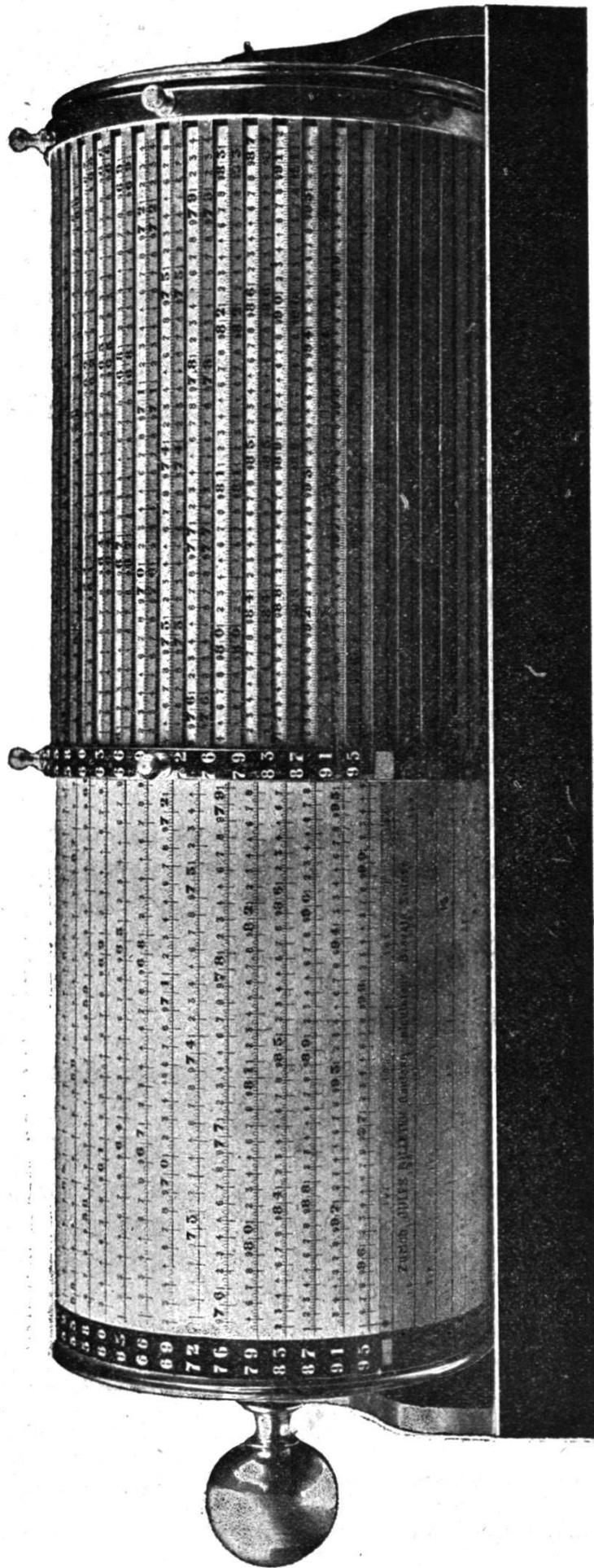
eine Gerade aufgetragen, sondern diese Gerade in 50 Stäbchen von je 20,8 cm Skalenlänge zerlegt, die Basislänge seiner Teilung beträgt somit 10,40 m; das Intervall zwischen 2 beliebigen Werten ist deshalb $\frac{1040}{12,5} = 83,2$ mal größer als beim gewöhnlichen Rechenschieber von 12,5 cm Teilungslänge.

Diese 50 Stäbchen werden sodann in Abständen gleich der Stäbchenbreite auf zwei Reifen von 16 cm Durchmesser aufgeleimt, so daß ein durchbrochener Zylindermantel, ein Rost, entsteht, der auf einen Hohlzylinder von der doppelten Länge des Rostes gestülpt wird. Der Mantel des Zylinders besteht aus Zinkblech, welches mit Papier überzogen ist, auf diesem sind die Teilungen der Roststäbchen doppelt aufgetragen, das heißt: auf der ersten Zeile sind die Teilungen des ersten und zweiten Stäbchens fortlaufend aufgetragen, auf der zweiten Zeile die Teilungen des zweiten und dritten Stäbchens und so weiter, auf der 49. Zeile die Teilungen des 49. und 50. Stäbchens, und auf der 50. Zeile die Teilungen des 50. und ersten Stäbchens. Der Rost ist auf dem Zylinder beliebig verschiebbar und es kann, wie beim Schieber, jedes beliebige Verhältnis eingestellt werden.

Wäre die Arbeit an der Walze tadellos ausgeführt, so müßte die Genauigkeit entsprechend der größeren Basislänge der log. Teilung 83,2 mal größer sein, als beim Rechenschieber. Nehmen wir letztere zu 1 : 500 an, so müßte sie also zirka 1 : 40,000 betragen. Dies ist nun aber nicht der Fall; wir haben bei der Walze Fehlerquellen, welche beim Schieber nicht vorhanden sind, als solche macht sich namentlich die große Parallaxe zwischen Rost und Walze bemerkbar, die Teilung des Rostes liegt zirka 2 mm über derjenigen der Walze, eine weitere Fehlerquelle ist darin zu suchen, daß die einzelnen Zeilen sowohl beim Rost als bei der Walze nicht genau senkrecht übereinanderstehen, das heißt: der Anfang der einzelnen Zeilen liegt nicht genau in einer senkrechten Ebene zur Zylinderaxe. Neben diesen Übelständen kommt die ziemlich kräftige, mit zufälligen, kleinen Fehlern behaftete Ausführung der Teilung nicht mehr stark zur Geltung, im Gegenteil, die derbe Teilung gestattet ein sicheres Ablesen, ohne die Augen stark anzustrengen und zu ermüden.

Die Rechenwalze gibt nur Multiplikationen, Divisionen und Proportionen, durch inverse Operation auch die Quadratwurzel.

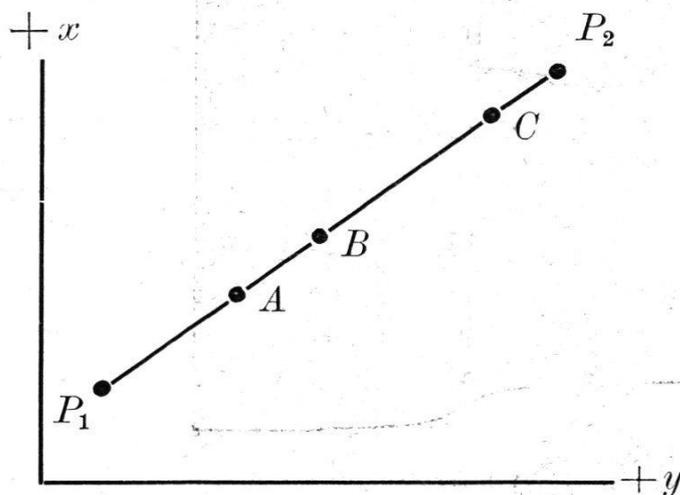
Rechenwalze Billeter.



Um ein konstantes Verhältnis der Proportionen zu fixieren, ist dem Apparat eine kleine Klammer beigegeben, welche über den Verhältniszahlen eingestellt wird. Der Rost gleitet leicht auf der Walze, die Einstellungen gehen glatt, nicht ruckweise wie bei dem Holzschieber vor sich, bei kurzer Übung findet man sich rasch und sicher in der Teilung mit ihren kräftigen Zahlen und den orientierenden Randzahlen zurecht, sodaß die Ablesungen nur unwesentlich mehr Zeit beanspruchen als mit dem Rechenschieber. Beim Arbeiten setzt man sich senkrecht vor den Apparat, mit der linken Hand dreht man am Knopf die Teilung in die für das Ablesen günstige Lage, die rechte Hand ist zum Anschreiben der Resultate frei. Bei den neueren Apparaten hat die Rostteilung eine kleine Exzedenz, d. h. der letzte Teilstrich rechts wiederholt sich auf dem folgenden Roststäbchen links, so daß auch für End- und Anfangsstellungen eine genaue Interpolation ermöglicht ist. Unsere Abbildung zeigt die Einstellung auf ein bekanntes Verhältnis*; da die Aufnahme auf eine kurze Distanz erfolgte, zeigen sich kleine parallaktische Verschiebungen, welche zugleich dartun, wie wichtig die richtige Stellung des Auges — Ablesungsebene senkrecht zur Walzenaxe — ist.

Nach unseren Erfahrungen erhält ein einigermaßen geübter Rechner mit der Walze Resultate, deren Genauigkeit 1:10,000 beträgt, und dies ist für viele Berechnungen genügend, namentlich auch zur Berechnung der Koordinaten der Grenzpunkte, da die letzteren doch größtenteils auf die Polygonseiten und Aufnahmlinien aufgewinkelt sind und die Fehlertoleranz bei solchen Grenzpunkten sowieso bis zu 2 cm beträgt.

2. Das Einschalten von Punkten in eine Gerade.



Es seien gegeben die Punkte P_1 und P_2 durch ihre Koordinaten $x_1 y_1$ und $x_2 y_2$, gesucht die Koordinaten $x_a y_a, x_b y_b, x_c y_c$ der Punkte $A B C$, die derart bestimmt sind, daß von P_1 auf P_2 fortlaufend gemessen wurde und bei den Punkten $A B C$ die

* Der Photograph hat es leider geändert.

die Ablesungen x_a, x_b, x_c gemacht wurden, die ganze Distanz zwischen den Punkten P_1 und P_2 wurde bei der gleichen Messung als $[x]$ ermittelt.

Wir haben zunächst als Distanz zwischen P_1 und P_2

$$d = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2} \approx [x] \quad *)$$

$$\sin a = \frac{y_2 - y_1}{d} \quad \cos a = \frac{x_2 - x_1}{d}$$

und können nun die Punkte $A B C$ mit Hülfe der Werte $\sin a$ und $\cos a$ und den gemessenen Distanzen einschalten, wie wir dies von der Berechnung der Koordinaten der Polygonzüge her gewohnt sind.

Wir können aber auch einen andern Weg einschlagen. Wir ziehen durch die Punkte $P_1 P_2 A B$ und C Parallele zur x - und y -Achse und erhalten so eine Anzahl ähnliche Dreiecke, aus denen ohne weiteres die folgenden Proportionen hervorgehen:

$$1. \frac{y_2 - y_1}{[x]} = \frac{y_2 - y_c}{[x] - x_c} = \frac{y_c - y_b}{x_c - x_b} = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a} = \frac{y_a - y_1}{x_a - x_1} = \frac{y_a - y_1}{x_a}$$

$$2. \frac{x_2 - x_1}{[x]} = \frac{x_2 - x_c}{[x] - x_c} = \frac{x_c - x_b}{x_c - x_b} = \frac{x_b - x_a}{x_b - x_a} = \frac{x_a - x_1}{x_a - x_1} = \frac{x_a - x_1}{x_a}$$

Setzen wir nun für den Ausdruck $\frac{y_2 - y_1}{[x]} = \varphi$ (3.)

und für denjenigen $\frac{x_2 - x_1}{[x]} = \psi$ (4.), so erhalten wir aus unsern

Proportionen unter Wegschaffung der Nenner

$$5. \varphi ([x] - x_c) = y_2 - y_c \quad 9. \psi ([x] - x_c) = x_2 - x_c$$

$$6. \varphi (x_c - x_b) = y_c - y_b \quad 10. \psi (x_c - x_b) = x_c - x_b$$

$$7. \varphi (x_b - x_a) = y_b - y_a \quad 11. \psi (x_b - x_a) = x_b - x_a$$

$$8. \varphi (x_a) = y_a - y_1 \quad 12. \psi (x_a) = x_a - x_1$$

woraus:

$$13. y_a = y_1 + \varphi (x_a) \quad 17. x_a = x_1 + \psi (x_a)$$

$$14. y_b = y_a + \varphi (x_b - x_a) \quad 18. x_b = x_a + \psi (x_b - x_a)$$

$$15. y_c = y_b + \varphi (x_c - x_b) \quad 19. x_c = x_b + \psi (x_c - x_b)$$

$$16. y_2 = y_c + \varphi ([x] - x_c) \quad 20. x_2 = x_c + \psi ([x] - x_c)$$

*) Das Zeichen \approx wird für „angenähert“ gebraucht.

Wir haben also hier unsere Punkte eingeschaltet, ohne uns um die Werte $\sin a$ und $\cos a$ zu bekümmern, und haben zuletzt noch eine Kontrolle, die, abgesehen von kleinen Ab- oder Auf-rundungsfehlern, auf Null stimmen muß. Dies alles ist erreicht worden durch einfache Anwendung von Proportionen, und für diese eignet sich bekanntlich der Rechenschieber vorzüglich, in unserm Fall die Rechenwalze. Mit einer einzigen, geräuschlosen Einstellung können sowohl der Wert φ als auch seine Produkte abgelesen werden, das gleiche gilt von ψ , wir haben bloß einige Subtraktionen und Additionen ohne Maschine auszuführen.

Untersuchen wir nun, was eigentlich die Werte φ und ψ zu bedeuten haben. Es ist

$$\sin a = \frac{\Delta y}{d} \text{ und } \cos a = \frac{\Delta x}{d}$$

worin $\Delta y = y_2 - y_1$ und $\Delta x = x_2 - x_1$, im Vergleich dazu

haben wir $\varphi = \frac{\Delta y}{[x]}$ und $\psi = \frac{\Delta x}{[x]}$, daraus geht hervor, daß

φ und ψ angenähert sinus und cosinus des Azimutes der Auf-nahmslinie sind. Wir setzen nun

$$q = \frac{d}{[x]} = \text{gerechnete Distanz durch gemessene Distanz,}$$

$$\text{es ist dann } \varphi = \frac{\Delta y}{d} \cdot \frac{d}{[x]} = q \sin a$$

$$\text{und } \psi = \frac{\Delta x}{d} \cdot \frac{d}{[x]} = q \cos a$$

das heißt φ und ψ sind nichts anderes als sinus und cosinus des Azimutes der Aufnahmslinie multipliziert mit dem Werte $\frac{d}{[x]}$

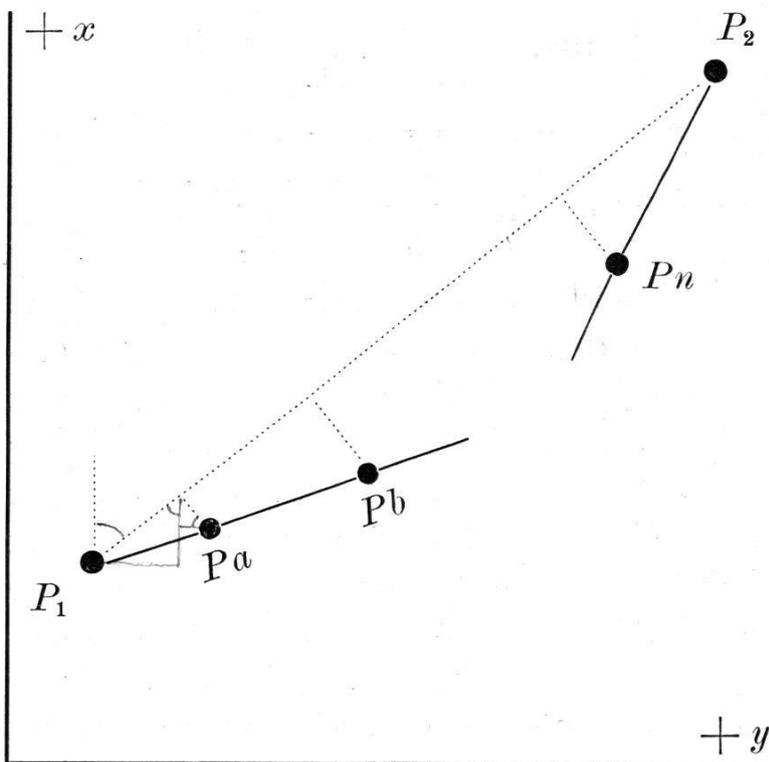
also dem Quotienten aus gerechneter Distanz durch gemessene Distanz. Sind die letzteren einander gleich, so wird $d = [x]$ und $q = 1$, infolgedessen $\varphi = \sin a$, $\psi = \cos a$.

Nachdem dies festgestellt ist, kommen wir zu dem Schluß, daß es nicht nötig ist, in jedem Falle zuerst die Distanz aus Koordinaten zu berechnen, es genügt, wenn wir in einer Tafel mit natürlichen trig. Funk-tionen nachsehen, ob φ und ψ angenähert den Werten sinus und cosinus desselben Winkels entsprechen.

Zeigt sich eine größere Differenz, so ist ein Fehler in der Rechnung, die gemessene Distanz stimmt nicht mit der gerechneten, der Rechner wird also vorerst den Fehler aufsuchen müssen, derselbe kann seine Ursache in verschiedenen Umständen haben, unrichtiges Abschreiben der Koordinaten oder der Distanzen, unrichtige Bildung der Δy oder Δx etc. etc.

Erst nachdem man sich überzeugt hat, daß φ und ψ stimmen, die gerechnete Distanz innerhalb der Toleranz mit der gemessenen Distanz bleibt, wird man mit der Rechnung fortfahren.

3. Die Koordinatentransformation.



In nebenstehender Figur seien gegeben die Koordinaten der beiden Punkte der Aufnahmslinie $P_1 P_2$ mit $y_1 x_1$ und $y_2 x_2$, gesucht die Koordinaten der auf diese Linie aufgewinkelten Punkte $A B C n$ — etc.

Wir bezeichnen die Koordinaten des Hauptsystems mit lateinischen, diejenigen des Nebensystems mit gothischen Lettern, beispielsweise seien die Koordinaten des Punktes n im Hauptsystem $x_n y_n$, im Nebensystem $x_n \eta_n$, die gemessene Distanz $P_1 P_2$ sei mit $[x]$ bezeichnet; es sei ferner:

$$\Delta \eta_a = \eta_a - \eta_1 = \eta_a$$

$$\Delta \eta_b = \eta_b - \eta_a$$

.

$$\Delta \eta_n = \eta_n - \eta_{n-1}$$

$$\Delta \eta_{n+1} = \eta_2 - \eta_n = - \eta_n$$

$$\Delta x_a = x_a - x_1 = x_a$$

$$\Delta x_b = x_b - x_a$$

.

$$\Delta x_n = x_n - x_{n-1}$$

$$\Delta x_{n+1} = x_2 - x_n = [x] - x_n$$

Die gleichen Bezeichnungen gelten auch mit lateinischen Lettern, nur ist hier

$$\Delta y_{n+1} = y_2 - y_n \quad \text{und} \quad \Delta x_{n+1} = x_2 - x_n$$

Es sei ebenfalls, wie bei der Punkteinschaltung

- | | |
|--|---|
| <p>1. $\varphi = \frac{y_2 - y_1}{[x]}$</p> <p>3. $\Delta y_a = \psi \Delta \eta_a + \varphi \Delta x_a$</p> <p>4. $\Delta y_b = \psi \Delta \eta_b + \varphi \Delta x_b$</p> <p style="text-align: center;">: : : : : : : :</p> <p>5. $\Delta y_n = \psi \Delta \eta_n + \varphi \Delta x_n$</p> <p>6. $\Delta y_{n+1} = \psi \Delta \eta_{n+1} + \varphi \Delta x_{n+1}$</p> <p>11. $y_a = y_1 + \Delta y_a$</p> <p>12. $y_b = y_a + \Delta y_b$</p> <p style="text-align: center;">: : : : : : : :</p> <p>13. $y_n = y_{n-1} + \Delta y_n$</p> <p>14. $y_2 = y_n + \Delta y_{n+1}$</p> | <p>2. $\psi = \frac{x_2 - x_1}{[x]}$ es ist dann:</p> <p>7. $\Delta x_a = \psi \Delta x_a - \varphi \Delta \eta_a$</p> <p>8. $\Delta x_b = \psi \Delta x_b - \varphi \Delta \eta_b$</p> <p style="text-align: center;">: : : : : : : :</p> <p>9. $\Delta x_n = \psi \Delta x_n - \varphi \Delta \eta_n$</p> <p>10. $\Delta x_{n+1} = \psi \Delta x_{n+1} - \varphi \Delta \eta_{n+1}$</p> <p>15. $x_a = x_1 + \Delta x_a$</p> <p>16. $x_b = x_a + \Delta x_b$</p> <p style="text-align: center;">: : : : : : : :</p> <p>17. $x_n = x_{n-1} + \Delta x_n$</p> <p>18. $x_2 = x_n + \Delta x_{n+1}$</p> |
|--|---|

Diese Formeln sind hier nur für den I. Quadranten abgeleitet resp. sie gehen ohne weiteres aus der Figur hervor. Es ist leicht darzutun, daß dieselben allgemein gültig sind, sofern beide Netze gleichen Drehungssinn haben, das heißt, in beiden Netzen sollen die einzelnen Quadranten im Sinne der Uhrzeigerbewegung aufeinander folgen und wenn man die Abszissenaxe vorwärts, im Sinne der wachsenden positiven Abszissen, abschreitet, so müssen die Ordinaten nach rechts positiv, diejenigen nach links negativ sein. In der Praxis wird sich die Berechnung ähnlich gestalten, wie bei den Polygonzügen. Hauptbedingung für das Erhalten richtiger Resultate ist die Berücksichtigung sämtlicher Vorzeichen.

Was wir oben über die Werte φ und ψ gesagt haben, trifft ohne weiteres auch hier zu. Richtige Resultate setzen immer richtige Daten voraus. Mit der Kontrolle von φ und ψ auf ihre Zusammengehörigkeit haben wir ein sehr einfaches Mittel zur Hand, die Richtigkeit der gegebenen Daten zu prüfen.

Im Laufe der Berechnung ergeben sich noch weitere Kontrollen, auf die wir später zu sprechen kommen werden. Es erübrigt uns noch, zu sagen, daß zur Auflösung der 10 ersten Formeln wieder mit Vorteil die Rechenwalze angewendet wird,

Berechnung der Koordinaten der Grenzpunkte.

x	Δx	η	$\Delta \eta$	$\psi \cdot \Delta \eta$	$\varphi \cdot \Delta x$	Δy	Y	$\psi \cdot \Delta x$	$\varphi \cdot \Delta \eta$	Δx	X	Bemerkungen
Meter	± Meter	± Meter	± Meter	± Meter	± Meter	± Meter	± Meter	± Meter	± Meter	± Meter	± Meter	
0		0			P_1	P_2	Y_1		$\psi =$	$\frac{x_2 - x_1}{[x]}$	X_1	
x^a	Δx^a	η^a	$\Delta \eta^a$	$\psi \Delta \eta^a$	$\varphi \Delta x^a$	Δy^a	Y^a	$\psi \Delta x^a$	$\varphi \Delta \eta^a$	Δx^a	X^a	a
x^b	Δx^b	η^b	$\Delta \eta^b$	$\psi \Delta \eta^b$	$\varphi \Delta x^b$	Δy^b	Y^b	$\psi \Delta x^b$	$\varphi \Delta \eta^b$	Δx^b	X^b	b
x^c	Δx^c	η^c	$\Delta \eta^c$	$\psi \Delta \eta^c$	$\varphi \Delta x^c$	Δy^c	Y^c	$\psi \Delta x^c$	$\varphi \Delta \eta^c$	Δx^c	X^c	c
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
x^{n-1}	x^n	η^{n-1}	$\Delta \eta^n$	$\psi \Delta \eta^n$	$\varphi \Delta x^n$	Δy^n	Y^{n-1}	$\psi \Delta x^n$	$\varphi \Delta \eta^n$	Δx^n	X^{n-1}	
x^n	Δx^{n+1}	η^n	$\Delta \eta^{n+1}$	$\psi \Delta \eta^{n+1}$	$\varphi \Delta x^{n+1}$	Δy^{n+1}	Y^n	$\psi \Delta x^{n+1}$	$\varphi \Delta \eta^{n+1}$	Δx^{n+1}	X^n	
[x]	$\Sigma \Delta x$	0	$\Sigma \Delta \eta$	$\Sigma \psi \Delta \eta$	$\Sigma \varphi \Delta x$	$\Sigma \Delta y$	$Y_2 - Y_1$	$\Sigma \psi \Delta x$	$\Sigma \varphi \Delta \eta$	$\Sigma \Delta x$	$X_2 - X_1$	n

das übrige, lauter einfache Subtraktionen und Additionen, wird in unserem Bureau ohne Maschine gemacht. Wir haben zur bequemen Berechnung der Koordinaten der Grenzpunkte das vorstehende Formular aufgestellt. (Fortsetzung folgt.)

VI Hauptversammlung des Vereins Schweiz. Konkordats-Geometer in Schaffhausen, vom 2./3. Juni 1907.

Festbericht

von *E. Keller*, Konkordats-Geometer, *Basel*.

Mit gemischten Gefühlen habe ich die Aufgabe übernommen, unsern bekannten, humorvollen Festreporter, Herrn Stadtgeometer *Steinegger* in Schaffhausen, ausnahmsweise zu vertreten, denn man kann bei der Wahl eines Historiographen gerade so unvorsichtig ein, wie bei der Auswahl seiner Eltern. Die Reue kommt in beiden Fällen zu spät. — Kaum war ich von der Feststadt an meinen häuslichen Herd zurückgekehrt, als schon die kategorische Feder unseres verehrten Redaktors, *Hrn. Prof. Stambach*, ungestüm an die Türe pochte: *Nix restauratione, scribe!* Wohlan denn.

In unerwartet großer Zahl versammelten sich die Stadt-, Land- und Wassergeodäten in der von der lieblichsten Naturromantik umgebenen Munotstadt Schaffhausen, der Heimat des berühmten Geschichtsschreibers *Johannes von Müller* (auch einer der bedeutendsten Stilisten in der deutschen Literatur), um dem Alltagsleben für kurze Zeit Valet zu sagen und höhern Aufgaben ihren Tribut zu zollen. Der herzliche Willkommgruß der gastfreundlichen Schaffhauser Kollegen, ihr fröhlicher Humor und das gegenseitige freudige Wiedersehen verrieten die langersehnte Festfreude, welche bald die schlimmen Wetterzeichen vergessen ließen. Ein kurzer «Znüni» im Hôtel Bahnhof stärkte die sonnverbrannte Schar auf die programmreiche Tagung, die punkt 10¹/₂ Uhr im schmucken Großratssaale von unserm Präsidenten, *Hrn. Bundesbahngeometer M. Ehrensberger* aus St. Gallen, eröffnet wurde. Unter seiner vorzüglichen Leitung entwickelte sich bald eine erfreuliche Tätigkeit. So schön und formvollendet der Vorsitzende sich seiner Aufgabe entledigte, so gewissenhaft und fleißig waren die Referate seines Stabes. *Hr. Ehrensberger* hat es verstanden, Zeit zu gewinnen.