Zeitschrift: Schweizerische Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Revue technique suisse des mensurations et améliorations foncières

Herausgeber: Schweizerischer Geometerverein = Association suisse des géomètres

Band: 17 (1919)

Heft: 5

Artikel: Statik der Luft-Seilbahnen [Fortsetzung]

Autor: Zwicky, C.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-185578

nachzuforschen. Die erhebliche Differenz von 102 mm läßt sich mit Sicherheit in systematischen Fehlern und in der ungünstigen Zusammensetzung des Polygons XI des Präzisionsnivellements der schweizerischen geodätischen Kommission erklären. Genauen Aufschluß über das Wesen dieses Fehlers, eventuell über den Ort und die Strecke, wo der Fehler sich besonders anhäuft, wird aber erst das Nivellement der Polygone XIII, XIV und XV des neuen Landesnivellements geben, deren Ausführung in zwei bis drei Jahren abgeschlossen sein wird.

Bern, März 1914.

Ergänzt Februar 1919.

Statik der Luft-Seilbahnen.

Von *C. Zwicky,* Professor an der Eidgen. Technischen Hochschule Zürich.

(Fortsetzung.)

II.

Die Parabel-Seilkurve.

1. Die Form der Parabel.

a) *Die Kurvengleichung.* Mit $g_x = g' =$ konstant erhält man aus der Differentialgleichung der Seilkurve

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{g'}{H}$$

durch zweimalige Integration, wenn

$$2a = \frac{g'}{H}$$

gesetzt wird, während b und c zwei Integrationskonstante bedeuten:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tang} \tau = p_P = 2ax + b$$

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Wählt man nun als Koordinatenursprung 0 den tiefsten Kurvenpunkt P_0, wie es in Figur 1[a] der Fall war, so gilt für diesen:

$$x_0 = o,\ y_0 = o \text{ und } p_0 = o,$$

woraus dann für die Konstanten b und c folgt:

$$p_0 = o = b \qquad \text{und} \qquad y_0 = o = c.$$

Damit nimmt die Kurvengleichung die einfache Form an:

$$y = ax^2.$$

Daraus folgt mit dem Seilgewicht $G = g' . l$ und $a = \dfrac{g'}{2H}$

Fig 2.ª

Parabel-Seilkurve

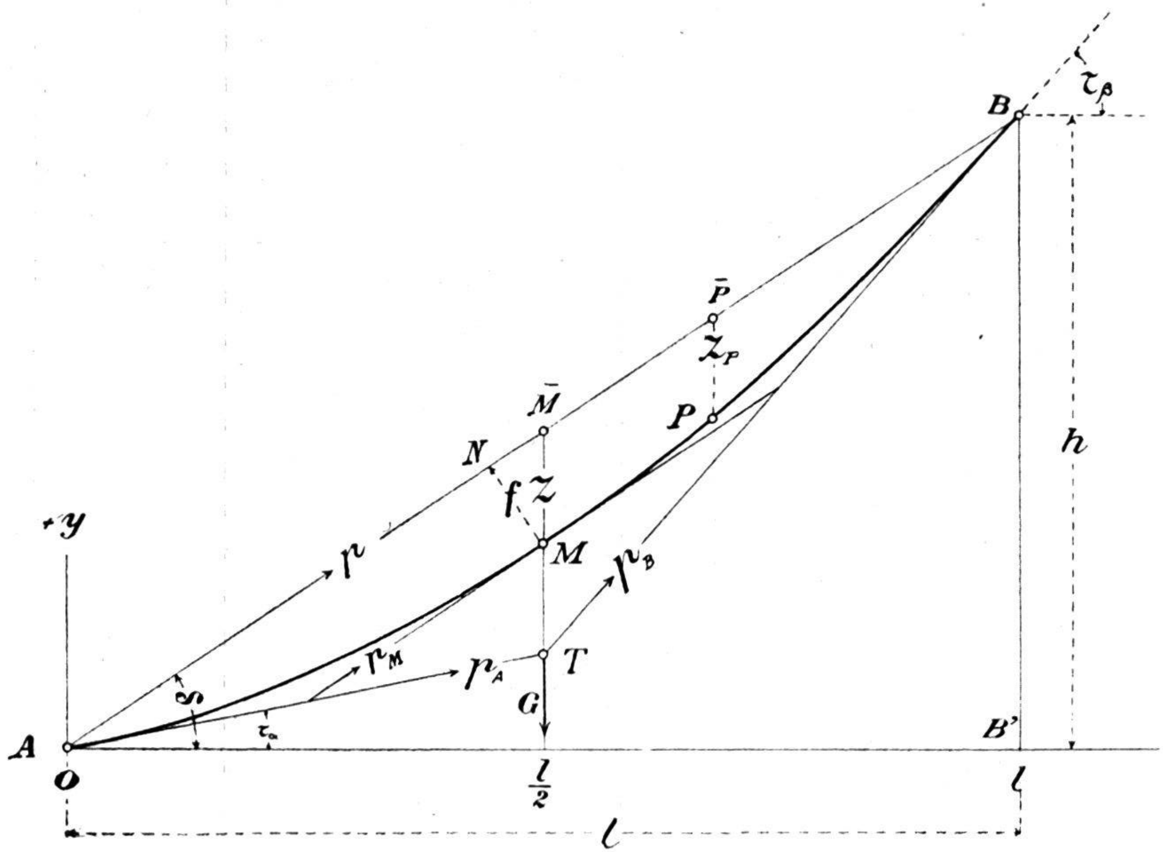
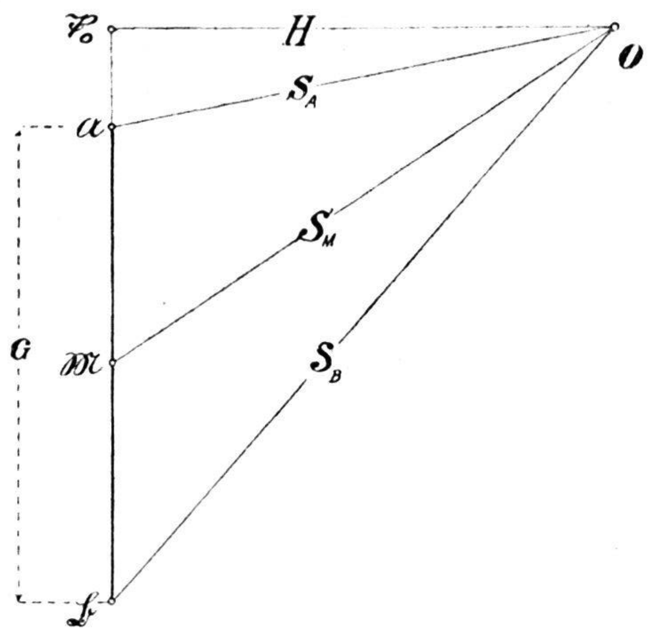


Fig 2.ᵇ

Kräftepolygon



$$x^2 = 2 \cdot \frac{H}{G} \cdot l \cdot y. \tag{1}$$

Dies ist die Scheitelgleichung einer Parabel mit vertikaler Achse, welche den Parameter $\frac{H}{G} \cdot l$ besitzt.

b) *Koordinaten-Transformation.* Figur 2[a] stellt die Seilkurve für ein solches Seil dar, bei welchem der Parabelscheitel P_0 außerhalb des Bogens AB liegt, wie es bei einer Luftseilbahn im Gebirge in der Regel der Fall ist.

Mit dem Seilanfangspunkt A als Koordinatenursprung gelten dann die allgemeinen Gleichungen:

$$y = a x^2 + b x + c \quad \text{und} \quad \frac{dy}{dx} = p_P = 2 a x + b.$$

Nun wurden im Abschnitt A als Daten für die Seilkurve die Spannweite l, die Steigung h und die Seilneigung p_A vorausgesetzt. Aus diesen drei Bestimmungselementen ergibt sich dann für die drei Kœffizienten der obigen Gleichungen:

für $x_A = o$: $y_A = o = c$ und $p_A = b$

für $x_B = l$: $y_B = h = a l^2 + p_A \cdot l$, also $a = \frac{h - p_A \cdot l}{l^2}$

Mit der Neigung $p = \frac{h}{l}$ der Sehne AB erhält man ferner:

$$p_B = 2 a \cdot l + p_A = 2 \cdot \left(\frac{h}{l} - p_A\right) + p_A, \text{ also}$$

$$p_B = 2 p - p_A, \tag{2}$$

woraus dann weiter folgt: $2 p l = 2 h = (p_A + p_B) \cdot l$, also:

$$h = \tfrac{1}{2} (p_A + p_B) \cdot l \tag{3}$$

d. h. die Endtangenten t_A und t_B schneiden sich in einem Punkte T mit der Abszisse $x_T = \frac{l}{2}$.

Für einen beliebigen Kurvenpunkt P hat man nun:

$$(4) \quad p_P = p_A + (p_B - p_A) \cdot \frac{x}{l} \quad \text{und} \quad y = \tfrac{1}{2} (p_A + p_P) \cdot x \quad (5)$$

und hieraus ergibt sich für den „Seildurchhang“

$$\bar{P}P = z_P = p x - y, \text{ also}$$

$$z_P = (p - p_A) \cdot (l - x) \cdot \frac{x}{l}. \tag{6}$$

c) *Die Bogenmitte M.* Als Bogenmitte bezeichnen wir denjenigen Punkt M der Parabel, der die Abszisse $x_M = \frac{1}{2}$ besitzt; diese Bezeichnung ist allerdings nur dann in aller Strenge richtig, wenn M mit dem Parabelscheitel P_0 zusammenfällt, indem nur dann die beiden Bogenstücke $\widehat{AM}$ und $\widehat{BM}$ genau gleich lang sind.

Für diesen Kurvenpunkt M ergeben sich nun eine Reihe von Eigenschaften, welche für die späteren Anwendungen von Bedeutung sind, nämlich:

1. Da die Resultierende G des Seilgewichtes durch den Schnittpunkt T der Endtangenten t_A und t_B geht und anderseits $x_T = \frac{1}{2} = x_M$ ist, so folgt: M liegt auf der Resultierenden G.
2. Als Neigung p_M der Tangente t_M in M ergibt sich:
$$p_M = p_A + 2 \,.\, (p - p_A) \,.\, \frac{1/2}{1} = p_A + (p - p_A) = p,$$
d. h. die Tangente in M ist parallel zur Sehne AB.
3. Der Seildurchhang z_P wird für $x = \frac{1}{2}$, also für M, ein Maximum und beträgt, wenn wir denselben in diesem Spezialfalle mit z bezeichnen:
$$z = {}^1/_4 \,.\, (p - p_A) \,.\, 1 = (p_B - p_A) \,.\, \frac{1}{8} = z. \tag{7}$$
4. Für die vertikale Strecke $T\overline{M}$ ergibt sich:
$$T\overline{M} = \overline{y_M} - y_T = p \,.\, \frac{1}{2} - p_A \,.\, \frac{1}{2} = {}^1/_2 \,.\, (p - p_A) \,.\, 1 = 2\, z,$$
d. h. die Bogenmitte M *halbiert* die Strecke TM.
5. Wegen $t_M \parallel AB$ hat von allen Kurvenpunkten P die Bogenmitte M den größten *senkrechten* Abstand von der Sehne AB; derselbe stellt die *Pfeilhöhe* MN = f der Parabel dar; hiefür ergibt sich:
$$f = \frac{1}{d} \,.\, z. \tag{8}$$

2. Die Bogenlänge der Parabel.

Die Bogenlänge der Seilkurve braucht man einerseits zur Berechnung des Seilgewichtes G und anderseits unter gewissen

Verhältnissen auch zur Ermittlung des Einflusses von Temperaturschwankungen und von Schnee- oder Winddruck auf die im Seile auftretenden Zugspannungen.

Je nach der Lage der Endpunkte des Parabelbogens gegenüber dem Parabelscheitel P_0 kommen dabei etwas verschiedene Formeln zur Anwendung.

a) *Spezialfall: Parabel* $\widehat{P_0 P} = s_P$. Für einen Zwischenpunkt $\mathfrak{P}$ dieser Kurve, mit der Abszisse $\mathfrak{x}$, der Ordinate $\mathfrak{y}$, der Neigung $p_{\mathfrak{P}}$ und dem Bogenelement $d\,s_{\mathfrak{P}}$ gelten die Beziehungen:

$$\mathfrak{y} = a\,.\,\mathfrak{x}^2, \quad \frac{d\,\mathfrak{y}}{d\,\mathfrak{x}} = p_{\mathfrak{P}} = 2a\,.\,\mathfrak{x}, \quad \frac{d\,s_{\mathfrak{P}}}{d\,\mathfrak{x}} = \sqrt{1 + p_{\mathfrak{P}}^2} = \sqrt{1 + 4a^2\mathfrak{x}^2}.$$

Hieraus ergibt sich für die Bogenlänge s_P, wenn x, y die Koordinaten des Bogenendpunktes P bedeuten:

$$s_P = \int_0^x d\,s_P = \frac{x}{2}\,.\,\sqrt{1 + 4a^2x^2} + \frac{1}{4a}\,.\,\mathrm{Ln}\,(2a\,x + \sqrt{1 + 4a^2x^2}).^*$$

Nun ist $2\,a\,x^2 = 2y$ und $2\,a\,x = p_P$, folglich

$$s_P = \frac{1}{2}\cdot\left\{\sqrt{x^2 + (2y)^2} + \frac{x^2}{2y}\,\mathrm{Ln}\,\frac{2y + \sqrt{x^2 + (2y)^2}}{x}\right\} \qquad (9)$$

$$s_P = \frac{x}{2}\left\{\sqrt{1 + p^2_P} + \frac{1}{p_P}\,\mathrm{Ln}\,(p_P + \sqrt{1 + p^2_P}\right\} \qquad (10)$$

Ist die Endneigung p_P eine kleine Größe, dann kann man die Ausdrücke $(1 + p^2_P)^{1/2}$ und $\mathrm{Ln}\,\{p_P + (1 + p^2_P)^{1/2}\}$ in Reihen entwickeln und erhält damit

$$s_P = x\,\{1 + {}^1/_6\,.\,p^2_P - {}^1/_{40}\,.\,p^4_P\},$$

woraus mit $p_P = \dfrac{2\,a\,x^2}{x} = \dfrac{2y}{x}$ dann folgt:

$$s_P = x\,.\left\{1 + {}^2/_3\,.\left(\frac{y}{x}\right)^2 - {}^2/_5\,.\left(\frac{y}{x}\right)^4\right\} \qquad (11)$$

b) *Allgemeiner Fall.* Parabel $\widehat{AB} = s$ mit P_0 außerhalb AB. In diesem Falle ist: $\widehat{AB} = \widehat{P_0 B} - \widehat{P_0 A}$ oder $s = s_B - s_A$, resp.

$$s = \frac{x_B}{2}\left\{\sqrt{1 + p^2_B} + \frac{1}{p_B}\,.\,\mathrm{Ln}\,(p_B + \sqrt{1 + p^2_B})\right\}$$

$$- \frac{x_A}{2}\left\{\sqrt{1 + p^2_A} + \frac{1}{p_A}\,.\,\mathrm{Ln}\,(p_A + \sqrt{1 + p^2_A})\right\}$$

Wenn nun von diesem Bogen die Spannweite l, sowie die

---

* Ln = Bezeichnung für „Logarithmus naturalis".

Neigungen p_A und p_B gegeben sind, dann erhält man mit der Neigung h:

$$2h = (p_A + p_B) \,.\, l = 2(y_B - y_A) = p_B \,.\, x_B - p_A \,.\, x_A$$
$$= p_B (x_A + l) - p_A \,.\, x_A = p_B \,.\, x_B - p_A (x_B - l)$$

also

$$p_A \,.\, l = (p_B - p_A) \,.\, x_A \quad \text{und} \quad p_B \,.\, l = (p_B - p_A) \,.\, x_B \,.$$

Hieraus folgt nun für s:

$$s = \frac{l}{2(p_B - p_A)} \cdot \left\{ p_B \,.\, \sqrt{1 + p^2_B} - p_A \,.\, \sqrt{1 + p^2_A} + \mathrm{Ln} \frac{p_B + \sqrt{1 + p^2_B}}{p_A + \sqrt{1 + p^2_A}} \right\} \tag{12}$$

Für eine Parabel mit horizontaler Sehne $\overline{AB} = d$ ist die Bogenmitte M der Scheitelpunkt P_0 der Parabel und es gelten dann die folgenden Beziehungen:

$$x_B = -x_A = \frac{d}{2}, \; y_B = y_A = f \; (= \text{Pfeilhöhe}) \text{ und } \widehat{AB} = 2 \,.\, \widehat{P_0 B}.$$

Damit erhält man mittelst der Formel (9):

$$2 s_B = s = \frac{d}{2} \left\{ \sqrt{1 + \left(\frac{4f}{d}\right)^2} + \frac{d}{4f} \,.\, \mathrm{Ln} \left[\frac{4f}{d} + \sqrt{1 + \left(\frac{4f}{d}\right)^2} \right] \right\} \tag{13}$$

Anderseits ergibt sich mit der Näherungsformel (11):

$$s = d \left\{ 1 + {}^8/_3 \,.\, \left(\frac{f}{d}\right)^2 - \frac{32}{5} \cdot \left(\frac{f}{d}\right)^4 \right\},$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{oder mit } \dfrac{32}{5} = \dfrac{9}{10} \cdot \left(\dfrac{8}{3}\right)^2 \quad \text{und} \quad \varepsilon = {}^8/_3 \,.\, \left(\dfrac{f}{d}\right)^2 \\ s = d + \varepsilon \,.\, d - 0{,}9 \,.\, \varepsilon \,(\varepsilon \,.\, d). \end{array} \right\} \tag{14}$$

Diese letztere Näherungsformel gilt auch hinreichend genau für Parabeln mit beliebig geneigter Sehne $\overline{AB} = d$, falls die Pfeilhöhe f relativ klein ist; ja, es kann diese Formel für die Bogenlänge ganz allgemein für alle flachen Kurven mit parabelähnlicher Form angewendet werden. Wenn man sich daran erinnert, daß von allen Dreiecken mit gemeinsamer Grundlinie und gleicher Höhe die Summe der beiden andern Dreieckseiten beim gleichschenkligen Dreieck am kleinsten ist, so erkennt man, daß von allen Parabeln mit gleichen Werten d und f diejenige mit horizontaler Sehne die kleinste Bogenlänge aufweisen wird, weil dann von der Pfeilhöhe f der Endpunkt N (vergl. Fig. 2a) mit der Sehnenmitte $\overline{M}$ zusammenfällt.

III.

Anwendung der Parabel-Seilkurve.

Nach den orientierenden Ausführungen im Abschnitt A wird es sich bei allen nachfolgenden Rechnungsbeispielen um solche Seilkurven handeln, bei welchen sowohl die Spannweite l als auch die Neigung h immer die gleichen Werte beibehalten, nämlich:

$$\underline{l = 800{,}00 \text{ m}} \quad \text{und} \quad \underline{h = 320{,}00 \text{ m.}}$$

Damit gilt dann gemeinsam für alle Beispiele:

Länge d der Sehne AB: $d = \sqrt{l^2 + h^2} = 861.626$ m.

Neigung p der Sehne AB: $p = \frac{h}{l} = 0{,}40 = 40\ \%$.

Im weitern wurde — und zwar für ganz bestimmte Verhältnisse — für die Neigung des Seiles im untern Endpunkt A der Wert $p_A = 26{,}5\ \%$ angegeben. Wenn nun die Belastung des Seiles beispielsweise durch Schneedruck zunimmt, oder wenn bei einem beidseitig verankerten Seile auch nur die Temperatur eine Zunahme erfährt, wird der Seildurchhang z größer und damit erfährt dann die Seilneigung p_A eine Verminderung.

Aus diesem Grunde ist es notwendig, die Dimensionen der Seilkurve, sowie die Größe der Zugkräfte für verschiedene Werte von p_A zu ermitteln. Hiefür werden wir die Berechnungen für einige rundzahlige Annahmen p_A direkt durchführen und sodann die Resultate für weitere Zwischenwerte von p_A durch Interpolation bestimmen. Dabei berechnen wir die Bogenlänge s in der Hauptsache nach der Formel (14).

1. Berechnung der Seilkurven.

Bemerkungen zu nachstehender Tabelle. Die Größen f, ε und $\varepsilon \,.\, d$ wurden nur für die Parabel No. 1 direkt berechnet. Für die übrigen Kurven ergibt sich dann einfach:

$$f : f_1 = z : z_1, \text{ also } f_2 = {}^3/_4\, f_1,\ f_3 = {}^1/_2\, f_1,\ f_4 = {}^1/_4\, f_1.$$

$$\varepsilon d : \varepsilon_1 d = f^2 : f^2_1 = z^2 : z^2_1, \text{ also } \varepsilon_2 d = {}^9/_{16}\, \varepsilon_1 d,\ \varepsilon_3 \,.\, d = {}^1/_4 \,.\, \varepsilon_1 d,$$
$$\ldots\ \varepsilon_4 \,.\, d = {}^1/_{16} \,.\, \varepsilon_1 d.$$

Aus den Ergebnissen der obigen Rechnungstabelle erkennt man nun:

1. Die Größen p_B, z und f sind lineare Funktionen der Neigung p_A;
2. Die Bogenlänge s ist annähernd eine Funktion zweiten Grades von p_A, indem das subtraktive Glied $-0{,}9 \,.\, \varepsilon^2 \,.\, d$

	Seilkurve	No.	1	2	3	4
	Neigung p_A	—	0.20	0.25	0.30	0.35
Neigungen	$p = \frac{h}{l}$	—	0.40	0.40	0.40	0.40
	$p_B = 2p - p_A$	—	**0.60**	**0.55**	**0.50**	**0.45**
	$p_B' - p_A$	—	0.40	0.30	0.20	0 10
Bogenmitte	$z = (p_B - p_A) \cdot \frac{l}{8}$	m	**40.00**	**30.00**	**20.00**	**10.00**
	$f = \frac{l}{d} \cdot z$	„	37.139	27.854	18.570	9.285
Bogenlänge	d	m	861.626	861.626	861.626	861.626
	$\varepsilon = {}^8/_3 \cdot \left(\frac{f}{d}\right)^2$	—	0.004954			
	$\varepsilon \cdot d$	m	4.268	2.401	1.067	0.267
	$-0{,}9 \cdot \varepsilon \cdot (\varepsilon \cdot d)$	„	—0.018	—0.006	—0.001	—0.000
	$s = d + \varepsilon \cdot d - 0{,}9\, \varepsilon^2 d$	„	865.876	864.021	862.692	861.893
	s abgerundet	„	**865.88**	**864.02**	**862.69**	**861.89**

bei allen vier Kurven nur einen sehr kleinen Betrag ausmacht.

Nun gilt aber die Näherungsformel (14) eigentlich nur für Parabeln mit horizontaler Sehne AB und kleinem Pfeilverhältnis $\frac{f}{l}$. Da dieser letztern Bedingung bei der Parabel No. 1 am wenigsten entsprochen wird, wollen wir für diese Kurve die Bogenlänge s auch noch nach der theoretischen Formel (10) berechnen.

Hiefür erhält man dann mit siebenstelligen Logarithmen:

$p_P =$	$p_A = 0.20$		$p_B = 0.60$	
Zahlengattung	Num	log	Num	log
$1 + p^2_P$	1.04	0.017 0333	1.36	0.133 5389
$v = \sqrt{1 + p^2_P}$	1.019 804	0.008 5166	1.166 190	0.066 7694
$p_P \cdot v$	0.203 9608		0.699 7140	
$w = p_P + v$	1.219 804	0.086 2900	1.766 190	0.247 0374

Hieraus folgt nun weiter für den natürlichen Logarithmus Ln:

$$\mathrm{Ln}\left(\frac{w_B}{w_A}\right) = \frac{1}{M} \cdot \{\log w_B - \log w_A\} = 2{,}302\,58509 \,.\, 0{,}160\,7474,$$

wofür man mit den Vielfachen von $\frac{1}{M}$ auf Seite 112 der Gauß'schen Logarithmentafel erhält:

$$\mathrm{Ln}\left(\frac{w_B}{w_A}\right) = \frac{1}{M}\{16.10^{-2} + 74.10^{-5} + 74.10^{-7}\} = 0.370\,1346.$$

Damit erhält man nun für die Bogenlänge s:

$$\mathrm{I} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p_B - p_A} = \frac{1}{2} \cdot \frac{800}{0{,}60 - 0{,}20} = \underline{1\,000{,}00 \text{ m}}$$

$$\mathrm{II} = p_B \,.\, \sqrt{1 + p_B^2} - p_A \,.\, \sqrt{1 + p_A^2} = 0{,}4957\,532$$

$$\mathrm{III} = \mathrm{Ln}\,\frac{p_B + \sqrt{1 + p_B^2}}{p_A + \sqrt{1 + p_A^2}} = \underline{0{,}3701\,346}$$

$$\mathrm{II} + \mathrm{III} = 0{,}8658\,878$$

$$s = 1 \,.\, (\mathrm{II} + \mathrm{III}) = \underline{865.888 \text{ m}}$$

Für eine Parabel mit horizontaler Sehne und gleichen Werten für d und f wie bei der Parabel No. 1 erhält man als Bogenlänge nach der streng richtigen Formel (13): $s = 865.875$ m, was mit dem Ergebnis aus der Näherungsformel: $s = 865{\cdot}876$ m bis auf 1 mm übereinstimmt, dagegen um 13 mm kleiner ist als das Resultat nach der Formel (14). Die letztere Differenz gibt somit an, um wieviel die Parabel mit geneigter Sehne größer ist als diejenige mit horizontaler Sehne.

Bei den Parabeln No. 2 und No. 3 fallen natürlich die Fehler der Resultate mit der Näherungsformel noch wesentlich kleiner aus, während sie anderseits für Parabeln mit $z > 40$ m rasch zunehmen würden.

Betrachtet man schließlich die Sehne A B als Grenzfall einer Parabel mit der Pfeilhöhe o, bezw. mit $p_A = p_B = p = \frac{h}{l}$, so erhält man hier für die Bogenlänge s:

aus der Näherungsformel (13): $s = d + o = d$,

aus der theoretischen Formel (12): $s = \infty \,.\, o =$ unbestimmt.

Hieraus erkennt man, daß für kleine Pfeilhöhen die Näherungsformel, mittelst Rechenschieberrechnung für $s - d = {}^8\!/_3\, \frac{f^2}{d}$, die Bogenlänge nicht nur viel bequemer, sondern zudem noch viel genauer liefert, als die Rechnung mit siebenstelligen Logarithmen nach der „genauen“ Formel (12)!, weil hier s als Produkt aus einem sehr großen mit einem sehr kleinen Faktor erhalten wird.

Diese Verhältnisse sind nun zwar allgemein bekannt, aber ebenso „allgemein“, daß man ohne numerischen Nachweis an speziellen Beispielen in keiner Weise beurteilen kann, in welchem Bereich die Anwendung der Näherungsformel zulässig ist.

2. Die Zugkräfte.

a) *Das Seilgewicht.* Das Eigengewicht G eines Seiles von der Länge s, welches einen konstanten Querschnitt und dementsprechend pro Längeneinheit von s das konstante Gewicht g besitzt, ergibt sich sehr einfach zu: $G = g \cdot s$.

Diese sehr einfache Beziehung entspricht indessen nicht immer den tatsächlichen Verhältnissen.

Bei einem Seil mit beidseitiger Verankerung befinden sich immer die gleichen Seilquerschnitte direkt über den Auflagern A und B; die Seilmasse zwischen diesen Punkten bleibt also unverändert, wenn das Seil durch eine Temperaturerhöhung oder infolge Spannungsvermehrung durch zufällige Lasten eine Verlängerung erfährt. Daher ist bei einem solchen Seil das Totalgewicht G eine konstante Größe, während g mit zunehmendem s abnimmt.

Dem gegenüber ist bei einem Seil mit Gegengewicht bei A oder B die Zugkraft S_A oder S_B eine konstante Größe, was dann bei Aenderungen der Temperatur oder der Belastung eine Verschiebung des Seilquerschnittes bei A oder B zur Folge hat. Hier ist dann g eine Konstante, dagegen G eine veränderliche Größe.

Wenn nun bei einer mittleren Temperatur und bei einer Belastung nur durch Eigengewicht $p_A = 0{,}25$ und demgemäß $s = 864.02$ m ist, dann gilt — wie später nachgewiesen werden wird — für alle Temperaturen und gleichmäßig verteilte Belastungen: $0.20 < p_A < 0.30$ und demzufolge $865.88 > s > 862.69$ m. Die Aenderung der Seillänge ist daher relativ unbedeutend und deshalb ist es zulässig, für beide Arten der Seilbefestigung hinsichtlich des Gewichtes G die Seillänge s als eine Konstante zu betrachten, welche dem Mittelwerte $p_A = 0.25$ entspricht.

Mit $g = 1{,}0$ kg/m^1 erhält man dann als Seilgewicht rund

$$\underline{G = 865 \text{ kg.}}$$

b) *Berechnung der Zugkräfte.* Die Bestimmung der Zugkräfte auf rein graphischem Wege wird bei flachen Seilkurven ungenau, während die Berechnung nach den unter I angegebenen Formeln etwas mühsam ist. Beide Nachteile können vermieden werden, wenn ein kombiniertes Verfahren angewendet wird.

Der der Seilmitte M entsprechende Strahl $\mathfrak{M}O$ im Kräftepolygon besitzt bei allen Seilkurven die Neigung $p_M = p = 0{,}40$. Die Lage des Poles O auf $\mathfrak{M}O$ ergibt sich durch Rechnung aus der Poldistanz:

$$H = \frac{G}{p_B - p_A},$$

welche sich mit dem Werte von p_A ändert.

Die Zugkräfte $S_A = O\mathfrak{A}$, $S_M = O\mathfrak{M}$ und $S_B = O\mathfrak{B}$ können dann hinreichend genau aus dem Kräftepolygon abgegriffen werden. Als Mittelwert S der im ganzen Seil auftretenden Zugkräfte ergibt sich nach der Simpson'schen Formel der Wert: $S = {}^1/_6\,(S_A + 4\,S_M + S_B)$, der indessen hinreichend genau mit S_M übereinstimmt.

Als mittlere Zugspannung σ, die für spätere Anwendungen verwertet wird, erhält man dann mit dem Eisenquerschnitt $F = 1{,}07\ \text{cm}^2$:

$$\sigma = \frac{S}{F} \sim \frac{S_M}{F}.$$

Unter Außerachtlassung der Parabel No. 4 mit $p_A = 0.35$, der für die hier vorliegende Aufgabe keine praktische Bedeutung zukommt, erhält man nun mit $G = 0{,}865^{\,t}$ und $p = \frac{h}{l} = 0{,}40$:

	Parabel	No.	1	2	3
Neigungen	p_A	—	0.20	0.25	0.30
	p_B	—	0.60	0.55	0.50
	$p_B - p_A$	—	0.40	0.30	0.20
Zugkräfte	$H = G : (p_B - p_A)$	t	2.16	2.88	4.32
	S_A	t	**2.21**	**2.97**	**4.51**
	$S_M \sim S$	t	2.33	3.10	4.65
	S_B	t	**2.52**	**3.29**	**4.83**
Spannung	$\sigma = \frac{S}{F}$	$\frac{t}{cm^2}$	**2.17**	**2.90**	**4.35**
Relationen	$S_M - S_A$	t	0.12	0.13	0.14
	$S_B - S_M$	t	0.19	0.19	0.18
	$S_M \cdot (p_B - p_A)$	t	0.932	0.930	0.930

Da das Produkt $S_M \,.\, (p_B - p_A)$ einen konstanten Wert C hat, so ergibt sich für andere Werte $p_B - p_A$ einfach: $S_M = C : (p_B - p_A)$, worauf man mit den annähernd konstanten Differenzen $S_M - S_A$ und $S_B - S_M$ dann weiter erhält:

$$S_A = S_M - (S_M - S_A) \quad \text{und} \quad S_B = S_M + (S_B - S_M)$$
$$= S_M - 0.13 \quad \text{und} \quad = S_M + 0.19.$$

3. Bestimmung von Zwischenkurven.

Für die Feststellung des Einflusses von Temperaturänderungen, sowie von Schneedruck und Winddruck ist es notwendig, die Größen z, f, s, sowie S_A, S_B, S_M und σ für die Werte $p_A = 0{,}20$; $0{,}21$; $0{,}22 \ldots 0{,}29$; $0{,}30$ zu ermitteln.

Die Größen z und f sind lineare Funktionen von p_A; für die Bestimmung der Werte s zeichnen wir aus den 3 gegebenen Werten s_1, s_2 und s_3 für $p_A = 0{,}20$; $0{,}25$ und $0{,}30$ die Kurve $s = f\,(p_A)$, die als Parabel mit vertikaler Achse betrachtet werden kann. Für die Ermittlung der Zugkräfte werden die am Schlusse der letzten Tabelle angegebenen Relationen benützt.

p_A	Seilkurve				Kräftepolygon			
	$p_B = 2p - p_A$	z	f	s	$S_M = \frac{C}{p_B - p_A}$	$S_A = S_M - 0.13$	$S_B = S_M + 0.19$	$\sigma = S_M : F$
—	—	m	m	m	t	t	t	t/cm²
0.20	0.60	40.00	37.14	865.88	2.33	2.20	2.52	2.18
0.21	0.59	38.00	35.28	5.48	2.44	2.31	2.63	2.28
0.22	0.58	36.00	33.42	5.08	2.58	2.45	2.77	2.41
0.23	0.57	34.00	31.56	4.71	2.74	2.61	2 93	2 56
0.24	0.56	32.00	29.70	4.36	2.90	2.77	3.09	2.71
0.25	0.55	30.00	27.85	4.02	3.10	2.97	3.29	2.90
0.26	0.54	28.00	25.99	3.71	3.32	3.19	3.51	3.10
0.27	0.53	26.00	24.14	3.43	3.58	3.45	3.77	3.34
0.28	0.52	24.00	22.28	3.16	3.88	3.75	4.07	3.62
0.29	0 51	22.00	20.43	2.92	4.22	4.09	4.41	3.85
0.30	0.50	20.00	18.57	862.69	4.65	4.52	4.84	4 35

(Fortsetzung folgt.)