

**Zeitschrift:** Schweizerische Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik =  
Revue technique suisse des mensurations et améliorations foncières

**Herausgeber:** Schweizerischer Geometerverein = Association suisse des géomètres

**Band:** 19 (1921)

**Heft:** 3

**Artikel:** Zur Praxis einiger Ausgleichungsaufgaben

**Autor:** Hammer, E.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-186794>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 16.03.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

$$\begin{aligned}
 &+ 2 \left(x + \frac{c}{2}\right)^2 y^2 \left[\left(x - \frac{c}{2}\right)^2 + y^2\right]^4 \\
 &+ 2 \left(x + \frac{c}{2}\right)^2 y^2 \left[\left(x + \frac{c}{2}\right)^2 + y^2\right]^2 \left[\left(x - \frac{c}{2}\right)^2 + y^2\right]^2 \\
 &+ 2 \left(x - \frac{c}{2}\right)^2 y^2 \left[\left(x + \frac{c}{2}\right)^2 + y^2\right]^2 \left[\left(x - \frac{c}{2}\right)^2 + y^2\right]^2 \\
 &+ 2 \left(x - \frac{c}{2}\right)^2 y^2 \left[\left(x + \frac{c}{2}\right)^2 + y^2\right]^4 \\
 &- 2 y^4 \left[\left(x + \frac{c}{2}\right)^2 + y^2\right]^2 \left[\left(x - \frac{c}{2}\right)^2 + y^2\right]^2 = 0.
 \end{aligned}$$

Für Ueberschlagsbetrachtungen genügt es anzunehmen, die große Axe gehe vom Außenpunkt nach der Mitte der Basis  $c$ .

Figur 2 zeigt ausgezogen die Kurven für die großen Halbachsen, punktiert die Kurven für die kleinen Halbachsen für den Fall  $\mu = 1'$  (Minute centesimal) und  $c = 1000$  Meter.

Zollikon, im Oktober 1920.

F. Baeschlin.

## Zur Praxis einiger Ausgleichungsaufgaben.

Von E. Hammer, Stuttgart.

Die folgenden Zeilen geben Bemerkungen zu zwei Ausgleichungsaufgaben, die *Eggert* in seine neue, wesentlich erweiterte Bearbeitung des ersten Bandes des *Jordanschen Handbuchs der Vermessungskunde* (7. Auflage, 1920) aufgenommen hat; die eine als einfaches Beispiel für *vermittelnde* Bestimmung zweier Unbekannten bei nichtlinearem Zusammenhang zwischen ihnen und den Messungen, die zweite als ebenso einfaches Beispiel für direkte *bedingte* Messungen. Meine Bemerkungen sind z. T. didaktischer Art, z. T. aber wohl auch für solche Leser von Interesse, die schon weiter in die Ausgleichungsrechnung eingedrungen sind.

I. Die *erste* der genannten Aufgaben (a. a. O. S. 72) ist die Berechnung der Koordinaten eines Lagepunktes in einem System gegebener Punkte durch «mehrfachen Bogenschnitt», wie der in Norddeutschland beliebte Ausdruck lautet. Die Aufgabe ist als ansprechendes einfaches Beispiel für vermittelnde Bestimmung zweier Unbekannten bei zunächst nichtlinearen Verbesserungsgleichungen viel behandelt worden, von *Koll* in der preußischen «Anweisung IX», von *Eggert* a. eben a. O., rech-

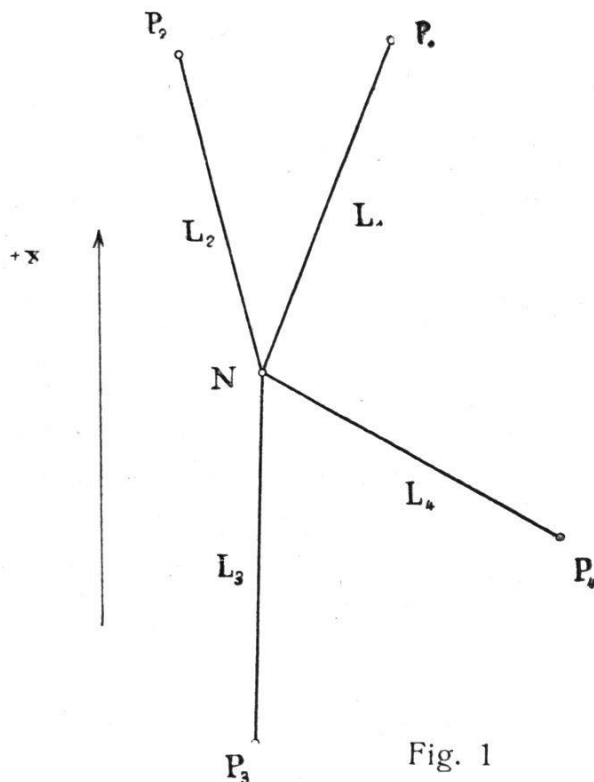
nerisch und graphisch von *Hammer* in «Zeitschrift für Mathematik und Physik» (früher Schlömilch), Band 43, 1898, S. 105 bis 115, rechnerisch von *Dokulil* in der «Oest. Zeitschrift für Vermessungswesen» 1917, S. 65 bis 69, und daraufhin abermals von mir in derselben Zeitschrift, 1917, No. 7/8. Die folgenden Bemerkungen nehmen gelegentlich Bezug auf meine zwei genannten Arbeiten als Hr. I (Z. Math., 1898) und Hr. II (Oest. Z., 1917).

1. Die *Aufgabe* mit den *Eggertschen* Zahlen ist folgende: Von den vier gegebenen Punkten  $P_1, P_2, P_3, P_4$  aus mit den Koordinaten wie unten angeschrieben, sind die Strecken  $L_1, L_2, L_3, L_4$  nach dem zu bestimmenden Punkt  $N$  gemessen mit

	x	y	gemessene Str.	
(1)	$P_1$ + 551,78	+ 899,06	$L_1 = 123,81$	(2)
	$P_2$ + 548,11	+ 824,95	$L_2 = 114,59$	
	$P_3$ + 307,63	+ 850,40	$L_3 = 129,25$	
	$P_4$ + 377,57	+ 955,51	$L_4 = 118,78$	

den Ergebnissen (2); die Koordinaten von  $N$  sind mit ihren m. F. zu bestimmen.

Der *Eggertsche* Näherungspunkt, dessen *kleine* Koordinaten-Korrekturen  $x$  und  $y$  noch zu ermitteln sind, ist (3)  $N^0$   $x_0 = + 436,95, y_0 = + 852,66$ . Die Figur 1 zeigt etwa im Maßstab 1 : 3700 die gegenseitige Lage der Punkte. Mit Festhaltung der Rechenschärfe 1 mm in den Strecken  $L_0$  von den gegebenen Punkten nach dem Näherungspunkt  $N_0$  und demnach derselben Schärfe in den  $l$  der Verbesserungsgleichungen, ferner mit den in (5) angegebenen Zahlenwerten bis auf 1 Einh.<sub>3</sub> der Koeffizienten  $a, b$  der Unbekannten  $x, y$  in den Verbesserungsgleichungen, nämlich der Ausdrücke



$$(4) \quad a_1 = -\frac{x_1 - x_0}{L_1}, \quad b_1 = -\frac{y_1 - y_0}{L_1}$$

(wobei es selbstverständlich gleichgiltig ist, ob in den Nennern die  $L$  oder die  $L_0$  gesetzt werden), finden sich a. a. O., die  $l$  in Metern genommen, die Verbesserungsgleichungen

$$(5) \quad \begin{cases} v_1 = -0,928 x - 0,375 y + 0,040 \\ v_2 = -0,970 x + 0,242 y - 0,028 \\ v_3 = +1,000 x + 0,017 y + 0,090 \\ v_4 = +0,500 x - 0,866 y - 0,019 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Die Auflösung der} \\ \text{zugehörigen Nor-} \\ \text{malgleichungen,} \\ \text{deren Koeffizienten} \end{array}$$

auf 1 Einh.<sub>4</sub> angegeben werden, gibt:

$$(6) \quad \begin{cases} x = -0,0234 \text{ (m)}, y = -0,0034 \text{ (m)} \\ x_n = 436,927 \quad y_n = 852,657 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{und damit also} \\ \text{nach (5) als Sy-} \\ \text{stem der Verbesserungen der Messungen, wieder bis auf ein} \\ \text{Millimeter gerechnet,} \end{array}$$

$$(7) \quad \begin{cases} v_1 = +0,062 \text{ (m)} \\ v_2 = -0,007 \text{ „} \\ v_3 = +0,067 \text{ „} \\ v_4 = -0,028 \text{ „} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Nach Anbringung dieser } v \text{ an den} \\ \text{L nach (2) wird die Ueberein-} \\ \text{stimmung der } \underline{L} \text{ (verbesserten} \\ \text{Messungen) mit den aus den aus-} \\ \text{geglichenen } (x_n y_n) \text{ sich ergebenden Abständen des Punktes N} \end{array}$$

von den fest gegebenen Punkten nachgewiesen. Dem Stand der Einführung des Lesers bei *Eggert* an dem a. O. entsprechend, wird dort die Fehlerrechnung,  $[v v]$ ,  $m_l$ ,  $m_x$ ,  $m_y$  noch nicht beigelegt; ferner ist bei der unbedeutenden Abweichung aller vier Messungen von dem Betrag 120 m in diesem Anfänger-Beispiel von Einführung verschiedener Gewichte für die  $L$  abgesehen.

2. *Rechnung mit weniger Dezimalen.* Die Rechnungsgenauigkeit bei *Eggert* ist, wie die vorstehenden Zahlen zeigen, aus naheliegenden Gründen absichtlich größer, als erforderlich wäre. Wir wollen einmal an diesem einfachen Beispiel empirisch untersuchen, wieviel an Genauigkeit der Ergebnisse verloren geht, wenn wir die Rechnungsschärfe, der Genauigkeit der Daten und damit dem praktischen Bedürfnis gemäß, zunächst so verringern, daß für die *Ausgleichung* durchaus der gewöhnliche Rechenschieber ausreicht (vgl. dazu auch Hr. I). Da die Koordinaten der fest gegebenen Punkte auf 1 cm abgerundet sind und diese Zahlen, wenn auch die Koordinaten fehlerfrei bestimmt wären, einen möglichen Maximalfehler von 5 mm haben,

also einer der gegebenen Punkte um bis zu 7 mm von dem Punkte entfernt sein kann, der durch die Koordinatenzahlen bestimmt ist, da ferner die gemessenen  $L$  ebenfalls auf 1 cm abgerundet (und sicher nicht bis zu diesem Betrage genau) sind, so ist von vornherein die *Rechnung* mit der Genauigkeit 1 cm (größter Fehler 5 mm) genügend. Mit der Quadrattafel in *Gauß'* fünfstelligen Logarithmentafeln erhält man, bei Annahme der Koordinaten (3) des obigen Näherungspunktes  $N_0$  folgende  $L_0$  mit Abrundung auf 1 cm :

$$(8) \quad \begin{cases} L_{0,1} = 123,85 \\ L_{0,2} = 114,56 \\ L_{0,3} = 129,34 \\ L_{0,4} = 118,76 \end{cases} \quad \text{und also für die } l, \text{ ebenfalls mit Ab-} \\ \text{rundung auf 1 cm und mit dem Centi-} \\ \text{meter als Längenmaß die Zahlen}$$

$$(9) \quad \begin{cases} l_1 = +4 \\ l_2 = -3 \\ l_3 = +9 \\ l_4 = -2 \end{cases} \quad \text{endlich für die Koeffizienten } a \text{ und } b \text{ von} \\ \text{x und y in den Verbesserungsgleichungen} \\ \text{(10) die folgenden Zahlen, auf 1 Einheit,} \\ \text{abgerundet; daneben sind gleich die für die}$$

Normalgleichungen zu bildenden Zahlen  $aa, ab, \dots$  gesetzt,

$$(10) \quad \begin{cases} v_1 = a_1 x + b_1 y + l_1 \\ v_2 = a_2 x + b_2 y + l_2 \\ v_3 = a_3 x + b_3 y + l_3 \\ v_4 = a_4 x + b_4 y + l_4 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{alles mit dem gewöhnlichen} \\ \text{Rechenschieber und ebenfalls} \\ \text{mit Abrundung auf 1 Einheit,} \\ \text{gerechnet.} \end{array}$$

a	b	$l$ l(cm)	aa	ab	al	bb	bl	ll
-0,93	-0,37	+4	0,86	+0,34	-3,72	0,14	-1,48	16
-,097	+0,24	-3	0,94	-0,23	+2,91	0,06	-0,72	9
+1,00	+0,02	+9	1,00	+0,02	+9,00	0,00	+0,18	81
+0,50	-0,86	-2	0,25	-0,43	-1,00	0,74	+1,72	4
			<u>3,05</u>	-0,30	+7,19	<u>0,94</u>	-0,30	<u>110</u>

Die Auflösung der zwei Normalgleichungen mit dem gewöhnlichen Rechenschieber, in leicht verständlicher Anordnung, die nur die notwendig zu schreibenden Zahlen, diese aber ohne jede Weglassung enthält, folgt hier in (12). Die quadratischen Koeffizienten sind mit — und ..... unterstrichen; sonst wird wohl nur noch zu erwähnen sein, daß ich die Reduktion von  $[ll]$  auf hier  $[ll \cdot 2]$  gerne rechts *neben* die Eliminationsrechnung für die Unbekannten setze: es ist dann allemal von der vorhergehenden  $[ll]$ -Summe dort, wo ein — unterstrichener

Anfangskoeffizient steht, das Quadrat des Absolutglieds dividiert durch diesen — Koeffizienten abzuziehen, um die  $[ll]$  der folgenden Stufe zu finden, z. B. in der linken Hälfte  $[ll \cdot 1] = [ll] - (7,19^2 : 3,05)$ , d. h.  $93 = 110 - 17$ , ebenso  $93 = 93 - (0,41^2 : 0,91) = [ll \cdot 2] = [vv]$ .

$$(12) \left\{ \begin{array}{l|l|l|l} \begin{array}{l} 3,05 x - 0,30 y + 7,19 = 0 \\ \quad \quad \quad \underline{0,94} \quad -0,30 \\ \quad \quad \quad \underline{\quad \quad \quad} \\ \quad \quad \quad -0,03 \quad +0,71 \end{array} & \begin{array}{l} 110 \\ -17 \\ \hline 93 \\ 0 \\ \hline 93 \end{array} & \begin{array}{l} 0,94 y - 0,30 x - 0,30 = 0 \\ \quad \quad \quad \underline{3,05} \quad + 7,19 \\ \quad \quad \quad \underline{\quad \quad \quad} \\ \quad \quad \quad -0,10 \quad -0,10 \end{array} & \begin{array}{l} 110 \\ -0 \\ \hline 110 \\ -17 \\ \hline 93 \end{array} \\ \hline \begin{array}{l} 0,91 y + 0,41 = 0 \\ y = -\frac{0,41}{0,91} = -0,45 \text{ cm} \\ g_y = 0,91 \\ \underline{\underline{[ll \cdot 2] = [vv] =}} \end{array} & \begin{array}{l} 93 \\ 0 \\ \hline 93 \end{array} & \begin{array}{l} 2,95 x + 7,09 = 0 \\ x = -\frac{7,09}{2,95} = -2,41 \text{ cm} \\ g_x = 2,95 \\ \underline{\underline{[ll \cdot 2] = [vv] =}} \end{array} & \begin{array}{l} 110 \\ -17 \\ \hline 93 \end{array} \end{array} \right.$$

Daß das Gewicht von  $x$  und damit von  $x_n$  viel größer ausfallen mußte als das von  $y$  und damit von  $y_n$ , ist ohne Rechnung aus dem Anblick der Figur klar, indem die Bestimmungslinien (Oerter) für  $N$  den Messungen gemäß viel mehr der Richtung der Ordinatenachse als der der Abszissenachse sich nähern, und somit die Abszisse  $x_n$  schärfer als die Ordinate  $y_n$  bestimmt sein muß.

Das Ergebnis von (12),  $x = -2,4 \text{ cm}$ ,  $y = -0,5 \text{ cm}$  und damit auf Halbcentimeter abgerundet

$$(13) \quad x_n = 436,92_5, \quad y = 852,65_5$$

stimmt innerhalb dieses  $1/2$ -cm mit dem Ergebnis von *Eggert*, vgl. (6); ebenso ergeben sich für die  $v$  aus der vorstehenden Auflösung (wenn wegen der Kontrolle für  $[vv] = 93$  zunächst die  $v$  auf 1 mm gerechnet werden) die in (14) angeschriebenen Zahlen, die von den *Eggertschen* (oben in (7) angeschrieben) nirgends um mehr als 2 mm abweichen. Die Quadratsumme

$$(14) \left\{ \begin{array}{ll} v_1 = +6,4 \text{ cm} & \text{der } v \text{ nach (14) gibt hier 93 über-} \\ v_2 = -0,8 \text{ »} & \text{einstimmend mit } [ll \cdot 2] \text{ der Aus-} \\ v_3 = +6,6 \text{ »} & \text{gleichung. Fügen wir hier auch noch} \\ v_4 = -2,8 \text{ »} & \text{die Fehlerrechnung bei, so wird} \end{array} \right.$$

(15)  $m_1$  (mittlerer Fehler der Gewichtseinheit, d. h. hier einer der vier Messungen)

$$m_1 = \sqrt{\frac{93}{4-2}} = \pm 6,8 \text{ cm, und damit}$$



$$(16) \left\{ \begin{array}{l} \text{mittl. Fehler der Abszisse } m_x = m_{x_n} = \frac{6,8}{\sqrt{2,95}} = \pm 4 \text{ cm u.} \\ \text{» » » Ordinate } m_y = m_{y_n} = \frac{6,8}{\sqrt{0,91}} = \pm 7 \text{ cm} \end{array} \right.$$

(Fortsetzung folgt.)

## Längenbestimmung unzugänglicher Ordinaten bei Koordinatenaufnahmen.

Von Prof. Dr. H. Löschner, Brünn, Deutsche Technische Hochschule.

### I.

Bei Koordinatenaufnahmen kommt es zuweilen vor, daß einzelne Ordinaten unzugänglich oder nicht gut meßbar sind, beispielsweise, wenn eine Häuserreihe am Steilufer eines breiten Mühlganges vom andern Ufer aus aufzunehmen ist.

Man kommt zunächst auf den Gedanken, das sogenannte „Umlegen der Ordinaten“ anzuwenden, das in manchen Lehrbüchern der Vermessungskunde<sup>1</sup> im Anschlusse an die Besprechung der Koordinatenaufnahme vorgeführt wird. Diese Methode besteht im Abstecken rechtwinklig gleichschenkliger Dreiecke mit Hilfe einer Kreuzscheibe oder eines zum Abstecken 45-gradiger Winkel geeigneten Winkelspiegels. Es ist ein Vorwärtsabschneiden unter Einhaltung von Bedingungen in bezug auf die Größe der Winkel. Die Methode erscheint zwar theoretisch sehr einfach und hat den Vorteil, daß die Ordinatenlänge ohne jede Rechnung erhalten wird; sie läßt sich aber in der Praxis oft nicht anwenden, weil ein bequemes Hilfsmittel zur Absteckung 45-gradiger Winkel nur selten zur Verfügung steht. Uebrigens ist zu beachten, daß beim Umlegen einer Ordinate der Freihand-Winkelabstecker in *zwei* Punkten verwendet wird und somit der bei Freihandinstrumenten sehr bemerkenswerte Zentrierungsfehler *zweimal* einwirkt. Ferner ist zu beachten, daß schon bei der gewöhnlichen Koordinatenaufnahme mit nur einmaliger Verwendung des Winkelspiegels die Ordinatenlänge bei genaueren Arbeiten nicht gerne viel über 20 m ausgedehnt wird, und daß beim Umlegen der Ordinaten wegen der Doppel-

<sup>1</sup> Vergl. Jordan-Reinhertz, Bd. II, 1904, S. 94; Dolezal's Hand- und Lehrbuch, Bd. I, S. 661.