Zeitschrift: Schweizerische Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Revue technique suisse des mensurations et améliorations foncières

Herausgeber: Schweizerischer Geometerverein = Association suisse des géomètres

Band: 19 (1921)

Heft: 4

Artikel: Zur Praxis einiger Ausgleichungsaufgaben [Fortsetzung]

Autor: Hammer, E.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-186798

SCHWEIZERISCHE

Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik

ORGAN DES SCHWEIZ. GEOMETERVEREINS

REVUE TECHNIQUE SUISSE DES MENSURATIONS ET AMÉLIORATIONS FONCIÈRES

ORGANE DE LA SOCIÉTÉ SUISSE DES GÉOMÈTRES

Redaktion: F. BAESCHLIN, Professor, Zollikon (Zürich)

Ständiger Mitarbeiter für Kulturtechnik: Prof. C. ZWICKY, Zürich, Bergstr. 131

Collaborateur attitré pour la partie en langue française: CH. ROESGEN, ingénieur-géomètre, Genève, 11, rue de l'Hôtel-de-Ville — Redaktionsschluß: Am 1. jeden Monats

Expedition, Inseraten- und Abonnements-Annahme:

BUCHDRUCKEREI WINTERTHUR VORM. G. BINKERT, WINTERTHUR

Jährlich 12 Nummern (erscheinend am zweiten Dienstag jeden Monats) und 12 Inseraten-Bulletins (erscheinend am vierten Dienstag jeden Monats)	**No. 4** des **XIX. Jahrganges** der „Schweiz. Geometerzeitung". **12. April 1921**	Jahresabonnement Fr. 12.— (unentgeltlich für Mitglieder) Inserate: 50 Cts. per 1spaltige Nonp.-Zeile

Zur Praxis einiger Ausgleichungsaufgaben.

Von *E. Hammer*, Stuttgart.

(Fortsetzung.)

3. *Nochmalige Verringerung des Rechenaufwandes.* Versuchen wir (vgl. ebenfalls Hr. II), ob nicht noch geringerer Rechenaufwand hier zum Ziele führt, indem wir die a, b auf 1 Einh.$_1$ abrunden. Nachdem die L_0 mit der Quadrattafel bestimmt sind, sieht dann die Rechnung wie folgt aus und es ist dann zu ihrer Durchführung keine Ziffer mehr zu schreiben als hier folgt, und kein Rechenhilfsmittel irgend welcher Art, nicht einmal ein Rechenschieber mehr notwendig, einschließlich der Auflösung der Normalgleichungen in (18):

	a	b	l (cm)	aa	ab	al	bb	bl	ll
(17)	−0,9	—0,4	+4	0,81	+0,36	—3,6	0,16	—1,6	16
	—1,0	+0,2	—3	1,00	—0,20	+3,0	0,04	—0,6	9
	+1,0	+0,0	+9	1,00	—	+9,0	—	—	81
	+0,5	−0,9	−2	0,25	—0,45	—1,0	0,81	+1,8	4
				3,1	—0,3	+7,4	1,0	−0,4	110

	$\underline{3{,}1}\,x - 0{,}3\,y + 7{,}4 = 0$	110	$\underline{1{,}0}\,y - 0{,}3\,x - 0{,}4 = 0$	110
	$1{,}0 \quad -0{,}4$	*−18*	$3{,}1 \quad +7{,}4$	*−0*
	$-0{,}0 \quad +0{,}7$		*$-0{,}1 \quad -0{,}1$*	
(18)	$\underline{1{,}0}\,y + 0{,}3 = 0$	92	$\underline{3{,}0}\,x + 7{,}3 = 0$	110
	$y = -0{,}3$ cm	*−0*	$x = -2{,}4$ cm	*−18*
	$g_y = 1{,}0$	92 =[vv]	$g_x = 3{,}0$	92 =[vv]

Selbst diese Rechnung stimmt also noch in den Ergebnissen auf wenige Millimeter mit der *Eggert*schen und der in **2.** angegebenen überein, sowohl was x_n y_n, als die v betrifft; auch [v v] mit hier 92 bleibt wie in **2.** bestehen, und damit, vgl. g_x und g_y, die m. F. der berechneten Abszisse und Ordinate. Daß also auch noch hier praktisch mehr als genügende Genauigkeit erreicht ist, ist jedenfalls angesichts der Klagen über den „Rechenaufwand bei der Anwendung der kleinsten Quadrate“ (beliebter Einwand von solchen, die die Sache nicht kennen) bemerkenswert, wenn man auch meist bei der in **2.** eingehaltenen Rechnungsschärfe (Anwendung des Rechenschiebers) stehen bleiben wird. Man muß in der Tat oft staunen über den ganz überflüssigen Dezimalenluxus, der bei den einfachsten Ausgleichungen der niedern Geodäsie getrieben wird und dessen Fortsetzung fast nur durch die Anwendung der die überflüssigen Stellen ohne weitern Rechenaufwand mitliefernden Rechenmaschinen zu erklären ist. Man sollte bei diesen einfachen Aufgaben der Land- und Feldmessung mit z. B. nur zwei Unbekannten viel mehr als es auch heute noch zu geschehen scheint, von der *„exakten“* Arbeit mit der Rechenmaschine absehen zu Gunsten der einfachern *mechanisch*-logarithmischen Rechnung mit Hilfe des *Rechenschiebers.*

Eine mit der Frage nach der erforderlichen Rechenschärfe zusammenhängende ist noch die nach der notwendigen *Annäherung* der Näherungswerte der Unbekannten an ihre endgültigen Werte, besonders bei von Haus aus nicht linearen Verbesserungsgleichungen. Es ist sehr einfach zu sehen, daß bei vermittelnden Beobachtungen in dem Falle schon von Anfang an *linearer* Beziehungen zwischen Messungen und Unbekannten, wo bekanntlich die *praktisch* zweckmäßige Durchführung der Zahlenrechnung ebenfalls fast ausnahmslos schon die Einführung von Näherungswerten für die Unbekannten verlangt, der *Grad* der Annäherung dieser Näherungswerte theoretisch ganz *ohne Einfluß* auf die Endwerte der Unbekannten ist, d. h. für diese Endwerte stets (theoretisch) *genau* dieselben Zahlen erhalten werden, was auch die gebrauchten Näherungswerte sein mögen. Bei von Anfang an *nicht* linearem Zusammenhang zwischen Messungen und Unbekannten *müssen* Näherungswerte der Unbekannten eingeführt werden, und hier ist nun selbstverständlich das Ergebnis der Ausgleichung *nicht mehr unabhängig* vom Grad der Annäherung dieser Werte; dieser Grad der Annäherung der benützten Näherungswerte kommt auch hier nur solange *praktisch* nicht in Betracht, als bei der Entwicklung nach dem Taylorschen Satz die kleinen Größen zweiter Ordnung gegen die erster Ordnung, die nur die ersten Potenzen der gesuchten Korrektionen x, y... der Näherungswerte enthalten, tatsächlich nicht in Betracht kommen.

Es ist dem Anfänger sehr zu empfehlen, an bestimmten einfachen Aufgaben, wie der vorliegenden, selbst empirisch festzustellen, *welcher* Annäherungsgrad der Näherungswerte erforderlich ist; er mag z. B. die vorstehende Aufgabe mit der in **2.** festgehaltenen Rechenschärfe, die ja für jede vollständig durchgeführte Ausgleichung nur wenige Minuten in Anspruch nimmt, mit Annahmen für (x_0 y_0) durchrechnen, die von denen in (3) um je 10 cm, 20 cm, 50 cm, 1 m abweichen (beachte dabei auch die für schlanke Rechnung beste Wahl des Längenmaßes). Er wird dadurch den Wert „guter" Näherungswerte für die *Bequemlichkeit* der Durchführung der Ausgleichung schätzen lernen und zugleich ein empirisch begründetes Urteil über den Grad der *erforderlichen* Annäherung gewinnen. Ich möchte auf eine empirische Untersuchung dieser Art bei einer verwandten Aufgabe (Rechnung eines trigonometrischen Neupunktes durch Vorwärtseinschneiden) hinweisen, die kürzlich *Aubell*, ebenfalls wesentlich im didaktischen Interesse angestellt hat (Oesterreichische Zeitschrift für Vermessungswesen, XVIII, 1920, Seiten 80 bis 85).

4. *Graphische Ableitung der linearen Verbesserungsgleichungen* im Falle nicht linearer Beziehungen zwischen Messungen und Unbekannten bei vermittelnden Beobachtungen. Schon oft und mit Recht ist empfohlen worden, besonders dem Anfänger zur Verifikation der Entwicklung nach dem Taylorschen Satz (so einfach auch diese bei den wichtigsten vorkommenden Aufgaben zu sein pflegt, so beim Vorwärts- oder Rückwärtseinschneiden eines trigonometrischen Neupunktes), womöglich der algebraischen Entwicklung eine geometrische Veranschaulichung zur Seite zu stellen. Dies ist wichtiger als algebraische „Vereinfachungen" einfachster Differentiationen; vgl. meine Bemerkungen zu einem Aufsatz von *Werkmeister*, Oesterreichische Zeitschrift für Vermessungswesen, 1915, Seiten 11 bis 17. Ganz ähnlich bei der vorliegenden Aufgabe: die einfache geometrische Anschauung gestattet sofort die Ablesung des Differentiationsergebnisses, nämlich die Ausdrücke für die Koeffizienten a, b

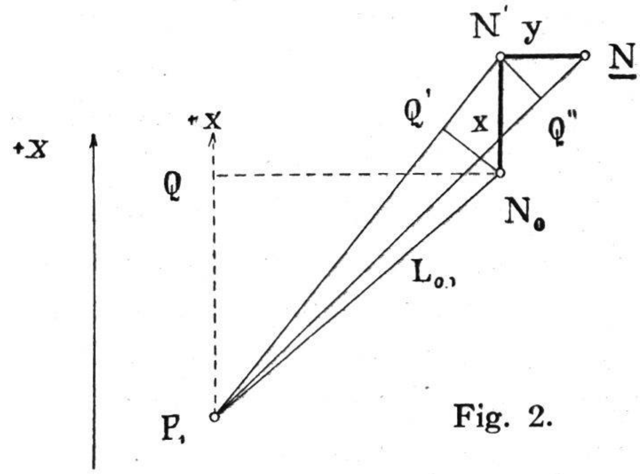

Fig. 2.

nach (4). Der Näherungspunkt N_0 wird um die kleinen Beträge (die Unbekannten der Ausgleichung) x und y nach N^1 und dann nach $\underline{N}$ (*endgültige* Lage des Neupunktes) verschoben; wie ändert sich damit die Länge $L_{0,1} = P_1 N_0$? Fällt man (vergleiche Figur 2) von N_0 das Lot $N_0 Q'$ auf $P_1 N'$ und von N' das Lot $N' Q''$ auf $P_1 \underline{N}$, so werden damit zwei rechtwinklige Dreiecke $N_0 N' Q'$ und $N' \underline{N} Q''$ mit den kleinen Hypotenusen x und y gebildet, die praktisch genau dem Dreieck $P_1 N_0 Q$ mit Hypotenuse $L_{0,1}$ und Katheten $x_0 - x_1$ und $y_0 - y_1$ ähnlich sind; da ferner praktisch genau $\overline{P_1 Q'} = \overline{P_1 N_0}$ ist, so liest man mit Hilfe dieser zwei kleinen Dreiecke einfach durch Proportion ab:

$$\underline{L_1} = P_1 \underline{N} = L_{0,1} + Q' N' + Q'' \underline{N} \text{ oder}$$

$$\text{(19)} \qquad L_1 + v_1 = L_{0,1} + \frac{x_0 - x_1}{L_{0,1}} \cdot x + \frac{y_0 - y_1}{L_{0,1}} \cdot y,$$

wobei selbstverständlich wieder gleichgültig ist, ob im Nenner der zwei kleinen Zusatzglieder rechts $L_{0,1}$ oder L_1 steht; es ist also in Uebereinstimmung mit (4):

$$a_1 = \frac{x_0 - x_1}{L_1} = -\frac{x_1 - x_0}{L_1}; \quad b_1 = \frac{y_0 - y_1}{L_1} = -\frac{y_1 - y_0}{L_1} \text{ u. s. f.,}$$

während man die l der Verbesserungsgleichungen, wie immer, dadurch erhält, daß je von dem Wert, den die „Funktion“, hier das jeweilige L, annimmt mit Einsetzung der Näherungswerte ($x_0\, y_0$), das gemessene L abzieht, d. h. setzt:

$l_1 = L_{0,1} - L_1, \qquad l_2 = L_{0,2} - L_2, \ldots$ wie in (5) geschehen.

5. *Regelmäßige Fehler.* Schon in Hr. I habe ich darauf hingewiesen, daß bei der vorliegenden Aufgabe *ein* systematischer Fehler besonders bemerkenswert ist, ein etwaiger merklicher Unterschied zwischen dem Meter des Koordinatennetzes und dem Meter der Längenmessungen L, sich unmittelbar kundgebend im Verhalten der Vorzeichen der v. Es ist dort auch gezeigt, wie augenfällig ein solcher Fehler bei der *graphischen* Behandlung dieser Aufgabe wird, und wie er zu bestimmen ist. Nicht umständlicher ist die *rechnerische* Behandlung der Frage, ob ein solcher Fehler nachweisbar ist oder wahrscheinlich gemacht werden könne. Die Vorzeichen der v in (14) legen in unserem Beispiel nahe, einem regelmäßigen Fehler der angegebenen Art nachzuspüren; neben den zwei großen v mit dem Vorzeichen + sind nur zwei kleine mit dem andern Vorzeichen da und jene, v_1 und v_3 mit zusammen +13 cm, beziehen sich auf die in N nicht sehr stark gebrochene Strecke von P_1 über N nach P_3. Führen wir eine dritte Unbekannte z ein, indem wir setzen:

$$(20)\quad \left\{\begin{array}{l} L_1\,(1-z) + v_1 = L_{0,1} + a_1\,x + b_1\,y \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ L_4\,(1-z) + v_4 = L_{0,4} + a_4\,x + b_4\,y, \end{array}\right.$$

d. h. die Annahme machen, jedes Meter der Messungen L müsse im Verhältnis $\frac{1-z}{1}$ verändert werden (verkleinert oder vergrößert, je nach dem Vorzeichen von z), so lauten die neuen Verbesserungsgleichungen:

$$(21)\quad \left\{\begin{array}{l} v_1 = a_1\,x + b_1\,y + L_1\,z + (L_{0,1} - L_1) \\ \quad\;\; = a_1\,x + b_1\,y + L_1\,z + l_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

so daß die l dieselben bleiben wie oben bei zwei Unbekannten. Wir haben oben in **2.** und **3.** die rechten Seiten der Ausdrücke für die v in cm genommen, müssen dies also auch für die neuen Glieder $L \cdot z$ tun; um die Koeffizienten $a_1\, b_1\, c$ von x_1, y_1, z von derselben Größenordnung zu bekommen, setzen wir:

(22) $\quad z' = 100\,z, \qquad z = \frac{1}{100} \cdot z'$ oder die Koeffizienten der

dritten Unbekannten in (20) $L' = c' = \frac{1}{100}$ L. Die Tafel der Koeffizienten der Verbesserungsgleichungen und der drei Normalgleichungen wird damit wie folgt:

	a	b	c′	l (cm)	aa	ab	ac′	al	bb	bc′	bl	c′c′	c′l	ll	
	−0,93	−0,37	1,24	+4	0,86	+0,34	−1,15	−3,72	0,14	−0,46	−1,48	1,54	+4,96	16	
3)	−0,97	+0,24	1,15	−3	0,94	−0,23	−1,12	+2,91	0,06	+0,28	−0,72	1,32	−3,45	9	
	+1,00	+0,02	1,29	+9	1,00	+0,02	+1,29	+9,00	0,00	+0,03	+0,18	1,66	+11,61	81	(2
	+0,50	−0,86	1,19	−2	0,25	−0,43	+0,60	−1,00	0,74	−1,02	+1,72	1,42	−2,38	4	
					3,05	−0,30	−0,38	+7,19	0,94	−1,17	−0,30	5,94	+10,74	110	

Die Auflösung der drei Normalgleichungen, mit Anwendung des Rechenschiebers [wie für (22) und (23)], die unter Anschreibung der sämtlichen erforderlichen Zahlen fünf Minuten in Anspruch nimmt, sieht also diesmal so aus [erst durch (24) z′ und g_{z}'; dann durch die vollständige Umstellung in (25) x und g_x, endlich in (26) (26′) links und rechts y und g_y doppelt zur Probe]:

	$\underline{3{,}05}\,x - 0{,}30\,y - 0{,}38\,z' + 7{,}2 = 0$	110	$\underline{5{,}94}\,z' - 1{,}17\,y - 0{,}38\,x + 10{,}7 = 0$	110	
	$0{,}94 \quad -1{,}17 \quad -0{,}3$	−17	$0{,}94 \quad -0{,}30 \quad -0{,}30$	−19	
	−0,03 −0,04 +0,71		*−0,23 −0,08 +2,12*		
	5,94 +10,7		3,05 +7,2		
	−0,05 +0,90		*−0,02 +0,69*		
	$\underline{0{,}91} \quad -1{,}21 \quad +0{,}41$	93	$\underline{0{,}71} \quad -0{,}38 \quad +1{,}82$	91	
	5,89 +11,60	*−0*	3,03 +7,89	*−5*	
(24)	*−1,60 +0,54*		*−0,20 +0,97*		(25)
	$\underline{4{,}29}\,z' + 12{,}14 = 0$	93	$\underline{2{,}83}\,x + 8{,}86 = 0$	86	
	$z' = -\frac{12{,}14}{4{,}29} = -2{,}84$ (cm auf 100 m)	*−34*	$x = -\frac{8{,}86}{2{,}83} = -3{,}2$ cm	*−27₅*	
	oder 0,28 mm Abzug pro Meter der L.	59	$g_x = 2{,}83$	58₅	
	$g_{z'} = 4{,}29$.	=[vv]		=[vv]	

Doppelte Rechnung für y:

	$\underline{5{,}89}\,z' - 1{,}21\,y + 11{,}60 = 0$	93	$\underline{3{,}03}\,x - 0{,}38\,y + 7{,}89 = 0$	91	
	$0{,}91 \quad +0{,}41$	−23	$0{,}71 \quad +0{,}82$	−25₅	
	−0,25 +2,39		*−0,05 +0,99*		
(26)	$\underline{0{,}66}\,y + 2{,}80 = 0$	70	$\underline{0{,}66}\,y + 2{,}81 = 0$	70₅	(26′)
	$y = -\frac{2{,}80}{0{,}66} = -4{,}25$ cm	−12	y und g_y wie links.	−12	
	$g_y = 0{,}66$	58		58₅	
		=[vv]		=[vv]	

(Fortsetzung folgt.)