Zeitschrift: Schweizerische Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Revue technique suisse des mensurations et améliorations foncières

Herausgeber: Schweizerischer Geometerverein = Association suisse des géomètres

Band: 22 (1924)

Heft: 12

Artikel: Herleitung von Fehlerformeln auf Grund einer Figur [Schluss]

Autor: Werkmeister, P.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-188551

SCHWEIZERISCHE
Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik
ORGAN DES SCHWEIZ. GEOMETERVEREINS
REVUE TECHNIQUE SUISSE DES MENSURATIONS ET AMÉLIORATIONS FONCIÈRES
ORGANE DE LA SOCIÉTÉ SUISSE DES GÉOMÈTRES

Redaktion: F. BAESCHLIN, Professor, Zollikon (Zürich)
Ständiger Mitarbeiter für Kulturtechnik: H. FLUCK, Dipl. Kulturingenieur, Neuchâtel, 9, Passage Pierre qui roule. — Collaborateur attitré pour la partie en langue française: CH. ROESGEN, ingénieur-géomètre, Genève, 11, rue de l'Hôtel-de-Ville — Redaktionsschluß: Am 1. jeden Monats.

Expedition, Inseraten- und Abonnements-Annahme:
BUCHDRUCKEREI WINTERTHUR VORM. G. BINKERT, WINTERTHUR

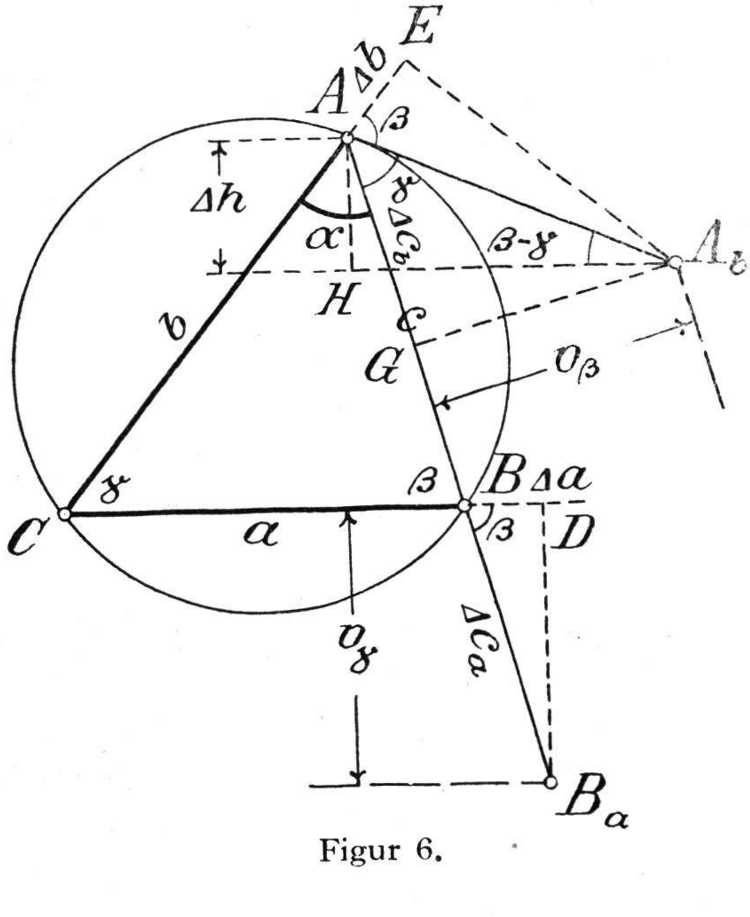
Jährlich 12 Nummern (erscheinend am zweiten Dienstag jeden Monats) und 12 Inseraten-Bulletins (erscheinend am vierten Dienstag jeden Monats)	No. 12 des **XXII. Jahrganges** der „Schweiz. Geometerzeitung". **9. Dezember 1924**	Jahresabonnement Fr. 12.— (unentgeltlich für Mitglieder) Inserate: 50 Cts. per 1spaltige Nonp.-Zeile

Herleitung von Fehlerformeln auf Grund einer Figur.

Von Dr.-Ing. *P. Werkmeister*, Eßlingen a. N.

(Schluß.)

b) Gegeben ein Fehler Δ b von b; gesucht die durch Δ b an c, β, γ und F verursachten Fehler Δc_b, $\Delta \beta_b$, $\Delta \gamma_b$ und ΔF_b.



Figur 6.

Zeichnet man von dem Dreieck A B C (Figur 6) ausgehend ein neues Dreieck A_b B C mit den Seiten a und b + Δ b und dem Winkel α, so erhält man die Ecke A_b als Schnittpunkt des Umkreises vom Dreieck A B C mit dem Kreis um C mit Halbmesser C E = b + Δ b, wobei man an Stelle der beiden Kreise die betreffenden Tangenten treten lassen darf. Beschreibt man noch um B den Kreis durch A_b als Lot von A_b auf A B, so ergibt sich das Fehlerviereck A E A_b G, in dem A G $= \Delta c_b$ und A_b G $= v_\beta = \frac{\Delta \beta_b}{\rho}$ c ist. Damit erhält man — unter Beachtung der Abnahme von c — die Feherformeln

$$\Delta c_b = -\frac{\cos \gamma}{\cos \beta} \Delta b$$

$$\text{und } v_\beta = \frac{\sin \gamma}{\cos \beta} \Delta b, \text{ und damit}$$

$$\Delta \beta_b = \frac{\sin \gamma}{c \cos \beta} \rho \Delta b \text{ oder mit } \frac{\sin \gamma}{c} = \frac{\sin \beta}{b}$$

$$\Delta \beta_b = \frac{\operatorname{tg} \beta}{b} \rho \Delta b.$$

Da α sich nicht verändert hat, und β um $\Delta \beta_b$ größer wurde, so hat γ um $\Delta \beta_b$ abgenommen; es ist somit

$$\Delta \gamma_b = -\frac{\operatorname{tg} \beta}{b} \rho \Delta b.$$

Die beiden Dreiecke A B C und A_b B C haben die Grundlinie a gemeinsam; ihre Höhen unterscheiden sich um Δ h; der Flächenfehler ΔF_b ist daher gleich $\frac{1}{2}$ a Δ h. Auf Grund der beiden rechtwinkligen Dreiecke A E A_b und A A_b H, wobei A_b H parallel B C ist, erhält man für Δ h den Wert

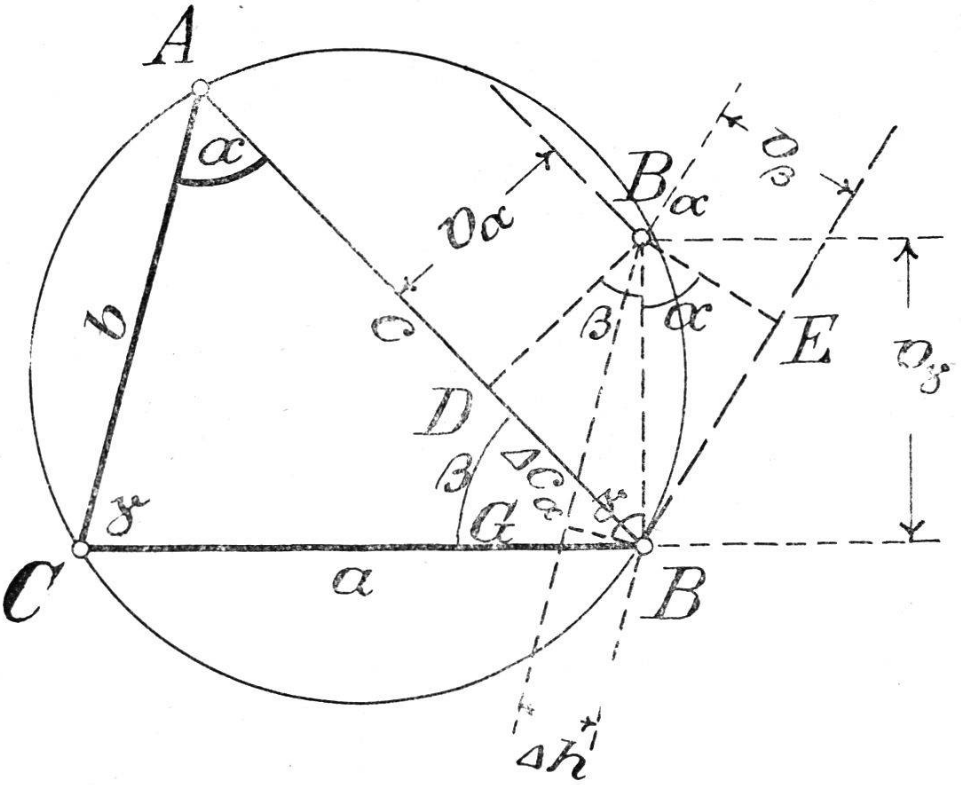
$$\Delta h = \frac{\sin (\beta - \gamma)}{\cos \beta} \Delta b;$$

damit findet man

$$\Delta F_b = \frac{1}{2} a \frac{\sin (\beta - \gamma)}{\cos \beta} \Delta b.$$

c) Gegeben ein Fehler $\Delta \alpha$ von α; gesucht die durch $\Delta \alpha$ an c, β, γ und F verursachten Fehler Δc_α, $\Delta \beta_\alpha$, $\Delta \gamma_\alpha$ und ΔF_α.

Ist A B C das den Stücken a, b und α entsprechende Dreieck (Figur 7), so hat man ein neues Dreieck A B_α C zu zeichnen mit den Stücken a, b und $\alpha + \Delta \alpha$. Die Ecke B_α dieses neuen Dreiecks erhält man als Schnitt der dem Kreis um C durch B entsprechenden Senkrechten zu B C in B mit der Parallelen zu A B im Abstand $v_\alpha = \frac{\Delta\,\alpha}{\rho}\,c$. Beschreibt man um A den Kreis durch B_α, an dessen Stelle man das Lot von B_α auf A B



Figur 7.

setzen darf, so ergibt sich das Fehlerdreieck B_α B D, in dem B D $= \Delta\,c_\alpha$ und B $B_\alpha = v_\gamma = \frac{\Delta\,\gamma\,\alpha}{\rho}\,a$ ist. Damit ergeben sich die Fehlerformeln

$$\Delta\,c_\alpha = v_\alpha\ \mathrm{tg}\ \beta \text{ und } v_\gamma = \frac{\Delta\,\gamma_\alpha}{\rho}\,a = \frac{v_\alpha}{\cos\,\beta}$$

oder mit $v_\alpha = \frac{\Delta\,\alpha}{\rho}\,c$ nach einiger Umformung mit Berücksichtigung der Abnahme von c und von γ

$$\Delta\,c_\alpha = -c\ \mathrm{tg}\ \beta\,\frac{\Delta\,\alpha}{\rho} \text{ und } \Delta\,\gamma_\alpha = -\frac{c}{a\,\cos\,\beta}\,\Delta\,\alpha.$$

Läßt man an Stelle des Umkreises des Dreiecks A B C im Punkt B die Tangente in diesem Punkt treten, so ist der Fehler $\Delta\,\beta_\alpha$ bestimmt durch den Abstand v_β des Punktes B_α von der Tangente; dabei ist $v_\beta = \frac{\Delta\,\beta_\alpha}{\rho}\,\frac{a\,c}{b}$, so daß $\Delta\,\beta_\alpha = v_\beta\,\frac{b}{a\,c}\,\rho$.

Aus den beiden rechtwinkligen Fehlerdreiecken $B_\alpha B D$ und $B B_\alpha E$ liest man dann ab

$$v_\beta = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} v_\alpha;$$

damit und mit $v_\alpha = \frac{\Delta\alpha}{\rho} c$ erhält man

$$\Delta\beta_\alpha = \frac{b\cos\alpha}{a\cos\beta}\Delta\alpha \text{ oder mit } \frac{b}{a} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$$

$$\Delta\beta_\alpha = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}\Delta\alpha.$$

Der Zunahme von α um $\Delta\alpha$ entspricht eine Zunahme von β um $\Delta\beta_\alpha$ und eine Abnahme von γ um $\Delta\gamma_\alpha$; es muß somit $\Delta\gamma_\alpha - \Delta\beta_\alpha = \Delta\alpha$ sein. Auf Grund der gefundenen Werte findet man zur Probe

$$\frac{c}{a\cos\beta}\Delta\alpha - \frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}\Delta\alpha = \left\{\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha\cos\beta} - \frac{\cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta}\right\}\Delta\alpha$$

$$= \frac{\sin(\alpha+\beta) - \cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta}\Delta\alpha = \frac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\cos\beta}\Delta\alpha = \Delta\alpha.$$

Betrachtet man b als gemeinsame Grundlinie der beiden Dreiecke $A B C$ und $A B_\alpha C$, so unterscheiden sich die beiden Höhen um Δh, so daß $\Delta F_\alpha = \frac{1}{2} b \Delta h$. Mit Hilfe der beiden rechtwinkligen Dreiecke $B_\alpha B D$ und $B_\alpha B G$, wobei in dem letzteren $B G$ parallel $A C$ ist, findet man für Δh den Wert

$$\Delta h = \frac{\cos\gamma}{\cos\beta} v_\alpha \text{ oder mit } v_\alpha = \frac{\Delta\alpha}{\rho} c$$

$$\Delta h = c\,\frac{\cos\gamma}{\cos\beta}\,\frac{\Delta\alpha}{\rho}.$$

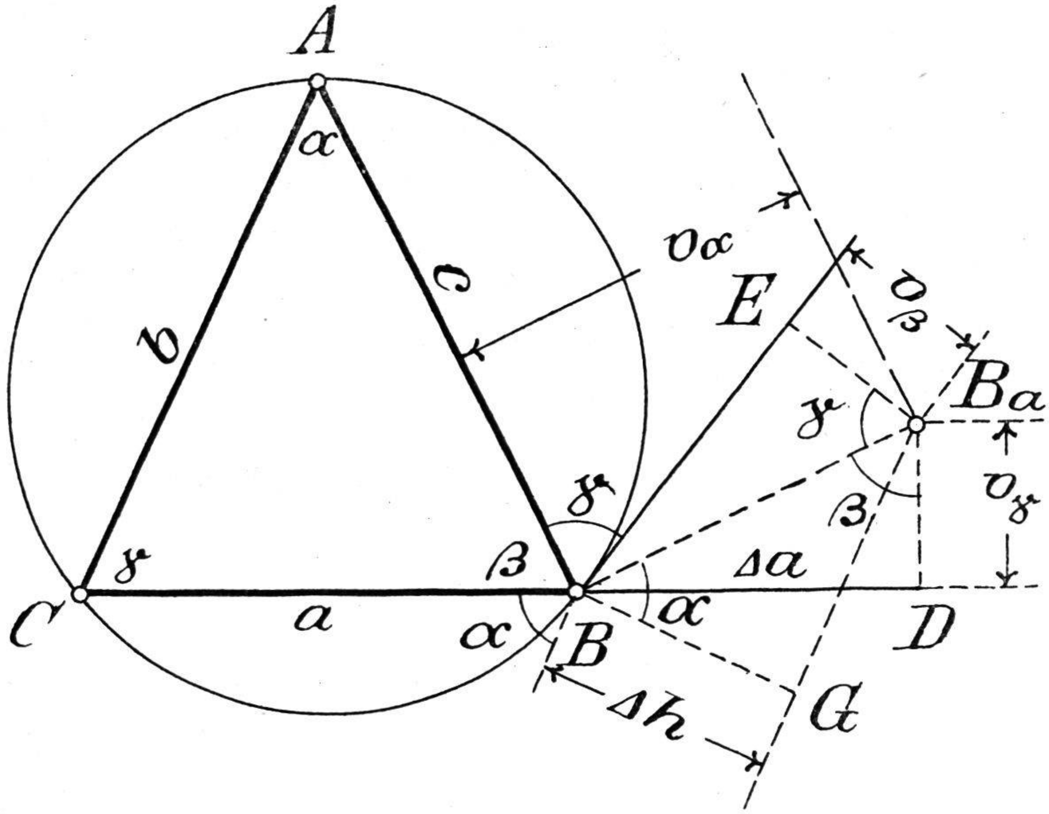
Damit ergibt sich für ΔF_α die Fehlerformel

$$\Delta F_\alpha = \frac{1}{2}\, b\, c\, \frac{\cos\gamma}{\cos\beta}\,\frac{\Delta\alpha}{\rho}.$$

4. *Gegeben die Seiten* a, b *und* c.

a) Gegeben ein Fehler Δa von a; gesucht die ihm entsprechenden Fehler $\Delta\alpha_a$, $\Delta\beta_a$, $\Delta\gamma_a$ und ΔF_a von α, β, γ und F.

Läßt man bei dem Dreieck $A B C$ (Figur 8) nur die Seite a um Δa zunehmen, so erhält man ein neues Dreieck $A B_a C$, dessen Ecke B_a bestimmt ist durch die Tangenten der Kreise um C und A mit den Halbmessern C D $= a + \Delta a$ und c. In



Figur 8.

dem rechtwinkligen Fehlerdreieck B B_a D ist B B_a $= v_\alpha = \frac{\Delta \alpha_a}{\rho}$ c und B_a D $= v_\gamma = \frac{\Delta \gamma_a}{\rho}$ a; da ferner $v_\alpha = \frac{\Delta a}{\sin \beta}$ und $v_\gamma = \frac{\Delta a}{\operatorname{tg} \beta}$, so ergeben sich — mit Beachtung der Abnahme von γ — die Fehlerformeln $\Delta \alpha_a = \frac{\Delta a}{c \sin \beta} \rho$ und $\Delta \gamma_a = - \frac{\Delta a}{a \operatorname{tg} \beta} \rho$.

Läßt man im Punkt B an die Stelle des Umkreises des Dreiecks A B C die Tangente treten, und fällt man von B_a das Lot B_a E auf diese Tangente, so ist B_a E $= v_\beta = \frac{\Delta \beta_a}{\rho} \frac{a\,c}{b}$.

Auf Grund der beiden rechtwinkligen Dreiecke B B_a D und B B_a E erhält man

$$v_\beta = \frac{\cos \gamma}{\sin \beta} \Delta a;$$

damit findet man — unter Berücksichtigung der Abnahme von β — für $\Delta \beta_a$ die Fehlerformel

$$\Delta\,\beta_a = -\frac{b \cos\gamma}{a\,c \sin\beta}\,\rho\,\Delta\,a \text{ oder mit } c \sin\beta = b \sin\gamma$$

$$\Delta\,\beta_a = -\frac{\Delta\,a}{a \operatorname{tg}\gamma}\,\rho.$$

Da einer Zunahme von a um $\Delta\,a$ eine Zunahme von α um $\Delta\,\alpha_a$, eine Abnahme von β um $\Delta\,\beta_a$ und eine Abnahme von γ um $\Delta\,\gamma_a$ entspricht, so muß $\Delta\,\beta_a + \Delta\,\gamma_a = \Delta\,\alpha_a$ sein. Mit den oben gefundenen Werten für $\Delta\,\beta_a$ und $\Delta\,\gamma_a$ erhält man

$$\Delta\,\beta_a + \Delta\,\gamma_a = \left\{\frac{1}{a \operatorname{tg}\gamma} + \frac{1}{a \operatorname{tg}\beta}\right\}\Delta\,a\,\rho = \frac{\Delta\,a}{a}\,\frac{\sin\beta\cos\gamma + \cos\beta\sin\gamma}{\sin\beta\,\sin\gamma}\,\rho$$

$$= \frac{\Delta\,a \sin(\beta+\gamma)}{a \sin\beta\,\sin\gamma}\,\rho = \frac{\Delta\,a}{a}\,\frac{\sin\alpha}{\sin\beta\,\sin\gamma}\,\rho = \frac{\Delta\,a}{b \sin\gamma}\,\rho$$

$$= \frac{\Delta\,a}{c \sin\vartheta}\,\rho = \Delta\,\alpha_a.$$

Um die Formel für den durch $\Delta\,a$ verursachten Flächenfehler $\Delta\,F_a$ zu finden, kann man bei den beiden Dreiecken A B C und A B_a C die Seite A C = b als gemeinsame Grundlinie betrachten; zieht man B_a G parallel zu A C, so ist der Unterschied der beiden zugehörigen Höhen B G $= \Delta\,h$, und man hat $\Delta\,F_a = \frac{1}{2}\,b\,\Delta\,h$. Auf Grund der beiden rechtwinkligen Dreiecke B B_a D und B B_a G findet man für $\Delta\,h$ den Ausdruck $\Delta\,h = \frac{\cos\alpha}{\sin\beta}\,\Delta\,a$; damit wird

$$\Delta\,F_a = \frac{1}{2}\,b\,\frac{\cos\alpha}{\sin\beta}\,\Delta\,a \text{ oder mit } \frac{b}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin\alpha}$$

$$\Delta\,F_a = \frac{1}{2}\,a \operatorname{ctg}\alpha\,\Delta\,a.$$

b) Gegeben ein Fehler $\Delta\,b$ von b; gesucht die ihm entsprechenden Fehler $\Delta\,\alpha_b$, $\Delta\,\beta_b$, $\Delta\,\gamma_b$ und $\Delta\,F_b$ von α, β, γ und F.

Aus dem Vorhergehenden ergibt sich unmittelbar

$$\Delta\,\alpha_b = -\frac{\Delta\,b}{b \operatorname{tg}\gamma}\,\rho \qquad \Delta\,\beta_b = \frac{\Delta\,b}{a \sin\gamma}\,\rho \qquad \Delta\,\gamma_b = -\frac{\Delta\,b}{b \operatorname{tg}\alpha}\,\rho$$

$$\text{und } \Delta\,F_b = \frac{1}{2}\,b \operatorname{ctg}\beta\,\Delta\,h.$$

c) Gegeben ein Fehler Δc von c; gesucht die ihm entsprechenden Fehler $\Delta \alpha_c$, $\Delta \beta_c$, $\Delta \gamma_c$ und ΔF_c von α, β, γ und F. Man erhält

$$\Delta \alpha_c = -\frac{\Delta c}{c \operatorname{tg} \beta} \rho \qquad \Delta \beta_c = -\frac{\Delta c}{c \operatorname{tg} \alpha} \rho \qquad \Delta \gamma_c = \frac{\Delta c}{b \sin \alpha} \rho$$

$$\text{und } \Delta F_c = \frac{1}{2} c \operatorname{ctg} \gamma \, \Delta c.$$

Schreibt man die drei für die Flächenfehler gefundenen Formeln so

$$\Delta F_a = \frac{1}{2} \frac{a}{\sin \alpha} \cos \alpha \, \Delta a \qquad \Delta F_b = \frac{1}{2} \frac{b}{\sin \beta} \cos \beta \, \Delta b$$

$$\Delta F_c = \frac{1}{2} \frac{c}{\sin \gamma} \cos \gamma \, \Delta c$$

und beachtet man, daß $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$, wo R der Halbmesser des Umkreises ist, so erhält man die Flächenfehlerformeln

$$\Delta F_a = R \cos \alpha \, \Delta a \quad \Delta F_b = R \cos \beta \, \Delta b \quad \Delta F_c = R \cos \gamma \, \Delta c.$$

B. *Fehlerformeln für Aufgaben der Punktbestimmung im Koordinatensystem.*

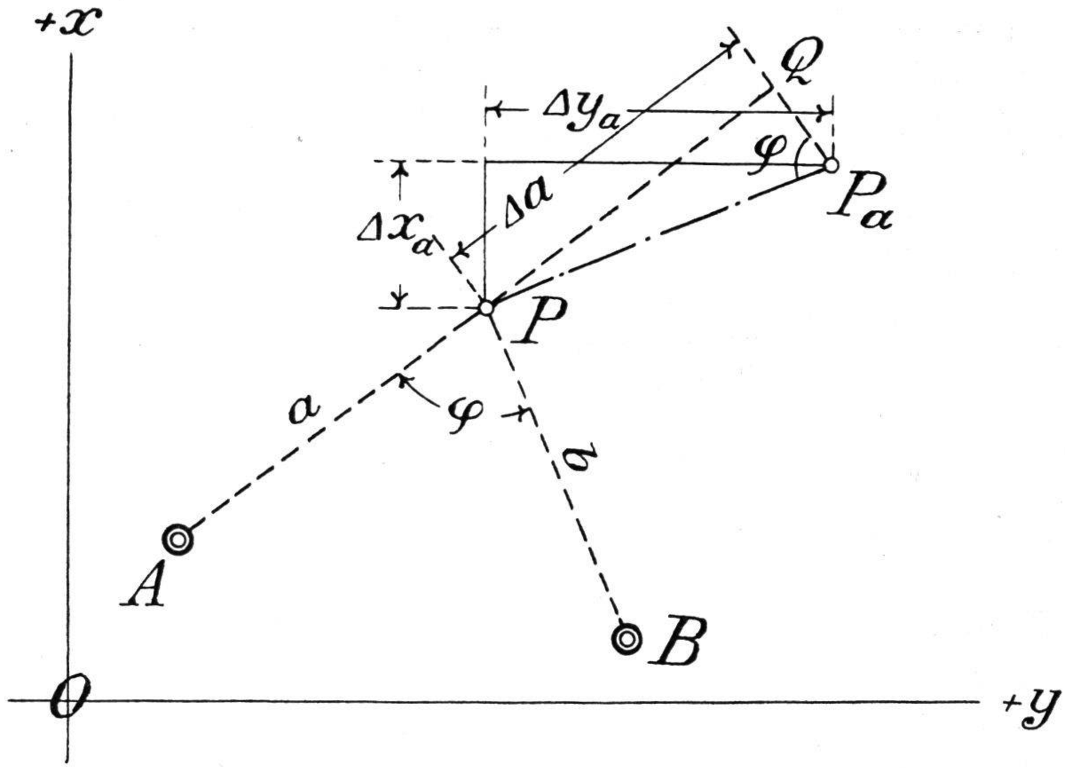
1. Gegeben zwei Festpunkte A und B (Figur 9); zur Festlegung eines Neupunktes P wurden die Strecken $AP = a$ und $BP = b$ gemessen.

a) Gegeben ein Fehler Δa von a; gesucht die ihm entsprechenden Fehler Δx_a und Δy_a der Koordinaten x und y von P.

Die gesuchten Fehler Δx_a und Δy_a sind die Koordinatenunterschiede zwischen dem Punkt P und einem Punkt P_a, der von A die Entfernung $a \pm \Delta a$ und von B die Entfernung b hat; man erhält demnach P_a als Schnittpunkt der beiden Kreise um A und B mit den Halbmessern $a \pm \Delta a$ und b. Beachtet man die in der Einleitung angegebenen Näherungen, so hat man AP um $PQ = \Delta a$ z. B. zu verlängern[7]; man erhält dann P_a als Schnittpunkt der Senkrechten zu AP in Q mit der Senkrechten zu BP in P. Bezeichnet man den Winkel APB mit φ,

[7] Von den Vorzeichen der Fehler wird im folgenden abgesehen.

so ist in dem rechtwinkligen Dreieck P Q P_a die Strecke $\overline{P P_a}$ $= \frac{\Delta a}{\sin \varphi}$. Bedeutet (P P_a) den Richtungswinkel der Strecke P P_a



Figur 9.

und (P B) den von P B, so findet man auf Grund der Figur die Fehlerformeln

$\Delta x_a = \overline{P P_a} \cos (P P_a)$ und $\Delta y = \overline{P P_a} \sin (P P_a)$

oder unter Berücksichtigung des vorhin angegebenen Wertes für $\overline{P P_a}$ und mit $(P P_a) = \pm \{90^0 - (P B)\}$

$$\Delta x_a = \frac{\sin (P B)}{\sin \varphi} \Delta a \quad \text{und} \quad \Delta y_a = \frac{\cos (P B)}{\sin \varphi} \Delta a.$$

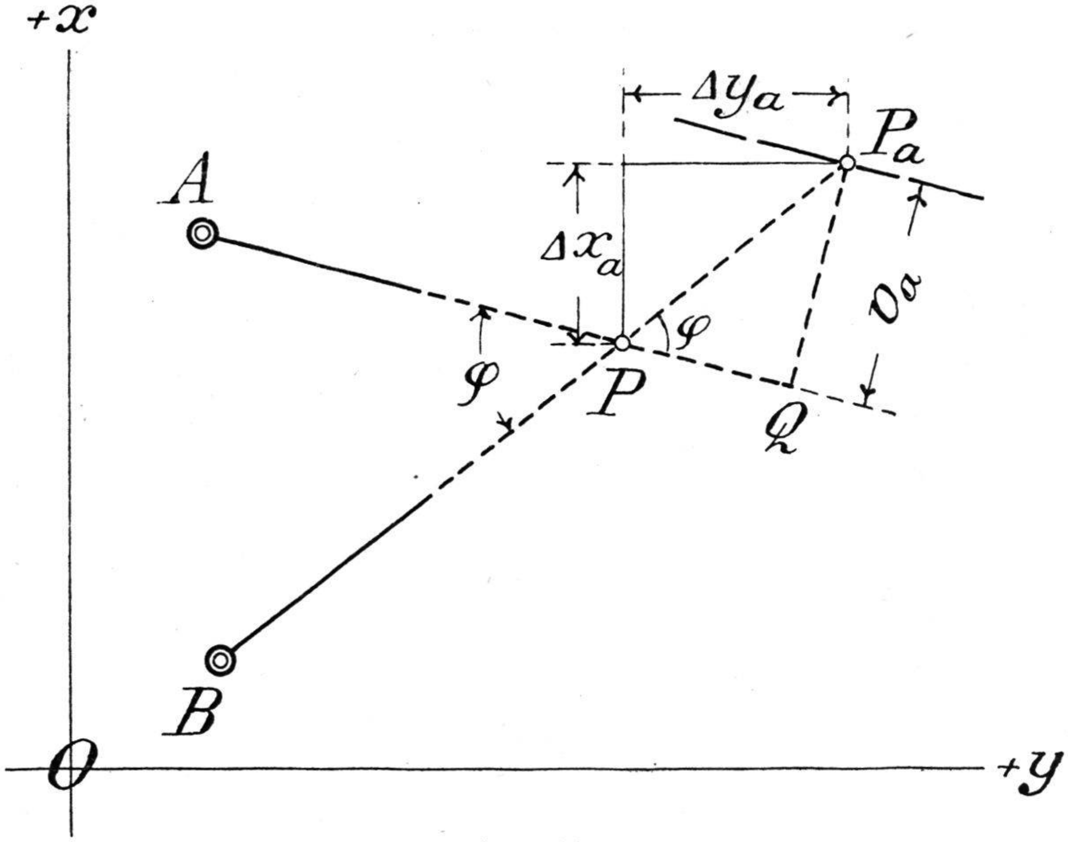
b) Gegeben ein Fehler Δb von b; gesucht die ihm entsprechenden Fehler Δx_b und Δy_b von x und y.

Nach dem Vorstehenden ist

$$\Delta x_b = \frac{\sin (P A)}{\sin \varphi} \Delta b \quad \text{und} \quad \Delta y_b = \frac{\cos (P A)}{\sin \varphi} \Delta b.$$

2. Gegeben zwei Festpunkte A und B (Figur 10); zur Festlegung eines Neupunktes P wurden die Richtungswinkel (A P) und (B P) mittelbar gemessen (Aufgabe des Vorwärtseinschneidens).

a) Gegeben ein Fehler Δ (A P) von (A P); gesucht die ihm entsprechenden Fehler Δx_a und Δy_a der Koordinaten x und y von P.



Figur 10.

Bestimmt man einen neuen Punkt P_a derart, daß (A P_a) = (A P) $\pm$ Δ (A P) und (B P_b) = (B P), so hat man die Gerade A P um den kleinen Winkel Δ (A P) zu drehen oder sie in der Nähe von P parallel zu verschieben um $v_a = \frac{\Delta\,(A\,P)}{\rho}\overline{A\,P}$; die so sich ergebende Parallele schneidet dann B P in P_a. Bezeichnet man den Winkel A P B mit φ, so findet man mit Hilfe des rechtwinkligen Dreiecks P P_a Q für $\overline{P\,P_a}$ den Wert

$$\overline{P\,P_a} = \frac{v_a}{\sin\varphi} \text{ oder } \overline{P\,P_a} = \frac{\overline{A\,P}}{\sin\varphi}\,\frac{\Delta\,(A\,P)}{\rho}.$$

Damit ergibt die Figur

$$\Delta x_a = \overline{P\,P_a}\cos\,(B\,P) \text{ und } \Delta y_a = \overline{P\,P_a}\sin\,(B\,P)$$

$$\text{oder } \Delta x_a = \frac{\overline{A\,P}\cos\,(B\,P)}{\sin\varphi}\,\frac{\Delta(A\,P)}{\rho} \text{ und}$$

$$\Delta y_a = \frac{\overline{A\,P}\sin\,(B\,P)}{\sin\varphi}\,\frac{\Delta\,(A\,P)}{\rho}.$$

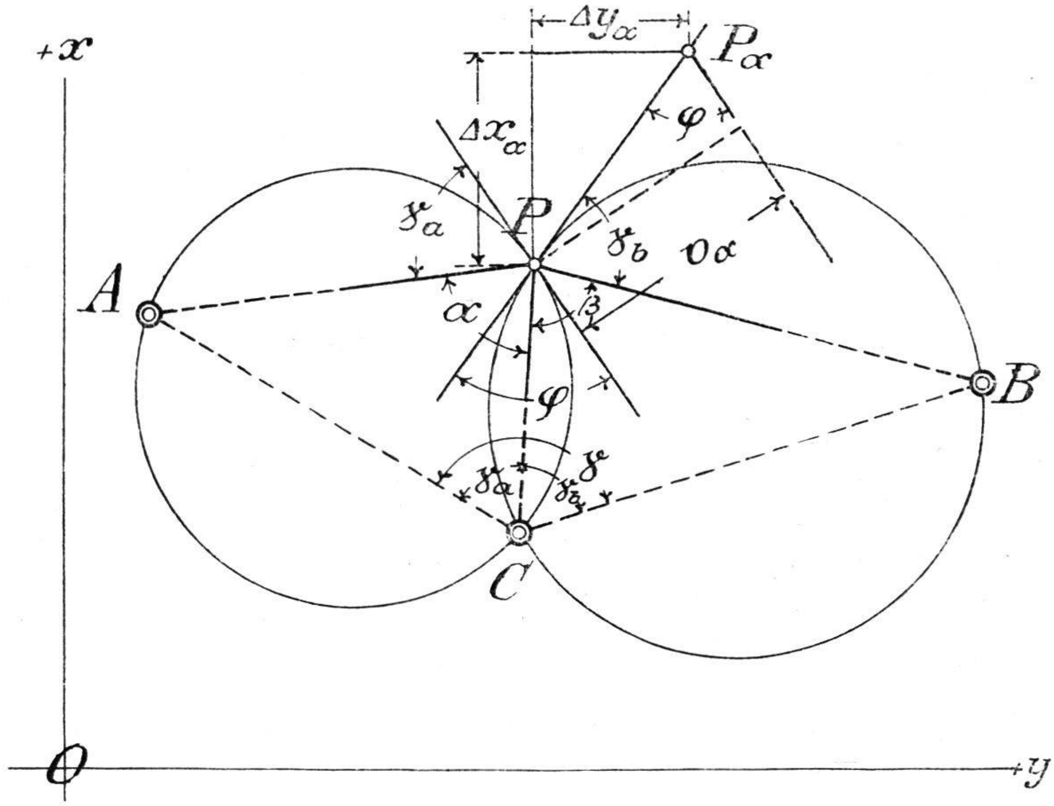
b) Gegeben ein Fehler Δ (B P) von (B P); gesucht die ihm entsprechenden Fehler $\Delta\, x_b$ und $\Delta\, y_b$ von x und y.

Aus dem Vorhergehenden folgt

$$\Delta\, x_b = \frac{\overline{B\,P} \cos (A\,P)}{\sin \varphi} \frac{\Delta\,(B\,P)}{\rho} \text{ und}$$

$$\Delta\, y_b = \frac{\overline{B\,P} \sin (A\,P)}{\sin \varphi} \frac{\Delta\,(B\,P)}{\rho}.$$

3. Gegeben die drei Festpunkte A, B und C (Figur 11); zur Festlegung eines Neupunktes P wurden die beiden Winkel A P C $= \alpha$ und B P C $= \beta$ gemessen (Aufgabe des Rückwärtseinschneidens).



Figur 11.

a) Gegeben ein Fehler $\Delta\,\alpha$ von α; gesucht die ihm entsprechenden Fehler $\Delta\, x_\alpha$ und $\Delta\, y_\alpha$ der Koordinaten x und y von P.

Der Punkt P ist geometrisch bestimmt als Schnittpunkt der beiden Kreise über A C und B C mit α und β als Peripheriewinkel; einen den Winkeln $\alpha \pm \Delta\,\alpha$ und β entsprechenden Punkt P_α erhält man als Schnitt der Tangente in P an den β-Kreis mit der um $v_\alpha = \frac{\Delta\,\alpha}{\rho} \frac{\overline{P\,A} \times \overline{P\,C}}{\overline{A\,C}}$ parallel verschobenen

Tangente in P an den α-Kreis. Bezeichnet man den Winkel zwischen den beiden Tangenten in P mit φ, so ist $\overline{PP_\alpha} = \dfrac{v_\alpha}{\sin\varphi}$ oder $\overline{PP_\alpha} = \dfrac{\Delta\alpha}{\rho}\,\dfrac{\overline{PA}\times\overline{PC}}{\overline{AC}\sin\varphi}$; dabei ist — wenn der Winkel A C B mit γ bezeichnet wird — $\varphi = 360^0 - (\alpha + \beta + \gamma)$, so daß man schreiben kann

$$\overline{PP_\alpha} = \frac{\Delta\alpha}{\rho}\,\frac{\overline{PA}\times\overline{PC}}{\overline{AC}\sin(\alpha+\beta+\gamma)}.$$

Beachtet man, daß $(PP_\alpha) = (PB) - \gamma_b$, wenn γ_b der Winkel B C P ist, so findet man an Hand der Figur die Fehlerformeln[8]

$$\Delta x_\alpha = \overline{PP_\alpha}\cos\{(PB) - \gamma_b\} \text{ und } \Delta y_\alpha = \overline{PP_\alpha}\sin\{(PB) - \gamma_b\}$$

oder $$\Delta x_\alpha = \frac{\Delta\alpha}{\rho}\,\frac{\overline{PA}\times\overline{PC}}{\overline{AC}\sin(\alpha+\beta+\gamma)}\cos\{(PB) - \gamma_b\} \text{ und}$$

$$\Delta y_\alpha = \frac{\Delta\alpha}{\rho}\,\frac{\overline{PA}\times\overline{PC}}{\overline{AC}\sin(\alpha+\beta+\gamma)}\sin\{(PB) - \gamma_b\}.$$

b) Gegeben ein Fehler $\Delta\beta$ von β; gesucht die ihm entsprechenden Fehler Δx_β und Δy_β von x und y.

Aus dem Vorstehenden ergibt sich

$$\Delta x_\beta = \frac{\Delta\beta}{\rho}\,\frac{\overline{PB}\times\overline{PC}}{\overline{BC}\sin(\alpha+\beta+\gamma)}\cos\{(PA) + \gamma_a\} \text{ und}$$

$$\Delta y_\beta = \frac{\Delta\beta}{\rho}\,\frac{\overline{PB}\times\overline{PC}}{\overline{BC}\sin(\alpha+\beta+\gamma)}\sin\{(PA) + \gamma_a\}.$$

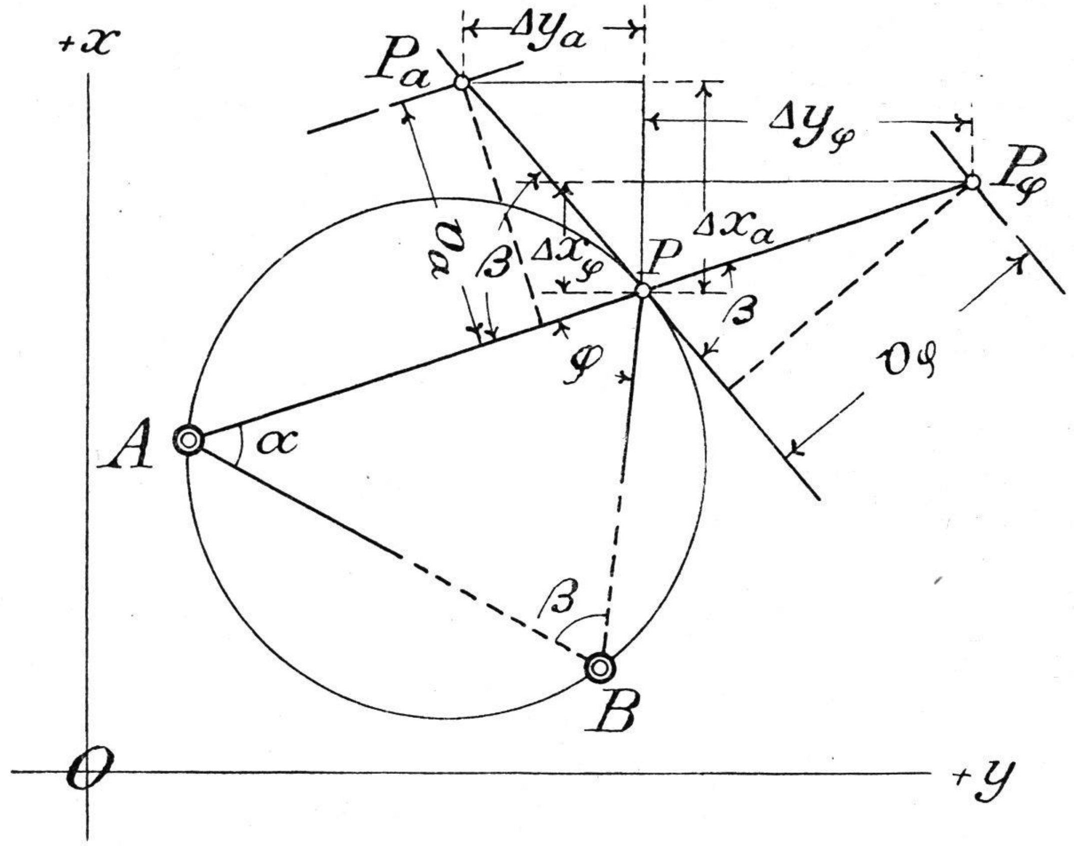
4. Gegeben die zwei Festpunkte A und B (Figur 12); zur Festlegung eines Neupunktes P wurde der Winkel A P B $= \varphi$ unmittelbar und der Richtungswinkel (A P) mittelbar gemessen (Aufgabe des Seitwärtseinschneidens).

a) Gegeben ein Fehler $\Delta\varphi$ von φ; gesucht die ihm entsprechenden Fehler Δx_φ und Δy_φ der Koordinaten x und y von P.

---

[8] Die hier angegebenen Fehlerformeln für das Rückwärtseinschneiden gelten nur für die in der Figur 11 angenommene Lage der Festpunkte A, B und C zu dem Neupunkt P.

Bestimmt man einen Punkt P_φ derart, daß $(A P_\varphi) = (A P)$ und $A P_\varphi B = \varphi \pm \Delta \varphi$, so erhält man ihn als Schnitt der Ge-



Figur 12.

raden A P mit der um $v_\varphi = \dfrac{\Delta \varphi}{\rho} \dfrac{\overline{PA} \times \overline{PB}}{\overline{AB}}$ parallel verschobenen Tangente in P an den Umkreis des Dreiecks P A B; dabei ist $\overline{PP_\varphi} = \dfrac{v}{\sin \beta}$ oder $\overline{PP_\alpha} = \dfrac{\Delta \varphi}{\rho} \dfrac{\overline{PA} \times \overline{PB}}{\overline{AB} \sin \beta}$, wenn β den Winkel P B A vorstellt. Die gesuchten Fehler Δx_φ und Δy_φ sind dargestellt durch die Koordinatenunterschiede von P und P_φ; man erhält daher für die Fehlerformeln

$\Delta x_\varphi = \overline{PP_\varphi} \cos (A P)$ und $\Delta y_\varphi = \overline{PP_\varphi} \sin (A P)$ oder

$$\Delta x_\varphi = \frac{\Delta \varphi}{\rho} \frac{\overline{PA} \times \overline{PB}}{\overline{AB} \sin \beta} \cos (A P) \quad \text{und}$$

$$\Delta y_\varphi = \frac{\Delta \varphi}{\rho} \frac{\overline{PA} \times \overline{PB}}{\overline{AB} \sin \beta} \sin (A P).$$

b) Gegeben ein Fehler $\Delta (A P)$ von $(A P)$; gesucht die ihm entsprechenden Fehler Δx_a und Δy_a von x und y.

Die gesuchten Fehler Δx_a und Δy_a sind gleich den Koordinatenunterschieden des Punktes P und eines Punktes P_a; dieser Punkt P_a ist der Schnittpunkt der Tangente in P an den Umkreis des Dreiecks P A B mit der um $v_a = \frac{\Delta(A P)}{\rho} \overline{A P}$ parallel verschobenen Geraden A P. Für Δx_a und Δy_a liest man aus der Figur ab

$$\Delta x_a = \overline{P P_a} \cos (P P_a) \text{ und } \Delta y_a = \overline{P P_a} \sin (P P_a).$$

Beachtet man, daß $\overline{P P_a} = \frac{v_a}{\sin \beta} = \frac{\Delta (A P)}{\rho} \frac{\overline{A P}}{\sin \beta}$ und $(P P_a) = (P A) + \beta$, so erhält man [9]

[9] Die Formeln gelten nur für die in der Figur 12 gewählte Lage der beiden Festpunkte A und B zum Neupunkt P.

$$\Delta x_a = \frac{\Delta (A P)}{\rho} \frac{\overline{A P}}{\sin \beta} \cos \{(P A) + \beta\} \text{ und}$$

$$\Delta y_a = \frac{\Delta (A P)}{\rho} \frac{\overline{A P}}{\sin \beta} \sin \{(P A) + \beta\}.$$

In den im vorstehenden für einige Aufgaben der Punktbestimmung hergeleiteten Fehlerformeln kommen außer unmittelbar gegebenen Größen auch nicht gegebene Größen vor; da man die Werte dieser Größen für die Berechnung der gesuchten Fehler nicht sehr genau braucht, so genügt es, wenn man sie in einer maßstäblich gezeichneten Figur abmißt. Die zahlenmäßige Berechnung der mittleren Fehler auf Grund einer der gefundenen Fehlerformeln kann man genügend genau mit dem Rechenschieber ausführen.

La triangulation du globe par la TSF.

La détermination d'un point à la surface du globe comporte trois opérations: détermination astronomique de la latitude; détermination astronomique de l'heure locale; comparaison de celle-ci avec l'heure locale d'un point connu ou choisi pour origine. Cette méthode est en quelque sorte absolue, puisqu'elle ne nécessite d'autre définition que celle d'une origine. Elle sera donc la base sur laquelle sera établi le canevas qui déterminera de proche en proche tous les points caractéristiques.