

Zeitschrift: Schweizerische Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik =
Revue technique suisse des mensurations et améliorations foncières

Herausgeber: Schweizerischer Geometerverein = Association suisse des géomètres

Band: 30 (1932)

Heft: 4

Artikel: Ueber die Berechnung der Fehlerellipse und der mittleren
Koordinatenfehler ohne Kenntnis der Gewichtskoeffizienten Q11, Q22,
Q12

Autor: Leemann, W.

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-193368>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 14.03.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Ueber die Berechnung der Fehlerellipse und der mittleren Koordinatenfehler ohne Kenntnis der Gewichtskoeffizienten Q_{11} , Q_{22} , Q_{12} .

Zum Andenken an Prof. Dr. h. c. J. J. Rebstein.

(gest. am 14. März 1907).

Von W. Leemann, Kantonsgeometer, Zürich.

Im Nachfolgenden soll gezeigt werden, wie die Achsenrichtungen und -Längen der Fehlerellipse und die mittleren Koordinatenfehler bei der Einzelpunktbestimmung nach der vermittelnden Ausgleichungsmethode ohne Kenntnis der Gewichtskoeffizienten Q_{11} , Q_{22} und Q_{12} berechnet werden können.

1. Bestimmung der Achsenrichtungen und -Längen der Fehlerellipse.

Faßt man einen Punkt P ins Auge, der gegenüber dem ausgeglichenen Punkt P_0 kleine Koordinatenunterschiede x und y , von der Größenordnung der Koordinatenverbesserungen, hat, so entsprechen bekanntlich den Koordinatenunterschieden die Richtungsunterschiede

$$u_1 = a_1 x + b_1 y$$

$$u_2 = a_2 x + b_2 y$$

$$u_3 = a_3 x + b_3 y$$

.....

wo a und b die sogenannten Richtungskoeffizienten sind und die Anzahl der u gleich der Anzahl der Festpunkte ist.

Bildet man die Quadratsumme aller u , so erhält man

$$1) \quad [u u] = [a a] x^2 + [b b] y^2 + 2 [a b] x y.$$

Diese Gleichung stellt den geometrischen Ort aller Punkte dar, welche die gleiche Quadratsumme $[u u]$ ergeben. Es ist das eine der unendlich vielen konzentrischen Fehlerellipsen, die um den ausgeglichenen Punkt P_0 als Zentrum gedacht werden können und von denen jede einer anderen Summe $[u u]$ entspricht.

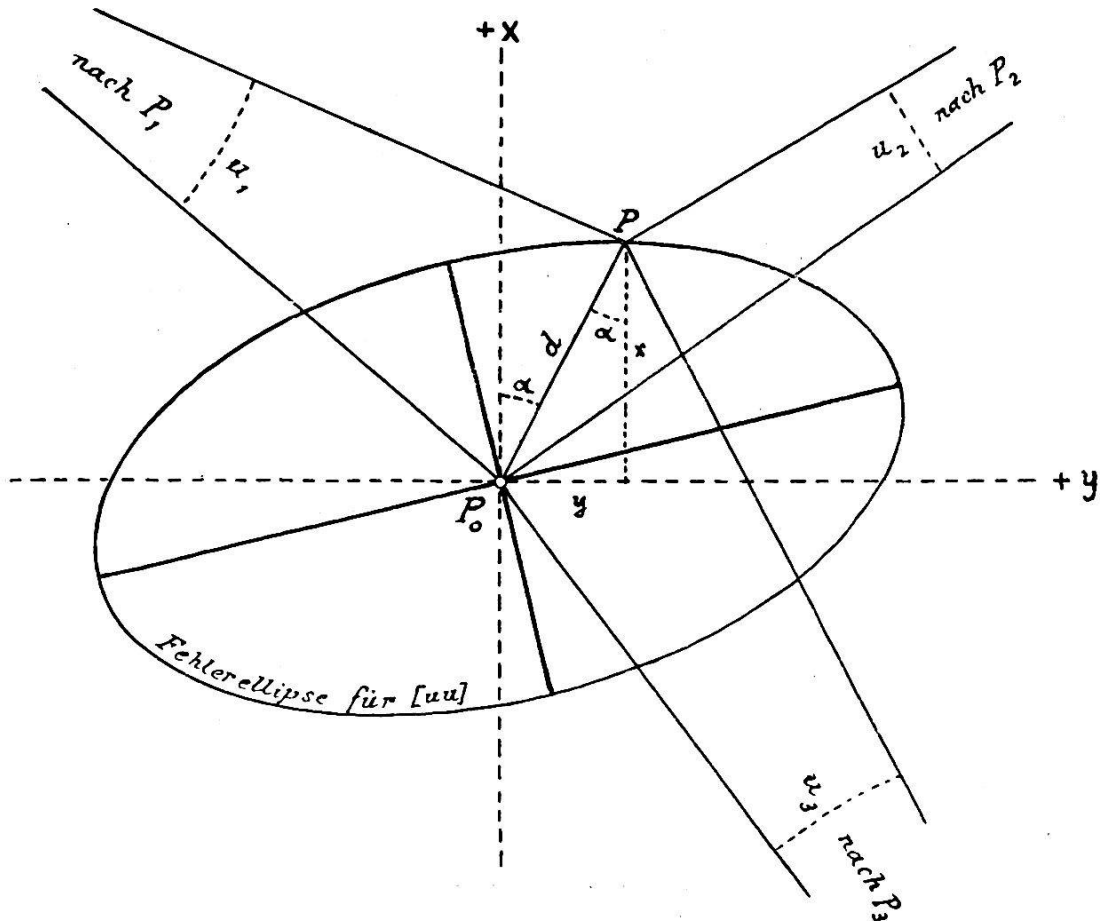
Als *mittlere Fehlerellipse* ist nun diejenige Ellipse zu bezeichnen, bei welcher die Quadratsumme $[u u]$ gleich ist dem Quadrat des mittleren Richtungsfehlers m , d. h. bei welcher

$$\underline{[u u] = m^2.}$$

Zur Bestimmung der **Richtungen der Hauptachsen** der mittleren Fehlerellipse ersetzen wir nun in Gleichung 1) $[u u]$ durch m^2 und die Größen x und y durch die Ausdrücke $d \cos \alpha$ und $d \sin \alpha$. (Siehe Figur.) Hier bedeutet d die Länge des vom Zentrum P_0 nach dem Ellipsenpunkt P gezogenen Strahls und α den Winkel, den dieser Strahl mit der Nordrichtung (Parallele zur positiven x -Achse) einschließt. Die Gleichung der mittleren Fehlerellipse lautet dann:

$$2) \quad \underline{m^2 = [a a] d^2 \cos^2 \alpha + [b b] d^2 \sin^2 \alpha + 2 [a b] d^2 \sin \alpha \cos \alpha.}$$

Die Länge des Strahls d wird für einen bestimmten Wert des Winkels α ein Maximum oder Minimum und d stellt dann die große,



bzw. kleine Halbachse der Fehlerellipse dar. Um diesen Wert von a zu erhalten, bilden wir den Differenzialquotienten $\frac{\partial d}{\partial a}$ und setzen ihn gleich Null.

Aus 2) ist zunächst

$$3) \quad d^2 = \frac{m^2}{[a a] \cos^2 a + [b b] \sin^2 a + 2 [a b] \sin a \cos a}.$$

Statt $\frac{\partial d}{\partial a}$ können wir auch $\frac{\partial d^2}{\partial a}$ bilden, denn wenn d^2 ein Maximum oder Minimum ist, so ist es auch d . Es ist

$$\frac{\partial d^2}{\partial a} = m^2 \frac{-2 [a a] \sin a \cos a + 2 [b b] \sin a \cos a + 2 [a b] \cos 2 a}{([a a] \cos^2 a + [b b] \sin^2 a + 2 [a b] \sin a \cos a)^2}.$$

Dieser Ausdruck ist Null, wenn der Zähler Null ist. Wir setzen daher:

$$-2 [a a] \sin a \cos a + 2 [b b] \sin a \cos a + 2 [a b] \cos 2 a = 0$$

$$\text{oder } -[a a] \sin 2 a + [b b] \sin 2 a = -2 [a b] \cos 2 a,$$

woraus man erhält

$$4) \quad \cotg 2 a = \frac{[a a] - [b b]}{2 [a b]}.$$

Mit Hilfe dieser Formel läßt sich a bestimmen. Da die Hauptachsen senkrecht aufeinanderstehen, ist der Richtungswinkel der einen Achse a , derjenige der anderen $a + 90^\circ$. In welcher Richtung die große Achse und in welcher die kleine liegt, wird weiter unten erörtert.

Die Ableitung der Formeln für die **Achsenlängen** geschieht in folgender Weise:

Aus Formel 4) ist $[a a] = [b b] + 2 [a b] \cotg 2 a$.

Setzt man diesen Ausdruck für $[a a]$ in die Formel 3) ein, so erhält man:

$$d^2 = \frac{m^2}{2 [a b] \cotg 2 a \cos^2 a + [b b] \cos^2 a + [b b] \sin^2 a + 2 [a b] \sin a \cos a}$$

oder
$$d^2 = \frac{m^2}{[a b] (2 \cotg 2 a \cos^2 a + 2 \sin a \cos a) + [b b]} .$$

Nach Goniometrie ist

$$\cotg 2 a = \frac{\cotg^2 a - 1}{2 \cotg a} .$$

Dies eingesetzt gibt nach einigen einfachen Entwicklungen

$$d^2 = \frac{m^2}{[a b] (\cotg^2 a + 1) \sin a \cos a + [b b]} .$$

Es ist aber

$$\cotg^2 a + 1 = \frac{1}{\sin^2 a}$$

so daß wird 5)

$$d^2 = \frac{m^2}{[b b] + [a b] \cotg a} .$$

Auf ähnliche Weise erhält man auch

6)

$$d^2 = \frac{m^2}{[a a] + [a b] \tg a} .$$

Durch Einsetzen des aus 4) berechneten Winkels a erhält man aus den beiden Formeln 5) und 6) übereinstimmend die eine Achsenlänge, durch Einsetzen des Winkels $a + 90^\circ$ die andere. Die Rechnung ergibt dann ohne weiteres, in welcher der beiden Richtungen die große und in welcher die kleine Hauptachse liegt.

2. Bestimmung der mittleren Koordinatenfehler.

Der *mittlere Abszissenfehler* M_x ist zu definieren als die größte positive oder negative Abszisse der mittleren Fehlerellipse. Analog stellt der *mittlere Ordinatenfehler* M_y die größte positive oder negative Ordinate dieser Ellipse dar.

Um zu diesen Maxima zu gelangen, bringen wir zunächst die Gleichung 2), nachdem wir darin für $d \cos a$ und $d \sin a$ die entsprechenden Größen x und y eingesetzt haben, auf Null. Das gibt

$$7) \quad [a a] x^2 + [b b] y^2 + 2 [a b] x y - m^2 = 0 .$$

Nun bilden wir den Differenzialquotienten $\frac{\partial x}{\partial y}$ und setzen ihn gleich Null. Im Hinblick auf die unentwickelte Form der Funktion wird der Differenzialquotient

$$\frac{\partial x}{\partial y} = - \frac{2 [b b] y + 2 [a b] x}{2 [a a] x + 2 [a b] y} .$$

Dieser Bruch ist gleich Null, wenn der Zähler gleich Null ist, d. h. wenn

$$2 [b b] y + 2 [a b] x = 0 .$$

Hieraus wird

$$y = - \frac{[a b] x}{[b b]}.$$

Setzt man diesen Wert für y in die Gleichung 7) ein, so erhält man

$$[a a] x^2 + \frac{[a b]^2}{[b b]} x^2 - \frac{2 [a b]^2}{[b b]} x^2 - m^2 = 0$$

oder

$$\left([a a] - \frac{[a b]^2}{[b b]} \right) x^2 = m^2$$

woraus folgt 8)

$$x = \frac{m}{\sqrt{[a a] - \frac{[a b]^2}{[b b]}}} = M_x.$$

Analog erhält man 9)

$$y = \frac{m}{\sqrt{[b b] - \frac{[a b]^2}{[a a]}}} = M_y.$$

3. Nachweis der Uebereinstimmung der entwickelten Ausdrücke für die Achsenrichtungen, Achsenlängen und mittleren Koordinatenfehler mit den entsprechenden, die Gewichtskoeffizienten Q_{11} , Q_{22} , Q_{12} enthaltenden Ausdrücken.

Unter Benützung der von Helmert in der 2. Auflage von „Die Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate“ entwickelten Formeln ergibt sich folgende Gegenüberstellung:

Vorstehende Formeln:	Formeln von Helmert:
Achsenrichtung 4) $\cotg 2 \alpha = \frac{[a a] - [b b]}{2 [a b]}$	$\left. \begin{array}{l} \cotg 2 \alpha = \frac{Q_{11} - Q_{22}}{2 Q_{12}} \\ d = m \sqrt{Q_{22} + Q_{12} \cotg \alpha} \end{array} \right\} \begin{array}{l} (10) \\ \text{S. 307} \end{array}$
Achsenlänge 5) $d^2 = \frac{m^2}{[b b] + [a b] \cotg \alpha}$	
Mittlerer Abszissenfehler 8) $M_x = \frac{m}{\sqrt{[a a] - \frac{[a b]^2}{[b b]}}}$	$\left. \begin{array}{l} M_x = m \sqrt{Q_{11}} \\ M_y = m \sqrt{Q_{22}} \end{array} \right\} (26) \text{ S. 107}$
Mittlerer Ordinatenfehler 9) $M_y = \frac{m}{\sqrt{[b b] - \frac{[a b]^2}{[a a]}}}$	

Nach Helmert ist

$$\left. \begin{array}{l} Q_{11} = \frac{[b b]}{[a a] [b b] - [a b]^2} \\ Q_{22} = \frac{[a a]}{[a a] [b b] - [a b]^2} \\ Q_{12} = \frac{-[a b]}{[a a] [b b] - [a b]^2} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Vergl. (13) S. 295 und} \\ (17) \text{ S. 309.} \end{array}$$

Durch Einsetzung dieser Ausdrücke in die Helmert'schen Formeln für die *Achsenrichtung* und die *mittleren Koordinatenfehler* gehen sie ohne weiteres in die von uns hergeleiteten Formeln über. Nicht so einfach ist die Uebereinstimmung der beiden Formeln für die *Achsen-*

länge nachzuweisen. Setzt man in die Helmert'sche Formel die obigen Ausdrücke für Q_{22} und Q_{12} ein, so wird

$$d = m \sqrt{\frac{[a a]}{[a a] [b b] - [a b]^2} - \frac{[a b]}{[a a] [b b] - [a b]^2} \cotg \alpha}$$

oder

$$d^2 = \frac{m^2}{\frac{[a a] [b b] - [a b]^2}{[a a] - [a b] \cotg \alpha}}$$

Vergleicht man diese Formel mit unserer Formel 5), so sieht man, daß die beiden Formeln übereinstimmen, wenn

$$[b b] + [a b] \cotg \alpha = \frac{[a a] [b b] - [a b]^2}{[a a] - [a b] \cotg \alpha}$$

Die Seite rechts enthält $[a a]$, welches Glied links fehlt. Wir führen daher rechts den aus unserer Gleichung 4) sich ergebenden Ausdruck für $[a a]$ ein. Es ist

$$[a a] = [b b] + 2 [a b] \cotg 2 \alpha.$$

Hier drücken wir $2 \cotg 2 \alpha$ aus durch den gemäß Goniometrie gleichwertigen Ausdruck $\cotg \alpha - \frac{1}{\cotg \alpha}$. (Vergleiche Trigonometrie von Hammer, 4. Auflage, Seite 154, Formel (34).)

Darnach ist

$$[a a] = [b b] + [a b] \cotg \alpha - \frac{[a b]}{\cotg \alpha}$$

Es soll daher sein

$$[b b] + [a b] \cotg \alpha = \frac{[b b]^2 + [b b] [a b] \cotg \alpha - \frac{[b b] [a b]}{\cotg \alpha} - [a b]^2}{[b b] + [a b] \cotg \alpha - \frac{[a b]}{\cotg \alpha} - [a b] \cotg \alpha}$$

Multipliziert man schließlich beide Seiten der Gleichung, nachdem der Nenner gekürzt ist, mit $[b b] - \frac{[a b]}{\cotg \alpha}$, so wird

$$[b b]^2 + [b b] [a b] \cotg \alpha - \frac{[b b] [a b]}{\cotg \alpha} - [a b]^2 = [b b]^2 + [b b] [a b] \cotg \alpha - \frac{[b b] [a b]}{\cotg \alpha} - [a b]^2.$$

Das heißt, die beiden Seiten der Gleichung stimmen miteinander überein, was zu zeigen war.

Zur Frage der Felsdarstellung.

Von Ing. W. Blumer, Bern.

Anläßlich der Erörterungen über die Art der Felsdarstellung auf der zukünftigen topographischen Karte der Schweiz (Siegfriedkarte) sind die verschiedensten Ansichten geäußert worden. Einerseits wird die bisher übliche Strichzeichnung jeder andern Darstellung als weit-