Zeitschrift: Schweizerische Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Revue technique suisse des mensurations et améliorations foncières

Herausgeber: Schweizerischer Geometerverein = Association suisse des géomètres

Band: 33 (1935)

Heft: 5

Artikel: Untersuchung über das Verhältnis endlicher Flächen bei der winkeltreuen schiefachsigen Zylinderprojektion

Autor: Baeschlin, C.F.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-195309

SCHWEIZERISCHE

Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik

ORGAN DES SCHWEIZ. GEOMETERVEREINS

Offiz. Organ der Schweiz. Gesellschaft für Kulturtechnik / Offiz. Organ der Schweiz. Gesellschaft für Photogrammetrie

Revue technique suisse des mensurations et améliorations foncières

ORGANE DE LA SOCIÉTÉ SUISSE DES GÉOMÈTRES

Organe officiel de l'Association Suisse du Génie rural / Organe officiel de la Société Suisse de Photogrammétrie

Redaktion: Dr. h. c. C. F. BAESCHLIN, Professor, Zollikon (Zürich)

Ständ. Mitarbeiter f. Kulturtechnik: Dr. H. FLUCK, Dipl. Kulturing., Villa Lepontia, Bellinzona-Ravecchia

Redaktionsschluß: Am 1. jeden Monats

Expedition, Inseraten- und Abonnements-Annahme:

BUCHDRUCKEREI WINTERTHUR VORMALS G. BINKERT, A.-G., WINTERTHUR

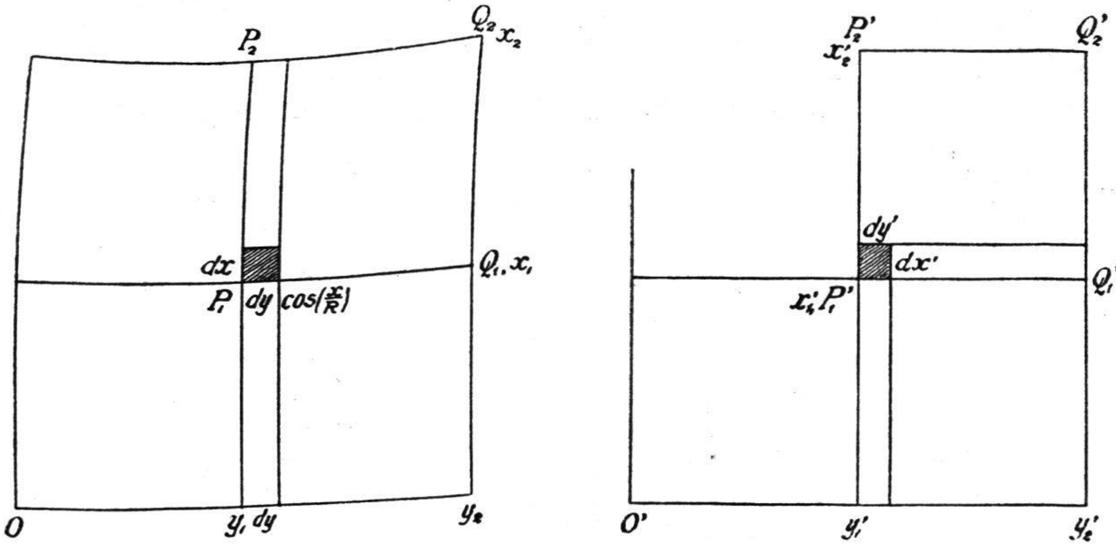
No. 5 • XXXIII. Jahrgang der „Schweizerischen Geometer-Zeitung" Erscheinend am zweiten Dienstag jeden Monats **14. Mai 1935** **Inserate:** 50 Cts. per einspaltige Nonp.-Zeile	**Abonnemente:** Schweiz Fr. 12.—, Ausland Fr. 15.— jährlich Für Mitglieder der Schweiz. Gesellschaften für Kulturtechnik u. Photogrammetrie Fr. 9. — jährl. Unentgeltlich für Mitglieder des Schweiz. Geometervereins

Untersuchung über das Verhältnis endlicher Flächen bei der winkeltreuen schiefachsigen Zylinderprojektion.

Von Prof. Dr. *C. F. Baeschlin*, Zollikon.

Im Anschluß an die Untersuchung von Dipl.-Ing. S. Bertschmann über die Flächenverzerrung bei der winkeltreuen schiefachsigen Zylinderprojektion möchte ich zeigen, daß die vom Verfasser jener Studie gemachte Annahme, daß das Flächenverhältnis endlicher Flächen gleich dem Flächenverhältnis für Flächenelemente sei, praktisch weitgehend zutrifft.

Kugel vom Radius *R*. Projektionsebene



Wir bezeichnen die Fläche von $P_1\ P_2\ Q_2\ Q_1$ mit F_K, während wir die Fläche von $P_1'\ P_2'\ Q_2'\ Q_1'$ mit F_E bezeichnen.

Es ist

$$d\,F_K = dx \cdot dy \cos\left(\frac{x}{R}\right) \tag{1}$$

$$d\,F_E = dx'\,dy'$$

Bei der winkeltreuen, schiefachsigen Zylinderprojektion ist

$$dy' = dy;\quad dx' = \frac{dx}{\cos\left(\frac{x}{R}\right)}$$

Damit wird:

$$d\,F_E = \frac{dx \cdot dy}{\cos\left(\frac{x}{R}\right)} \tag{2}$$

Durch Integration erhalten wir:

$$F_K = \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{x_1}^{x_2} \cos\left(\frac{x}{R}\right) dx = (y_2 - y_1)\,R\left[\sin\left(\frac{x_2}{R}\right) - \sin\left(\frac{x_1}{R}\right)\right] \tag{3}$$

Wir entwickeln $\sin\left(\frac{x_2}{R}\right)$ und $\sin\left(\frac{x_1}{R}\right)$ in Reihen und erhalten:

$$\sin\left(\frac{x_2}{R}\right) = \frac{x_2}{R} - \frac{x_2^{\,3}}{6\,R^3}$$

$$\sin\left(\frac{x_1}{R}\right) = \frac{x_1}{R} - \frac{x_1^{\,3}}{6\,R^3}$$

$$\sin\left(\frac{x_2}{R}\right) - \sin\left(\frac{x_1}{R}\right) = \frac{x_2 - x_1}{R} - \frac{x_2^{\,3} - x_1^{\,3}}{6\,R^3} = \frac{x_2 - x_1}{R}\left(1 - \frac{x_2^{\,2} + x_1 x_2 + x_1^{\,2}}{6\,R^2}\right)$$

Somit wird unter Vernachlässigung von Gliedern von der Ordnung $\left(\frac{x}{R}\right)^4$

$$F_K = (x_2 - x_1)\,(y_2 - y_1)\left(1 - \frac{x_2^{\,2} + x_1\,x_2 + x_1^{\,2}}{6\,R^2}\right) \tag{4}$$

$$F_E = \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\cos\left(\frac{x}{R}\right)}$$

Wir entwickeln $\dfrac{1}{\cos\left(\dfrac{x}{R}\right)} = \left[\cos\left(\dfrac{x}{R}\right)\right]^{-1}$ in eine Reihe und erhalten

$$\frac{1}{\cos\left(\dfrac{x}{R}\right)} = 1 + \frac{x^2}{2\,R^2},$$ wobei wir Glieder 4. Ordnung vernachlässigen.

Damit wird

$$\text{(5)}\qquad F_E = (y_2 - y_1)\left\{x_2 - x_1 + \frac{x_2{}^3 - x_1{}^3}{6\,R^2}\right\} =$$

$$= (y_2 - y_1)\,(x_2 - x_1)\left(1 + \frac{x_2{}^2 + x_1\,x_2 + x_1{}^2}{6\,R^2}\right)$$

Wir bilden $F_E : F_K$ und erhalten:

$$\text{(6)}\qquad \frac{F_E}{F_K} = \frac{1 + \dfrac{x_2{}^2 + x_1\,x_2 + x_1{}^2}{6\,R^2}}{1 - \dfrac{x_2{}^2 + x_1\,x_2 + x_1{}^2}{6\,R^2}} = 1 + \frac{x_2{}^2 + x_1\,x_2 + x_1{}^2}{3\,R^2} + \mathrm{Gl}^4$$

Das können wir noch bedeutend einfacher darstellen. Das Flächenverhältnis für einen Punkt mit

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

wird

$$\text{(7)}\qquad f x_m = 1 + \frac{x_m{}^2}{R^2} = 1 + \frac{x_2{}^2 + 2\,x_1\,x_2 + x_1{}^2}{4\,R^2}$$

Wir dividieren (6) durch (7) und erhalten

$$\frac{F_E : F_K}{f x_m} = \left(1 + \frac{x_2{}^2 + x_1\,x_2 + x_1{}^2}{3\,R^2}\right) : \left(1 + \frac{x_2{}^2 + 2\,x_1\,x_2 + x_1{}^2}{4\,R^2}\right)$$

$$= \left(1 + \frac{x_2{}^2 + x_1\,x_2 + x_1{}^2}{3\,R^2}\right)\left(1 - \frac{x_2{}^2 + 2\,x_1\,x_2 + x_1{}^2}{4\,R^2}\right) + \mathrm{Gl}^4$$

$$= 1 + \frac{x_2{}^2 - 2\,x_1\,x_2 + x_1{}^2}{12\,R^2} = 1 + \frac{(x_2 - x_1)^2}{12\,R^2} + \mathrm{Gl}^4$$

Damit erhalten wir:

$$\text{(8)}\qquad \underline{\underline{F_E = F_K\left[1 + \frac{(x_1 + x_2)^2}{4\,R^2}\right]\left[1 + \frac{\left(\dfrac{x_2 - x_1}{2}\right)^2}{3\,R^2}\right]}}$$

Berechnet man also das Flächenverhältnis für den Mittelpunkt des endlichen Rechteckes mit den Seiten $(y_2 - y_1)$ und $(x_2 - x_1)$, so erhält man das Verhältnis der endlichen Flächen gleich diesem $f x_m$ mal

$$\left[1 + \frac{\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right)^2}{3\,R^2}\right].$$

$\frac{\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right)^2}{3\,R^2}$ ist aber im allgemeinen sehr klein und kann vernachlässigt werden.

Beispiel. $x_2 - x_1 = 2$ km; $R = 6370$ km

$$1 + \frac{\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right)^2}{3\,R^2} = 1 + \frac{1}{3 \times \overline{6370}^2} = 1 + \frac{1}{121\,730\,700} = 1 + 0.8 \cdot 10^{-8}$$

Für eine Fläche von 4 km^2 macht also die Vernachlässigung des Gliedes $\frac{\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right)^2}{3\,R^2}$ nur 0.032 m^2 aus; für ein Quadrat von 20 km Seitenlänge, also für eine Fläche von 400 km^2 macht die Vernachlässigung des Gliedes 320 m^2 aus, während das Glied $\frac{x_m{}^2}{R^2}$ für $x_m = 100$ km ca. 100 000 m^2 Korrektur ergibt.

Rundfrage betr. die Baulinien[1].

Antwort von A. Witzig, Sektionsgeometer, Zürich.

In der Dezembernummer unserer Fachschrift vom Jahre 1934 berührt Herr Kollege Moll ein Gebiet, welches gewiß einer einläßlichen Behandlung wert ist. Je länger je mehr wird es notwendig sein, daß sich auch die Geometerschaft mit dem Baugesetze vertraut macht. Ein spezieller Abschnitt desselben ist nun den Baulinien gewidmet, weshalb im folgenden der Begriff der Baulinie etwas skizziert sei.

[1] Wir beginnen in dieser Nummer mit der Veröffentlichung einzelner Antworten auf die Rundfrage, welche Herr Grundbuchgeometer Moll auf Seite 300 des Jahrganges 1934 dieser Zeitschrift gestellt hat. Das Redaktionskomitee hat eine beschränkte Anzahl von Antworten für die Veröffentlichung bestimmt; die Auswahl geschah z. T. nach regionalen Gesichtspunkten, da die rechtlichen Vorschriften betr. Baulinien kantonal sind. Erfreulicherweise sind der Redaktion viele Antworten zugegangen, so daß die Veröffentlichung aller ermüdend wirken würde. Wir danken im Namen des Redaktionskomitees allen Lesern, die sich die Mühe genommen haben, eine Antwort einzusenden und bitten alle, deren Antworten nicht veröffentlicht werden, sich für zukünftige Fragen nicht abhalten zu lassen, Antworten einzureichen. *Die Redaktion.*