

**Zeitschrift:** Schweizerische Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik =  
Revue technique suisse des mensurations et améliorations foncières

**Herausgeber:** Schweizerischer Geometerverein = Association suisse des géomètres

**Band:** 35 (1937)

**Heft:** 6

**Artikel:** Eine räumliche Transformation

**Autor:** Muggli, H.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-196655>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 15.03.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

*E. Winkler* (i. d. Einl. dieses Aufsatzes genau zitierte und hier verarbeitete Abhandlung).

Die Probleme nur im Ueberblick und in Streiflichtern darstellend:

*E. Brückner*, Die schweizerische Landschaft einst und jetzt.

(Rektoratsrede. XVIII. Jahrb. d. Geogr. Ges. Bern, 1898/99.)

*H. Dörries*, Zur Entwicklung der Kulturlandschaft im nordostschweizerischen Alpenvorlande.

(Mitteil. d. Geogr. Ges. Hamburg 1928, S. 180/202.)

*O. Flückiger*, Zur Geographie des Menschen auf dem Boden der Schweiz. (Beil. z. Progr. d. Höheren Töchterschule Zürich 1910.)

*O. Frohnmeyer*, Gempenplateau und unteres Birstal. Eine anthropogeographische Studie auf Grund der Karten und Pläne seit dem 17. Jahrhundert. Dissertation, Basel 1917.

NB. Die Frohnmeyersche Arbeit reiht sich zwischen die von H. Wegelin und die von Ad. Roemer ein.

---

## Eine räumliche Transformation.

Von *H. Muggli*, dipl. Math., Rüschlikon.

### *Vorbemerkung der Redaktion.*

Die Transformation, die in der nachstehend veröffentlichten Arbeit untersucht wird, ist von praktischer Bedeutung bei den stereoskopischen Raumautographen.

Wenn wir in der Luftphotogrammetrie mit derselben photographischen Kammer zeitlich nacheinander zwei Aufnahmen machen und sie nach der Entwicklung in zwei Kammern einlegen, die der Aufnahmekammer identisch sind, und sie in dieselbe gegenseitige Orientierung bringen, die die Aufnahmekammer bei den beiden Aufnahmen hatte, so schneiden sich die je zwei Strahlen, die in jeder der beiden Kammern je einem bestimmten Punkte des Originalgeländes entsprechen. In diesem Falle ist die Transformation des Originalgeländes, das sogenannte „Raummodell“, dem Original ähnlich. Richten wir nun gegen die Kammerobjektive je ein auf unendlich fokussiertes Fernrohr mit den Angularvergrößerungen  $n_1$  respektive  $n_2$ , so daß ihre Achsen in konjugierte und daher sich schneidende Strahlen des Raummodelles fallen, so bilden die Bildstrahlen, die andern konjugierten Punkten des Raummodelles entsprechen, die räumliche Transformation, die in diesem Aufsatz näher untersucht wird. Diese Transformation stellt das dar, was als stereoskopisches Bild der Umgebung des durch die Achsen eingestellten Punktes des Raummodelles durch die sogenannte „geometrische Methode“ entsteht (Vgl. Baeschlin und Zeller, Lehrbuch der Stereophotogrammetrie, Zürich 1934, Seiten 187 und 188). Während bei dieser Transformation die Achsen unverändert bleiben, werden sie in dem praktischen Falle, der bei den Raumautographen verwirklicht wird, gedreht, bis sie parallel sind. Außerdem werden im allgemeinen die transformierten

Büschel um ihre Achsen gedreht, so, daß der Originalstrahl und der transformierte nicht mehr in derselben Ebene liegen.

Der Verfasser der vorliegenden Studie beabsichtigt auch diese allgemeine Transformation zu untersuchen, wenn er dazu die Zeit findet, die ihm seine berufliche Tätigkeit gegenwärtig nicht übrig läßt. Durch die vollständige Untersuchung dieser komplizierteren räumlichen Transformation wird, wie ich glaube, eine wertvolle Bereicherung der Elemente einer Theorie des stereoskopischen Sehens geboten werden können.

*F. Baeschlin.*

Das geometrische Problem, das in dieser Arbeit behandelt werden soll, läßt sich etwa folgendermaßen formulieren:

Die Punkte  $Z_1$  und  $Z_2$  seien die Träger von je einem räumlichen Strahlbüschel. Jedes Büschel enthalte einen ausgezeichneten Strahl, die Achse des Büschels. Von den beiden Achsen wird vorausgesetzt, daß sie sich in einem Punkt  $O$  schneiden. Wir bezeichnen mit  $p_1$  einen beliebigen Strahl des ersten Büschels, mit  $p_2$  einen solchen des zweiten Büschels und mit  $\varphi_1$  bzw.  $\varphi_2$  die Winkel zwischen  $p_1$  bzw.  $p_2$  und den zugehörigen Achsen.

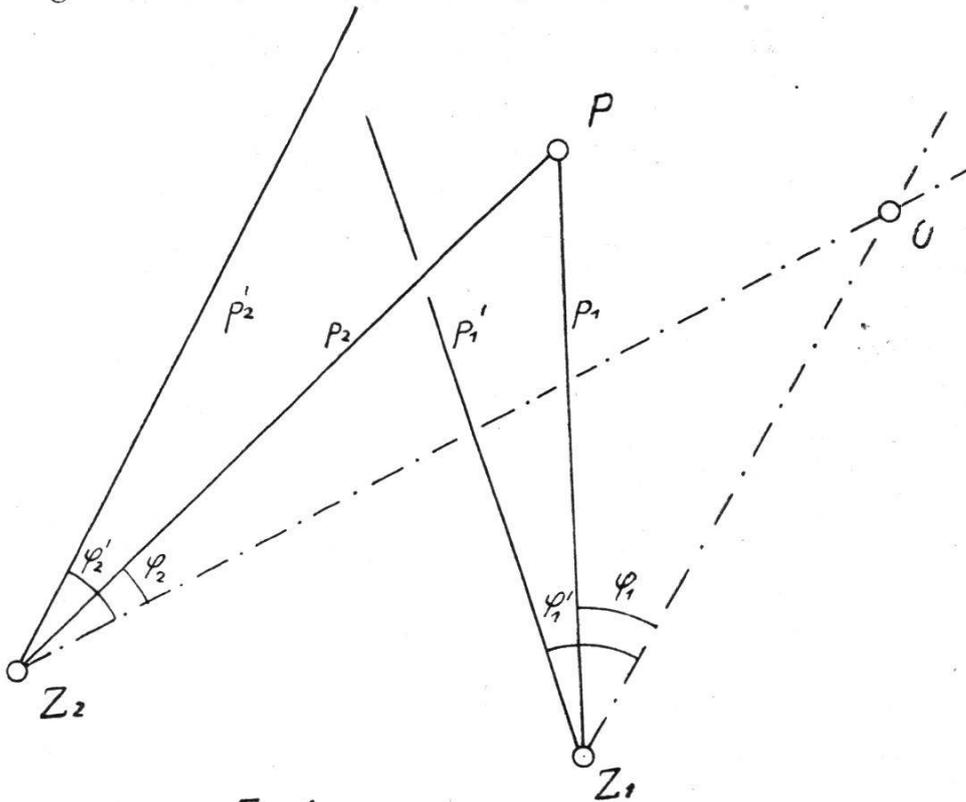


Fig. 1

Die beiden Büschel werden nun transformiert, so daß  $p_1$  in  $p_1'$ ,  $p_2$  in  $p_2'$ ,  $\varphi_1$  in  $\varphi_1'$  und  $\varphi_2$  in  $\varphi_2'$  übergeht. Dabei sollen folgende Gesetze erfüllt sein:

1. Jeder Strahl liege mit seinem transformierten in derselben Ebene.

2. 
$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi_1' &= n_1 \operatorname{tg} \varphi_1 \\ \operatorname{tg} \varphi_2' &= n_2 \operatorname{tg} \varphi_2 \end{aligned}$$

Wir betrachten speziell solche Strahlen  $p_1$  und  $p_2$ , die sich in irgendeinem Punkt  $P$  des Raumes schneiden. Die transformierten Strahlen  $p_1'$  und  $p_2'$  werden sich aber im allgemeinen nicht mehr schneiden, d. h. die Transformation der Büschel erzeugt keine Transformation der Punkte des Raumes; es werden vielmehr nur gewisse ausgezeichnete Punkte transformiert.

Welchen Bedingungen müssen die Strahlen  $p_1$  und  $p_2$  bzw. der Punkt  $P$  genügen, damit sich die transformierten Strahlen  $p_1'$  und  $p_2'$  ebenfalls in einem Punkt  $P'$  schneiden, und welcher Art ist die Abbildung der Punkte  $P$  auf die  $P'$ .

*Das ebene Problem.*

Wir betrachten zunächst nur die Punkte, die in derjenigen Ebene liegen, die durch die beiden Achsen geht. Liegen  $P$  und damit  $p_1$  und  $p_2$  in dieser Ebene, so ist das auch der Fall für  $p_1'$  und  $p_2'$ ; diese schneiden sich also oder sind parallel.  $P$  wird daher, wenn man auch unendlich ferne Punkte zuläßt, stets auf einen Punkt  $P'$  abgebildet, der ebenfalls in dieser Ebene liegt. Die Abbildung ist ein Spezialfall einer quadratischen Transformation; eine solche führt Gerade im allgemeinen in Kegelschnitte über, welche durch  $Z_1$  und  $Z_2$  gehen. Es würde zu weit führen, diese Abbildung hier zu diskutieren. Man findet sie z. B. behandelt bei Döhlemann, „Geometrische Transformationen“.

*Das räumliche Problem.*

Wir setzen jetzt voraus, daß die Strahlen  $p_1$  und  $p_2$  nicht in der Ebene liegen, die von den Achsen aufgespannt wird. Trotzdem sollen sich nicht nur  $p_1$  und  $p_2$ , sondern auch ihre transformierten  $p_1'$  und  $p_2'$  schneiden. Die Schnittpunkte seien wieder  $P$  und  $P'$ .

Da  $p_1$  und  $p_1'$  mit der Achse  $Z_1O$  in der selben Ebene liegen sollen, ebenso  $p_2$  und  $p_2'$  mit  $Z_2O$ , so müssen  $O$ ,  $P$  und  $P'$  auf einer Geraden, der Schnittgeraden der beiden Ebenen liegen.  $h_1$  und  $h_2$  seien die Lote von  $Z_1$  und  $Z_2$  auf diese Gerade,  $q$  der Abstand der beiden Fußpunkte,  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  die Winkel der Lote mit den zugehörigen Achsen. Aus der Figur liest man folgende Beziehungen ab:

$$(1) \quad \begin{aligned} h_2 \operatorname{tg} (\alpha_2 - \varphi_2) - h_1 \operatorname{tg} (\alpha_1 - \varphi_1) &= q \\ h_2 \operatorname{tg} (\alpha_2 - \varphi_2') - h_1 \operatorname{tg} (\alpha_1 - \varphi_1') &= q \end{aligned}$$

Berücksichtigt man, daß

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi_1' &= n_1 \operatorname{tg} \varphi_1 \\ \operatorname{tg} \varphi_2 &= n_2 \operatorname{tg} \varphi_2 \end{aligned}$$

und setzt man zur Abkürzung

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi_1 &= u; & \operatorname{tg} \varphi_2 &= v \\ h_1 \operatorname{tg} \alpha_2 - h_2 \operatorname{tg} \alpha_1 - q \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2 &= D, \end{aligned}$$

so erhält man durch Vereinfachung das Gleichungssystem

$$(2) \quad \frac{h_1 u}{\cos^2 \alpha_1} - \frac{h_2 v}{\cos^2 \alpha_2} + D u v = 0$$

$$\frac{n_1 h_1 u}{\cos^2 \alpha_1} - \frac{n_2 h_2 v}{\cos^2 \alpha_2} + n_1 n_2 D u v = 0$$

Es sei vorläufig  $n_1$  verschieden von  $n_2$ . Wir gehen aus von einer beliebigen Geraden durch  $O$  (aber nicht in der Ebene der Achsen) und werden zeigen, daß sie außer  $O$  noch genau einen ausgezeichneten Punkt enthält. Dazu lösen wir das obige Gleichungssystem nach  $u$  auf. Die einzige von Null verschiedene Lösung ( $u = 0$  ergibt den Punkt  $O$ ) ist

$$u = \operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{n_2 - n_1}{n_1 (n_2 - 1)} \frac{h_2}{D \cos^2 \alpha_2}$$

Berechnen wir noch den Abstand des ausgezeichneten Punktes  $P$  von  $O$ .

$$\operatorname{tg} (\alpha_1 - \varphi_1) = \frac{n_1 (n_2 - 1) D \cos^2 \alpha_2 \operatorname{tg} \alpha_1 - (n_2 - n_1) h_2}{n_1 (n_2 - 1) D \cos^2 \alpha_2 + \operatorname{tg} \alpha_1 (n_2 - n_1) h_2}$$

$$\overline{OP} = h_1 (\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} [\alpha_1 - \varphi_1])$$

$$= h_1 \frac{h_2 (n_2 - n_1) (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_1)}{n_1 (n_2 - 1) \cos^2 \alpha_2 \cdot D + \operatorname{tg} \alpha_1 (n_2 - n_1) h_2}$$

Um einen Überblick über alle ausgezeichneten Punkte zu gewinnen, führen wir die Polarkoordinaten  $r, \vartheta, \chi_1$  und  $\chi_2$  ein; und zwar ist  $r = OP$ ,  $\vartheta$  gleich dem Winkel zwischen  $OP$  und der Normalen auf die beiden Achsen,  $\chi_1$  bzw.  $\chi_2$  gleich dem Winkel zwischen der Normalprojektion von  $OP$  auf die Achsenebene und der ersten bzw. der zweiten Achse. Damit ergeben sich die folgenden Beziehungen (s. Fig. 2):

$$\begin{aligned} \sin \alpha_1 &= \sin \vartheta \cos \chi_1 & h_1 &= r_1 \cos \alpha_1 \\ \sin \alpha_2 &= \sin \vartheta \cos \chi_2 & h_2 &= r_2 \cos \alpha_2 \\ q &= r_2 \sin \alpha_2 - r_1 \sin \alpha_1 \\ D &= \frac{r_1 \operatorname{tg} \alpha_2}{\cos \alpha_1} - \frac{r_2 \operatorname{tg} \alpha_1}{\cos \alpha_2} \end{aligned}$$

$$OP = r = \frac{(n_2 - n_1) \cdot r_1 \cdot r_2}{\sin \vartheta [n_1 (n_2 - 1) r_1 \cos \chi_2 - n_2 (n_1 - 1) r_2 \cos \chi_1]}$$

$$(3) \quad \frac{n_2 (n_1 - 1)}{r_1} \cdot r \cdot \cos \chi_1 \cdot \sin \vartheta - \frac{n_1 (n_2 - 1)}{r_2} r \cos \chi_2 \sin \vartheta = n_1 - n_2$$

Ist  $n_1 = n_2$ , so hat das Gleichungssystem (2) nur dann von  $O$  verschiedene Lösungen, wenn  $D = 0$  ist; die zweite Gleichung ist dann eine Folge der ersten. In diesem Fall haben wir unendlich viele Lösungen, wobei wir z. B.  $u$  beliebig annehmen dürfen. Das bedeutet, daß nur diejenigen Geraden durch  $O$  von Null verschiedene ausgezeichnete Punkte enthalten, für die  $D = 0$  ist, und daß alle Punkte einer Geraden, für die  $D = 0$  ist, ausgezeichnete Punkte sind. Mit unsern Polarkoordinaten erhalten wir die Gleichung:

$$(3') \quad D \cdot \cos \alpha_1 \cdot \cos \alpha_2 = (r_1 \cos \chi_2 - r_2 \cos \chi_1) \sin \vartheta = 0$$

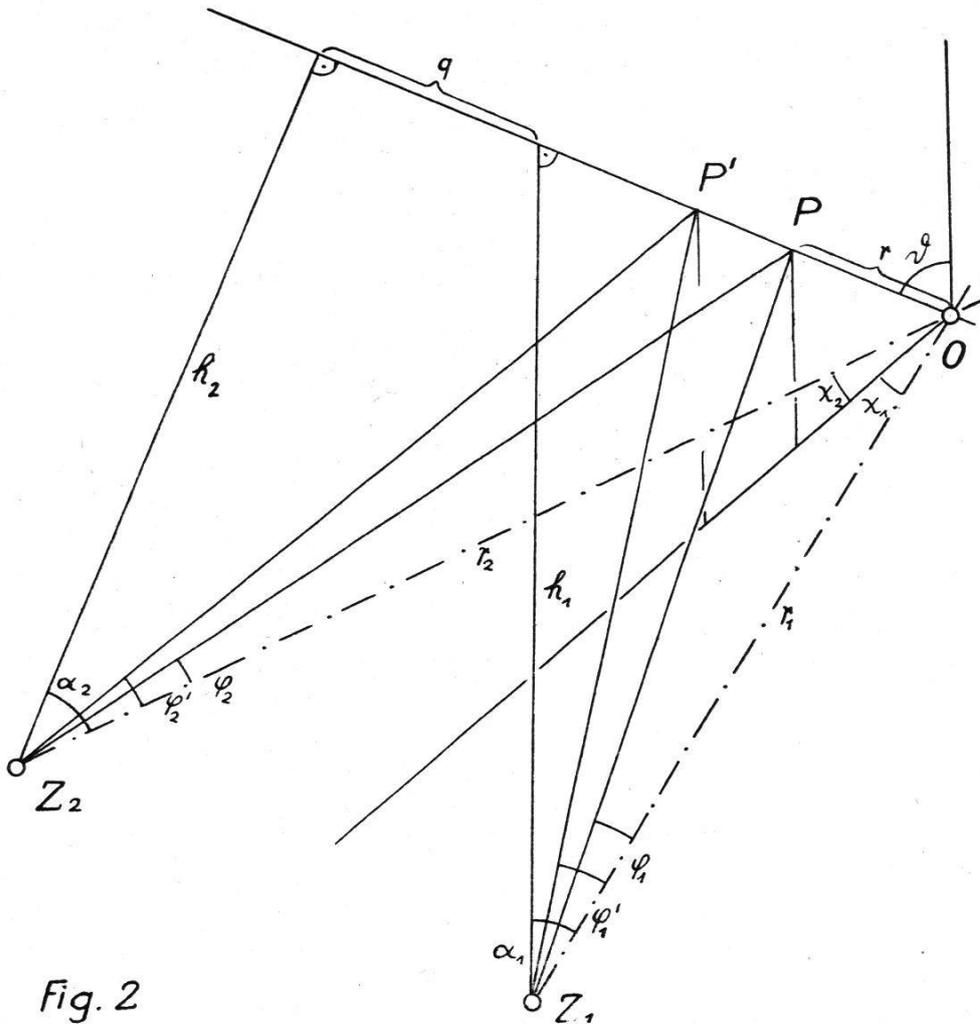


Fig. 2

Ein Punkt ist dann und nur dann ausgezeichnet, wenn seine Koordinaten diese Gleichung befriedigen. (3') ist als Spezialfall in (3) enthalten.

Die Gleichung (3) stellt eine Ebene dar, welche auf der Ebene der Achsen senkrecht steht. Ist  $n_1 = n_2$ , so geht sie durch  $O$ .

Es bleibt noch die Frage nach der Art der Abbildung der Punkte  $P$  auf die  $P'$ . Die  $P'$  liegen in der Ebene, deren Gleichung wir aus (3) erhalten, indem wir dort  $n_1$  durch  $\frac{1}{n_1}$  und  $n_2$  durch  $\frac{1}{n_2}$  ersetzen.

Die Ebene der  $P$  und die der  $P'$  schneiden sich in einer Geraden, welche zusammenfällt mit der Schnittgeraden  $s$  der beiden Normalenebenen zu den Achsen in den Punkten  $Z_1$  und  $Z_2$ . Denn für alle Punkte von  $s$  ist  $\varphi_1 = \varphi_2 = 90^\circ$  und damit auch  $\varphi_1' = \varphi_2' = 90^\circ$ . D. h. die Punkte werden in sich selbst übergeführt.

Die Abbildung der Punkte  $P$  auf die  $P'$  ist eine Zentralprojektion mit dem Zentrum  $O$ ; denn  $O$ ,  $P$  und  $P'$  liegen ja auf einer Geraden.

Ist  $n_1 = n_2$ , so liegen  $P$  und  $P'$  in derselben Ebene. Die Abbildung ist eine Kollineation mit  $O$  als Zentrum und  $s$  als Achse. Um das einzusehen, schneiden wir die Strahlen  $p_1$  und  $p_1'$  mit der Normalebene zu

$Z_1O$  in  $O$ . Wie man aus den Transformationsgesetzen abliest, besteht zwischen den Durchstoßpunkten der  $p_1$  und denjenigen der  $p_1'$  eine Ähnlichkeit mit  $O$  als Ähnlichkeitszentrum. Durch Zentralprojektion geht eine solche in eine perspektive Kollineation über (Projektionszentrum  $Z_1$ ).

## Schweizerischer Geometerverein.

### Protokoll

der XXIII. ordentlichen Delegiertenversammlung vom 1. Mai 1937  
in Yverdon.

Zur ordnungsgemäß einberufenen Delegiertenversammlung haben sich folgende Vertreter der Sektionen und Gruppen eingefunden:

#### 1. Sektionen:

Aargau-Basel-Solothurn:	Hablützel, Basel; Hartmann, Lenzburg.
Bern:	Bangerter, Fraubrunnen; Froidevaux, Biel; Vogel, Lyß.
Freiburg:	Genoud, Châtel-St-Denis.
Genf:	Panchaud, Genf; Baudet M., Genf.
Graubünden:	—
Ostschweiz:	Kundert, St. Gallen; Gsell, Sulgen.
Tessin:	Tosi, Massagno.
Waadt:	Etter, Vevey; Pouly, Lausanne.
Waldstätte:	Widmer, Luzern.
Wallis:	Carrupt, Sierre.
Zürich-Schaffhausen:	Vogel, Pfäffikon; Steinegger, Schaffhausen.

#### 2. Gruppen:

Verband der selbständig praktizierenden Grundbuchgeometer: Schärer, Baden; Werffeli, Effretikon.

Vereinigung der Beamten-Grundbuchgeometer: Lattmann, Zürich.

Vom Zentralvorstand waren Präsident Bertschmann, Zürich, und Kassier Kübler, Bern, anwesend. Ferner wohnte auch der Redaktor der Zeitschrift, Prof. Dr. Baeschlin, Zollikon, der Versammlung bei.

1. *Eröffnung.* Zentralpräsident Bertschmann übernimmt statutengemäß den Vorsitz und eröffnet um 11 Uhr die Sitzung mit einem Begrüßungswort. Die Versammlung bestimmt sodann Kassier Kübler zum Protokollführer, Hablützel-Basel und Froidevaux-Biel als Stimmenzähler und Etter-Vevey als Uebersetzer.

Es wird zur Kenntnis genommen, daß Kollege Panchaud die Leitung der Sektion Genf übernommen hat.

2. *Jahresbericht — Jahresrechnung.* Entsprechend der vorgeschlagenen Tagesordnung wird vorerst das Protokoll der letzten ordentlichen Delegiertenversammlung vom 9. Mai 1936 in Bern, bekanntgegeben in der Juninummer 1936 der Zeitschrift, genehmigt. Sodann findet der Jahresbericht des Präsidenten, publiziert in der Märznummer 1937, die Billigung der Vertreter. Ebenso wird auch der Rechnungsbericht, der ebenfalls der Märznummer beigelegt ist, nach einigen ergänzenden Bemerkungen des Zentralkassiers und Bekanntgabe des Revisionsberichtes, unter Verdankung abgenommen und der Hauptversammlung zur Genehmigung empfohlen. Eine Anregung von Schärer, Baden, betreffend Aenderung der Ausgestaltung des Rechnungsberichtes nimmt der Zentralvorstand zur Prüfung entgegen.

3. *Budget.* Bei der Beratung des Budget begründet Hablützel, Basel, den von der Sektion Aargau-Basel-Solothurn dem Zentral-