

Zeitschrift: Schweizerische Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik =
Revue technique suisse des mensurations et améliorations foncières

Herausgeber: Schweizerischer Geometerverein = Association suisse des géomètres

Band: 35 (1937)

Heft: 12

Artikel: Détermination de la pesanteur au moyen du pendule de Sterneck :
étude du boitement

Autor: Wisser, Pierre

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-196666>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 26.11.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

SCHWEIZERISCHE
Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik

ORGAN DES SCHWEIZ. GEOMETERVEREINS

Offiz. Organ der Schweiz. Gesellschaft für Kulturtechnik / Offiz. Organ der Schweiz. Gesellschaft für Photogrammetrie

Revue technique suisse des mensurations et améliorations foncières

ORGANE DE LA SOCIÉTÉ SUISSE DES GÉOMÈTRES

Organe officiel de l'Association Suisse du Génie rural / Organe officiel de la Société Suisse de Photogrammétrie

Redaktion: Dr. h. c. C. F. BAESCHLIN, Professor, Zollikon (Zürich)

Ständ. Mitarbeiter f. Kulturtechnik: Dr. H. FLUCK, Dipl. Kulturing., Villa Lepontia, Bellinzona-Ravecchia

Redaktionsschluß: Am 1. jeden Monats

Expedition, Inseraten- und Abonnements-Annahme:

BUCHDRUCKEREI WINTERTHUR VORMALS G. BINKERT, A.-G., WINTERTHUR

<p style="text-align: center;">No. 12 • XXXV. Jahrgang der „Schweizerischen Geometer-Zeitung“ Erscheinend am zweiten Dienstag jeden Monats 14. Dezember 1937 Inserate: 50 Cts. per einspaltige Nonp.-Zeile</p>	<p style="text-align: center;">Abonnemente: Schweiz Fr. 12.—, Ausland Fr. 15.— jährlich Für Mitglieder der Schweiz. Gesellschaften für Kulturtechnik u. Photogrammetrie Fr. 9.— jährl. Unentgeltlich für Mitglieder des Schweiz. Geometervereins</p>
---	--

Détermination de la pesanteur au moyen du pendule de Sterneck. Etude du boîtement.

Par *Pierre Wisser*, Ingénieur A.I.Lg. et A.I.M.

Soient g_a l'accélération gravifique absolue en un lieu pris comme origine et S_a la durée d'oscillation d'un pendule en ce lieu. Soit d'autre part S la durée d'oscillation du même pendule en une station quelconque, l'accélération relative g en cette station se calculera par la formule:

$$g S^2 = g_a S_a^2$$

Le problème de la détermination de la pesanteur se ramène donc à une mesure aussi précise que possible de la durée d'oscillation d'un pendule donné. Les valeurs observées seront corrigées pour toutes les conditions locales d'expérience (température, pression, marche du chronomètre de comparaison, etc...) Les valeurs corrigées, introduites dans la formule ci-dessus, donneront la valeur de g en chaque station.

La précision nécessaire ne peut s'obtenir par observation directe de la période d'oscillation. On mesure, par un procédé optique, la coïncidence entre un chronomètre battant la seconde et un pendule dont la période est un peu plus grande qu'une seconde.

L'appareil de Sterneck qui a été employé en Suisse, se compose essentiellement d'un pendule, d'un appareil de coïncidence et d'un chronomètre à contact électrique.

La commission géodésique suisse a employé quatre pendules, trois en laiton avec couteau d'agate, un en acier avec couteau d'acier. Chacun de ces pendules pèse environ un kilogramme et leur longueur, d'environ 25 cm, leur donne une période d'oscillation voisine de la seconde¹.

¹ Das „Schweizerische Dreiecksnetz“, herausgegeben von der Schweiz. Geodätischen Kommission. 7. Band. Relative Schwerebestimmungen, I. Teil. Bearbeitet von Dr. J. B. Messerschmitt, Zürich 1897.

A la partie supérieure, un petit miroir est fixé parallèlement à la tige, ce miroir est donc vertical quand le pendule est au repos.

Le couteau repose sur une plaque d'agate supportée par un trépied en cuivre coulé. La mise en station se fait au moyen des trois vis calantes du trépied, un niveau cavalier contrôlant l'horizontalité absolue de la plaque d'agate.

L'appareil de coïncidence consiste en une boîte rectangulaire en laiton surmontée d'une lunette. La face antérieure de la boîte porte une échelle gravée sur verre munie en son milieu d'une fente horizontale correspondant au trait zéro.

La boîte est placée devant le pendule immobile de façon que l'image de l'échelle réfléchi par le miroir du pendule soit visible dans le champ de la lunette. La boîte étant montée sur trois vis calantes, on peut, en manœuvrant celles-ci, amener la fente sur le trait horizontal du réticule.

La paroi latérale de la boîte est percée d'une ouverture devant laquelle se place une lampe. Le faisceau lumineux qui pénètre dans la boîte tombe sur un miroir incliné à 45° qui le renvoie vers l'avant à travers la fente de la face antérieure et de l'échelle.

La boîte contient encore un électro-aimant qui, à circuit fermé, attire un levier vers le bas. Celui-ci, à circuit ouvert, est repoussé vers le haut par un ressort antagoniste. L'extrémité libre du levier porte une plaque métallique munie d'une fente. Cette plaque, qui se meut entre le miroir et la fente de la face antérieure, intercepte le rayon lumineux aussi longtemps que la fente de la plaque et celle de l'échelle ne coïncident pas. Au moment de la coïncidence, le rayon lumineux passe et l'on voit dans la lunette la fente instantanément éclairée.

C'est l'échappement du chronomètre à seconde qui ferme le circuit de l'électro-aimant. On observe donc dans la lunette deux éclairs par seconde, l'un à la fermeture du circuit, l'autre à l'ouverture. Le premier, étant plus régulier, intervient seul dans les mesures.

Fonctionnement de l'appareil: Quand le pendule oscille, l'image de l'échelle se déplace dans le champ de la lunette. Par rapport au fil horizontal du réticule, le trait zéro (fente) monte et descend. La distance entre le fil et la fente est une fonction sinusoïdale du temps, directement proportionnelle à l'élongation du pendule.

Soit S la demi-période (Schlagdauer) du pendule, la fente et le fil horizontal coïncideront aux moments: $0, S, 2 S, 3 S \dots n S$.

D'autre part, la fente est éclairée une fois par seconde. Au temps: $t = 0$, on a vu l'éclair sur le fil horizontal. Si S valait $\frac{1}{2}$ seconde, l'éclair et le fil coïncideraient chaque fois, c'est-à-dire aux temps $0, 1, 2, 3 \dots n$ secondes. Mais comme S est différent d'une demi seconde, l'éclair suivant apparaîtra à une certaine distance du fil. Cet écart, qui provient de la différence de phase entre la marche de la montre et celle du pendule est également une fonction sinusoïdale du temps. L'écart grandit, passe par un maximum et s'annule de nouveau au temps C . Exprimé en secondes de la montre, C est l'intervalle de coïncidence.

Remarque: En général, l'éclair et le fil ne coïncident pas réellement. On interpole le moment théorique de la coïncidence entre deux positions successives de l'éclair, situées de part et d'autre du fil du réticule. Cette interpolation est admissible, la vitesse d'oscillation étant presque constante aux environs du zéro.

Le phénomène de boîtement: Si nous considérons une série quelconque parmi les observations du Dr Messerschmitt, nous constatons en général que les intervalles successifs de coïncidence ne sont pas égaux. Par exemple:

1.	23 ^h 44 ^m 7 ^s .1	}	$C_1 = 32^s.0$	} $C_1 + C_2 = 55^s.9$
2.	39.1	}	$C_2 = 33.9$	
3.	45 13.0	}	$C_3 = 32.1$	} $C_3 + C_4 = 55.9$
4.	45.1	}	$C_4 = 33.8$	
5.	46 18.9	}	$C_5 = 32.1$	} $C_5 + C_6 = 55.9$
6.	51.0	}	$C_6 = 33.8$	
7.	47 24.8	}		

etc.¹

Cette anomalie provient d'une mise en station défectueuse. En pareil cas, il se peut que la coïncidence ait lieu, non pas lorsque le pendule passe à la verticale, mais pour une certaine élongation δ du pendule. Les écarts maxima du trait lumineux par rapport au fil du réticule ne sont plus les mêmes vers le haut et vers le bas, ce qui entraîne l'inégalité des intervalles de coïncidence successifs.

Toutefois, cette anomalie n'introduit pas d'erreur sensible dans les calculs si l'on considère un nombre pair de coïncidences, car la somme de deux intervalles successifs reste constante ainsi qu'on le voit par l'exemple ci-dessus et comme nous allons le démontrer.

On établira tout d'abord les équations du mouvement du pendule et du mouvement de la montre.

On en déduira l'équation du mouvement du trait lumineux et la relation entre les demi-périodes S et C . On cherchera ensuite l'expression mathématique des anomalies, d'où l'on déduira la constance annoncée. Deux méthodes de calcul, par les élongations et par les vitesses, nous conduiront aux mêmes conclusions.

1. *Mouvement du pendule:* Soit un pendule de masse m . Si l'amplitude des oscillations est petite et si l'amortissement est faible, comme c'est le cas pour le pendule de Sterneek, la solution de l'équation différentielle du mouvement s'écrit:

$$\varphi = e^{-Kt} (P \cos \mu t + Q \sin \mu t) \tag{I}$$

dans laquelle: φ est l'élongation au temps t

K est défini par la formule: $\frac{m}{A} = 2 K$, la résistance de

¹ Voir l. c. page 113, station Lugano, mai 9, 1895.

l'air, proportionnelle à la vitesse, et dirigée en sens opposé, étant donnée par: $R = AV$

$$\mu = \sqrt{\frac{g}{l} - K^2}$$

P et Q sont des constantes d'intégrations que nous allons déterminer.

Plaçons l'origine des temps au moment où le pendule passe à la verticale.

Pour $t = 0$: $\varphi = 0$ donc $P = 0$

L'équation (I) devient:

$$\varphi = e^{-Kt} Q \sin \mu t \quad (\text{Ia})$$

La vitesse angulaire à chaque instant est donnée par:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = e^{-Kt} Q (\mu \cos \mu t - K \sin \mu t)$$

Soit t_m le moment où le pendule atteint son élongation maxima φ_m . A cet instant la vitesse est nulle:

$$\omega t_m = e^{-Kt_m} Q (\mu \cos \mu t_m - K \sin \mu t_m) = 0$$

C'est-à-dire, puisque: $e^{-Kt_m} Q$ n'est pas nul.

$$\mu \cos \mu t_m - K \sin \mu t_m = 0$$

$$\mu \cos \mu t_m = K \sin \mu t_m$$

$$\text{tg } \mu t_m = \frac{\mu}{K}$$

Posons: $\mu t_m = \text{arc tg } \frac{\mu}{K} = \lambda$ $t_m = \frac{\lambda}{\mu}$

On a: $\varphi_m = Q e^{-Kt_m} \sin \mu t_m = Q e^{-Kt_m} \sin \lambda$

Or:
$$\sin \lambda = \sqrt{\frac{\text{tg}^2 \lambda}{1 + \text{tg}^2 \lambda}} = \sqrt{\frac{\frac{\mu^2}{K^2}}{1 + \frac{\mu^2}{K^2}}} = \sqrt{\frac{\mu^2}{K^2 + \mu^2}}$$

D'où l'on tire: $Q = \varphi_m e^{\frac{K\lambda}{\mu}} \sqrt{\frac{K^2 + \mu^2}{\mu^2}}$

Posons: $Q = \Phi = \text{constante}$, l'équation (Ia) devient:

$$\varphi = \Phi e^{-Kt} \sin \mu t \quad (\text{Ib})$$

On voit que $\varphi = 0$ pour: $t = 0, \frac{\pi}{\mu}, \frac{2\pi}{\mu}, \dots, \frac{n\pi}{\mu}$. Pour: $t = \frac{\lambda}{\mu}$, on retrouve: $\varphi = \varphi_m$.

Le mouvement du pendule de Sterneek (demi-période: $s \approx 0,508$ sec.) est donc donné par la formule:

$$\boxed{\varphi = \Phi e^{-Kt} \sin \frac{\pi}{s} t} \quad (\text{II})$$

2. *Mouvement de la montre*: La seconde de la montre étant prise pour unité de temps, le mouvement de la montre peut se représenter par:

$$\tau = \Theta \sin 2 \pi t \quad (\text{III})$$

Le contact électrique s'établit chaque fois que $\tau = 0$, c'est-à-dire pour:

$$t = 0, 1, 2, 3, \dots n.$$

La *différence de phase* entre le pendule et le trait lumineux est donc:

$$\left(2 \pi - \frac{\pi}{s}\right) t = \pi \left(2 - \frac{1}{s}\right) t = \pi \frac{2s-1}{s} t = \frac{\pi}{C} t \quad (\text{IV})$$

L'*intervalle de coïncidence*, exprimé en fonction de s est donc:

$$C = \frac{s}{2s-1} \quad (\text{IVa})$$

Inversement, connaissant C , on peut calculer s par la formule:

$$s = \frac{C}{2C-1} \quad (\text{IVb})$$

3. *Mouvement du trait lumineux*: Il résulte des formules (II) et (IV) que le mouvement du trait lumineux est donné par:

$$\boxed{\alpha = \Phi e^{-Kt} \sin \frac{\pi}{C} t} \quad (\text{V})$$

Si l'appareil est bien réglé, les coïncidences successives ont lieu lorsque:

$$\alpha = 0 \quad (t = 0, C, 2C, \dots nC).$$

Les intervalles de coïncidence successifs sont donc égaux.

Etude du boîtement:

Supposons que la coïncidence ait lieu, non plus pour $\alpha = 0$, mais pour $\alpha = \delta$.

Condition: $\frac{\delta}{\Phi}$ doit être petit. Au cours des observations, $\frac{\delta}{\Phi}$ n'a jamais dépassé: 0,05.

A. *Calcul par les élongations*.

La première coïncidence a lieu pour:

$$\delta = \Phi e^{-Kt_1} \sin \frac{\pi}{C} t_1$$

Posons: $\frac{\delta}{\Phi} = D = \text{constante}$. Il vient:

$$\sin \frac{\pi}{C} t_1 = D e^{Kt_1}$$

En pratique, $\frac{\pi}{C} t_1$ est un petit angle, toujours inférieur à 3° . On peut donc écrire:

$$\frac{\pi}{C} t_1 = D e^{Kt_1}$$

avec une approximation $< \frac{1}{10.000}$

Développons en serie la fonction exponentielle. On a:

$$e^{Kt} = 1 + Kt + \frac{K^2 t^2}{2} + \frac{K^3 t^3}{3} + \dots + \frac{K^n t^n}{n} + \dots$$

Au cours des observations, Kt ne dépasse jamais: 0,2. La valeur maxima du troisième terme est donc: 0,02. D'autre part, $D \frac{C}{\pi} \approx 0,5$ sec., l'erreur sur le calcul de t ne peut donc dépasser: 0,01 sec.

Comme le dispositif d'observation ne permet d'apprécier que le dixième de seconde, les valeurs données par le calcul resteront en accord avec les observations même si nous ne conservons que les deux premiers termes du développement.

On a donc: $\frac{\pi}{C} t_1 = D e^{Kt_1} = D (1 + Kt_1)$

C'est-à-dire: $t_1 = C \frac{D}{\pi - K C D}$

Soit t_2 le moment du deuxième passage en δ , on a:

$$\sin \frac{\pi}{C} t_2 = D e^{Kt_2}$$

Ramenons dans le premier quadrant:

$$\sin \frac{\pi}{C} t_2 = \sin \left(\pi - \frac{\pi}{C} t_2 \right) = D e^{Kt_2}$$

On peut écrire:

$$\pi - \frac{\pi}{C} t_2 = D (1 + Kt_2)$$

$$t_2 = C \frac{\pi - D}{\pi + K C D}$$

Pour t_3 , moment du troisième passage:

$$\sin \frac{\pi}{C} t_3 = D e^{Kt_3}$$

$$\sin \frac{\pi}{C} t_3 = \sin \left(\frac{\pi}{C} t_3 - 2\pi \right) = D e^{Kt_3}$$

$$\frac{\pi}{C} t_3 - 2\pi = D (1 + K t_3)$$

$$t_3 = C \frac{D + 2\pi}{\pi - K C D}$$

Pour t_4 , on obtient:

$$\sin \frac{\pi}{C} t_4 = D e^{Kt_4}$$

$$\sin \frac{\pi}{C} t_4 = \sin \left(3\pi - \frac{\pi}{C} t_4 \right) = D e^{Kt_4}$$

$$3\pi - \frac{\pi}{C} t_4 = D (1 + Kt_4)$$

$$t_4 = C \frac{3\pi - D}{\pi + K C D}$$

En général:
$$\left\{ \begin{array}{l} t_{2n-1} = C \frac{D + 2\pi(n-1)}{\pi - KCD} \\ t_{2n} = C \frac{(2n-1)\pi - D}{\pi + KCD} \end{array} \right.$$

Soit C_1 le premier intervalle de coïncidence, on a:

$$C_1 = t_2 - t_1 = C \left[\frac{\pi - D}{\pi + KCD} - \frac{D}{\pi - KCD} \right] = C \frac{\pi^2 - 2D\pi - \pi KCD}{\pi^2 - K^2 C^2 D^2}$$

De même:

$$C_2 = t_3 - t_2 = C \left[\frac{2\pi + D}{\pi - KCD} - \frac{\pi - D}{\pi + KCD} \right] = C \frac{\pi^2 + 2D\pi + 3\pi KCD}{\pi^2 - K^2 C^2 D^2}$$

$$C_3 = t_4 - t_3 = C \left[\frac{3\pi - D}{\pi + KCD} - \frac{D + 2\pi}{\pi - KCD} \right] = C \frac{\pi^2 - 2D\pi - 5\pi KCD}{\pi^2 - K^2 C^2 D^2}$$

$$C_4 = t_5 - t_4 = C \left[\frac{4\pi + D}{\pi - KCD} - \frac{3\pi - D}{\pi + KCD} \right] = C \frac{\pi^2 + 2D\pi + 7\pi KCD}{\pi^2 - K^2 C^2 D^2}$$

En général:
$$\left\{ \begin{array}{l} C_{2n-1} = C \frac{\pi^2 - 2\pi D - (4n-3)\pi KCD}{\pi^2 - K^2 C^2 D^2} \\ C_{2n} = C \frac{\pi^2 + 2\pi D + (4n-1)\pi KCD}{\pi^2 - K^2 C^2 D^2} \end{array} \right.$$

On voit que les intervalles *impairs* forment une *progression arithmétique*

décroissante de raison: $-C \frac{4\pi KCD}{\pi^2 - K^2 C^2 D^2}$

Les intervalles *pairs* forment une *progression arithmétique* croissante de

raison: $+C \frac{4\pi KCD}{\pi^2 - K^2 C^2 D^2}$

Par addition de deux intervalles consécutifs, on obtient:

$$C_1 + C_2 = C_3 + C_4 = \dots = C_{2n-1} + C_{2n} = 2C \frac{\pi^2 + \pi KCD}{\pi^2 - K^2 C^2 D^2} = 2C \frac{\pi}{\pi - KCD}$$

Cette somme reste donc constante d'un bout à l'autre des observations.

B. Calcul par les vitesses:

La vitesse angulaire est donnée par la formule:

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{d\varphi}{dt} = \Phi e^{-Kt} (\mu \cos \mu t - K \sin \mu t) \\ &= \Phi e^{-Kt} \left(\frac{\pi}{C} \cos \frac{\pi}{C} t - K \sin \frac{\pi}{C} t \right) \end{aligned}$$

On supposera que la vitesse est constante aux environs de son maximum, c'est à dire pour les élongations de 0 à δ . On appellera: $(\omega_0)_1 (\omega_0)_2 \dots (\omega_0)_n$ les vitesses au moment des passages successifs du trait lumineux à la verticale, aux temps: $t = 0, C, 2C \dots nC$

On a:
$$\left. \begin{array}{l} t_1 = \frac{\delta}{(\omega_0)_1} \\ (\omega_0)_1 = \frac{\pi}{C} \Phi \end{array} \right\} t_1 = \frac{\delta C}{\Phi \pi} = \Delta$$

$$\left. \begin{aligned} \text{D'autre part: } t_2 &= C - \frac{\delta}{(\omega_0)_2} \\ (\omega_0)_2 &= \frac{\pi}{C} \Phi e^{-KC} \end{aligned} \right\} t_2 = C - \frac{\delta C}{\Phi \pi} e^{KC} = C - \Delta (1 + KC)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{De même: } t_3 &= 2C + \frac{\delta}{(\omega_0)_3} \\ (\omega_0)_3 &= \frac{\pi}{C} \Phi e^{-2KC} \end{aligned} \right\} t_3 = 2C + \Delta (1 + 2KC)$$

$$\left. \begin{aligned} t_4 &= 3C - \frac{\delta}{(\omega_0)_4} \\ (\omega_0)_4 &= \frac{\pi}{C} \Phi e^{-3KC} \end{aligned} \right\} t_4 = 3C - \Delta (1 + 3KC)$$

$$\text{En général: } \left[\begin{aligned} t_{2n-1} &= 2(n-1)C + \Delta [1 + 2(n-1)KC] \\ t_{2n} &= (2n-1)C - \Delta [1 + (2n-1)KC] \end{aligned} \right]$$

Les valeurs des intervalles sont:

$$C_1 = t_2 - t_1 = [C - \Delta (1 + KC)] - \Delta = C - \Delta (2 + KC)$$

$$C_2 = t_3 - t_2 = [2C + \Delta (1 + 2KC)] - [C - \Delta (1 + KC)] = C + \Delta (2 + 3KC)$$

$$C_3 = t_4 - t_3 = [3C - \Delta (1 + 3KC)] - [2C + \Delta (1 + 2KC)] = C - \Delta (2 + 5KC)$$

$$C_4 = t_5 - t_4 = [4C + \Delta (1 + 4KC)] - [3C - \Delta (1 + 3KC)] = C + \Delta (2 + 7KC)$$

$$\text{En général: } \left[\begin{aligned} C_{2n-1} &= C - \Delta [2 + (4n-3)KC] \\ C_{2n} &= C + \Delta [2 + (4n-1)KC] \end{aligned} \right]$$

On retrouve les deux progressions arithmétiques établies plus haut, avec les raisons:

$$r_1 = -4KC\Delta \quad r_2 = +4KC\Delta$$

De même, la somme de deux intervalles consécutifs donne:

$$C_1 + C_2 = C_3 + C_4 = \dots = C_{2n-1} + C_{2n} = 2C + 2\Delta KC = 2C(1 + \Delta K)$$

Comparaison des résultats:

Le calcul par les élongations donnait:

$$C_{2n-1} + C_{2n} = 2C \frac{\pi}{\pi - KC\Delta} = 2C \frac{1}{1 - K \frac{CD}{\pi}} = 2C \frac{1}{1 - K\Delta}$$

$K\Delta$ étant très petit, on peut poser:

$$\frac{1}{1 - K\Delta} \approx 1 + K\Delta$$

ce qui nous ramène à la valeur calculée par la deuxième méthode.

Remarque: Le terme $(1 + \Delta K)$ étant essentiellement positif, il s'ensuit que la valeur de C déduite des observations affectées de boîtement sera systématiquement trop grande. Toutefois l'erreur systématique est si faible ($\Delta K \approx 0,00006$) et reste en deçà de la précision des mesures.