

**Zeitschrift:** Schweizerische Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik =  
Revue technique suisse des mensurations et améliorations foncières

**Herausgeber:** Schweizerischer Geometerverein = Association suisse des géomètres

**Band:** 37 (1939)

**Heft:** 1

  

**Artikel:** Ableitung der mittleren Fehlerellipse für Triangulationspunkte ohne  
Benutzung der Theorie von der partiellen Aequivalenz

**Autor:** Baeschlin, C.F.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-197909>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 15.03.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

SCHWEIZERISCHE  
**Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik**

ORGAN DES SCHWEIZ. GEOMETERVEREINS

Offiz. Organ der Schweiz. Gesellschaft für Kulturtechnik / Offiz. Organ der Schweiz. Gesellschaft für Photogrammetrie

**Revue technique suisse des mensurations et améliorations foncières**

ORGANE DE LA SOCIÉTÉ SUISSE DES GÉOMÈTRES

Organe officiel de l'Association Suisse du Génie rural / Organe officiel de la Société Suisse de Photogrammétrie

Redaktion: Dr. h. c. C. F. BAESCHLIN, Professor, Zollikon (Zürich)

Redaktionsschluß: Am 1. jeden Monats

Expedition, Inseraten- und Abonnements-Aannahme:

BUCHDRUCKEREI WINTERTHUR VORMALS G. BINKERT, A.-G., WINTERTHUR

<p style="text-align: center;"><b>No. 1 • XXXVII. Jahrgang</b> der „Schweizerischen Geometer-Zeitung“ Erscheinend am zweiten Dienstag jeden Monats <b>10. Januar 1939</b>  Inserate: 50 Cts. per einspaltige Nonp.-Zeile</p>	<p style="text-align: center;"><b>Abonnemente:</b> Schweiz Fr. 12. —, Ausland Fr. 15. — jährlich Für Mitglieder der Schweiz. Gesellschaften für Kulturtechnik u. Photogrammetrie Fr. 9. — jährl.  Unentgeltlich für Mitglieder des Schweiz. Geometervereins</p>
--	---

## Ableitung der mittleren Fehlerellipse für Triangulationspunkte ohne Benutzung der Theorie von der partiellen Äquivalenz.

Von Dr. C. F. Baeschlin, Zollikon.

Die wichtigste Anwendung der mittlern Fehlerellipse liegt auf dem Gebiete der Triangulation. Eine vollständig einwandfreie Herleitung dieses Hilfsmittels der Fehlertheorie besteht bis jetzt nur gestützt auf die Theorie der partiellen Äquivalenz. Nun ist aber diese Theorie für viele Vermessungsfachleute zu abstrakt; das hat zur Folge gehabt, daß die Fehlerellipse in der Triangulationspraxis lange nicht die allgemeine Verwendung gefunden hat, die sie verdient. Einzelne in der Literatur veröffentlichte Ableitungen der mittlern Fehlerellipse sind nur für vermittelnde Einzelpunkteinschaltungen einwandfrei. Dagegen besteht meines Wissens keine methodisch einwandfreie Herleitung der Fehlerellipse für vermittelnde Mehrpunkteinschaltungen und für bedingte Ausgleichung.

Diese Lücke möchte diese Mitteilung schließen.

### a) Vermittelnde Koordinatenausgleichung.

Die Fehlergleichungen, die den  $n$  Beobachtungen in einem Triangulationsnetz entsprechen, seien

$$(1) \quad p_h v_h = a_h^1 \xi_1 + b_h^1 \eta_1 + \dots + a_h^k \xi_k + b_h^k \eta_k + \\ + \dots + a_h^u \xi_u + b_h^u \eta_u + f_h$$

Das Gewicht der zu dieser Fehlergleichung gehörenden Beobachtung sei  $p_h$ .

Diese Gleichung kann sich sowohl auf Richtungsmessungen, wie auf Winkelmessungen beziehen. Im Falle von Richtungsmessungen denken wir uns die Orientierungsunbekannten der einzelnen Stationen vorgängig eliminiert, etwa nach dem Schreiber'schen Verfahren fingierter Fehlergleichungen mit negativen Gewichten.

Dabei ist für Richtungsmessungen bekanntlich

$$a_h^k = -\rho'' \frac{\sin z_{ik}}{s_{ik}}; \quad b_h^k = +\rho'' \frac{\cos z_{ik}}{s_{ik}}$$

$$f_h = z_{ik} - l_{ik}$$

$z_{ik}$  = Näherungsneigung vom Punkte  $i$  nach dem Punkte  $k$ .

$s_{ik}$  = Entfernung  $P_i P_k$ .

$l_{ik}$  = provisorisch orientierte Richtungsmessung

Für Winkelmessungen dagegen ist:

$$a_h^k = -\rho'' \left( \frac{\sin z_{ik}}{s_{ik}} - \frac{\sin z_{i, k-1}}{s_{i, k-1}} \right)$$

$$b_h^k = +\rho'' \left( \frac{\cos z_{ik}}{s_{ik}} - \frac{\cos z_{i, k-1}}{s_{i, k-1}} \right)$$

$$f_h = (z_{ik} - z_{i, k-1}) - w_h$$

wo  $w_h$  eine Winkelmessung auf dem Punkte  $P_i$  ist.

Die  $\xi_k, \eta_k$  sind die Komponenten der Verschiebung, die vom Näherungspunkt  $P(x_{k_0}, y_{k_0})$  zum ausgeglichenen Punkt  $P(x_k, y_k)$  führt.

Es ist daher

$$x_k = x_{k_0} + \xi_k; \quad y_k = y_{k_0} + \eta_k.$$

Wir drehen nun unser Koordinatensystem um den Ursprung in positivem Sinne um einen Winkel  $\varepsilon$ .

Die Koordinaten des Punktes  $P(x_k, y_k)$  im neuen System seien  $x_k'$  und  $y_k'$ .

Bekanntlich bestehen dann die Transformationsgleichungen:

$$x_k' = x_k \cos \varepsilon + y_k \sin \varepsilon$$

$$y_k' = -x_k \sin \varepsilon + y_k \cos \varepsilon.$$

Sowohl für Richtungsmessungen, wie für Winkelmessungen lauten die Transformationsformeln für die „Richtungskoeffizienten“  $a_h^k$  und  $b_h^k$ , wie man leicht findet:

$$a_h^{k'} = a_h^k \cos \varepsilon + b_h^k \sin \varepsilon$$

$$b_h^{k'} = -a_h^k \sin \varepsilon + b_h^k \cos \varepsilon$$

Die Richtungskoeffizienten  $a$  und  $b$  transformieren sich also bei einer Koordinatendrehung wie die Koordinaten  $x$  und  $y$ .

Die Koordinatentransformation für eine Translation interessiert uns hier nicht, weil sich diese auf die  $\xi, \eta$  und später die  $x, y$  und  $X, Y$  nicht geltend macht.

Man findet nun elementar:

$$a_h^k \xi_k + b_h^k \eta_k = a_h^{k'} \xi_{k'} + b_h^{k'} \eta_{k'}$$

d. h.

$a_h^k \xi_k + b_h^k \eta_k$  ist invariant in bezug auf eine Koordinatendrehung.

Da ohne weiteres erkannt wird, daß  $f_h$  invariant auf Drehung ist, so finden wir aus (1), daß  $v_h$  invariant auf Drehung ist, was man auch leicht direkt erkennt.

Wir wählen einen dem Punkt  $P(x_k, y_k)$  (ausgeglichener Punkt) benachbarten Punkt  $P(x_k, y_k)$ . Dann gilt:

$$(2) \quad p_h \left( V_h = a_h^1 \xi_1 + b_h^1 \eta_1 + \dots + a_h^k x_k + b_h^k y_k + \dots + a_h^u \xi_u + b_h^u \eta_u + f_h \right)$$

$V_h$  ist natürlich ebenfalls invariant auf Drehung.

Wir multiplizieren die Fehlergleichungen (1) mit der Gauß'schen Multiplikation  $a_h^k$ , die die  $2u$  Bedingungen erfüllen:

$$[a^1 a^k] = 0; [b^1 a^k] = 0 \dots [a^k a^k] = +1; [b^k a^k] = 0$$

*ad*  $[a^u a^k] = 0; [b^u a^k] = 0$

Damit erhält man:

$$[a^k v] = \xi_k + [a^k f]$$

Wenn  $[p v v] = \text{Minimum}$  ist, so ist bekanntlich

$$(3 \text{ a}) \quad [a^k v] = 0.$$

so daß

$$(4 \text{ a}) \quad \xi_k + [a^k f] = 0$$

Ein zweites Mal verwenden wir die Multiplikatoren  $\beta_h^k$ , die die  $2u$  Bedingungen erfüllen:

$$[a^1 \beta^k] = 0; [b^1 \beta^k] = 0 \dots [a^k \beta^k] = 0, [b^k \beta^k] = +1$$

$$[a^u \beta^k] = 0; [b^u \beta^k] = 0$$

Dann ist für das ausgeglichene System

$$(3 \text{ b}) \quad [\beta^k v] = 0 \text{ und wir erhalten}$$

$$(4 \text{ b}) \quad \eta_k + [\beta^k f] = 0$$

Wenden wir die Multiplikatoren  $\alpha_h^k$  und  $\beta_h^k$  auf die Gleichungen (2) für die  $V_k$  an, so finden wir:

$$(5 a) \quad [\alpha^k V] = \mathfrak{x}_k + [\alpha^k f]$$

$$(5 b) \quad [\beta^k V] = \mathfrak{y}_k + [\beta^k f]$$

Nun wählen wir  $P(x_k, y_k)$  als neuen Koordinatennullpunkt und setzen

$$X_k = \mathfrak{x}_k - \xi_k; \quad Y_k = \mathfrak{y}_k - \eta_k$$

Damit folgt aus (3), (4) und (5)

$$(6 a) \quad X_k = [\alpha^k V]$$

$$(6 b) \quad Y_k = [\beta^k V]$$

Für die  $X_k$  und  $Y_k$  gelten die Transformationsformeln für eine Drehung des Koordinatensystems um  $\varepsilon$

$$X_{k'} = X_k \cos \varepsilon + Y_k \sin \varepsilon$$

$$Y_{k'} = -X_k \sin \varepsilon + Y_k \cos \varepsilon$$

Da die  $V$ , wie schon erkannt, gegen Drehung invariant sind, so finden wir aus

$$X_{k'} = X_k \cos \varepsilon + Y_k \sin \varepsilon = [\alpha^k V] \cos \varepsilon + [\beta^k V] \sin \varepsilon = [\alpha^{k'} V]$$

$$Y_{k'} = -X_k \sin \varepsilon + Y_k \cos \varepsilon = -[\alpha^k V] \sin \varepsilon + [\beta^k V] \cos \varepsilon = [\beta^{k'} V]$$

$$(7 a) \quad \alpha_h^{k'} = \alpha_h^k \cos \varepsilon + \beta_h^k \sin \varepsilon$$

$$(7 b) \quad \beta_h^{k'} = -\alpha_h^k \sin \varepsilon + \beta_h^k \cos \varepsilon$$

D. h. die  $\alpha$  und  $\beta$  transformieren sich bei einer Koordinatendrehung wie die  $x$  und  $y$ .

Aus (7) erhalten wir:

$$(8a) \quad \left[ \frac{\alpha^{k'} \alpha^{k'}}{p} \right]_{\varepsilon} = \left[ \frac{\alpha^k \alpha^k}{p} \right] \cos^2 \varepsilon + 2 \left[ \frac{\alpha^k \beta^k}{p} \right] \sin \varepsilon \cos \varepsilon + \left[ \frac{\beta^k \beta^k}{p} \right] \sin^2 \varepsilon$$

$$(8b) \quad \left[ \frac{\beta^{k'} \beta^{k'}}{p} \right]_{\varepsilon} = \left[ \frac{\alpha^k \alpha^k}{p} \right] \sin^2 \varepsilon - 2 \left[ \frac{\alpha^k \beta^k}{p} \right] \sin \varepsilon \cos \varepsilon + \left[ \frac{\beta^k \beta^k}{p} \right] \cos^2 \varepsilon$$

$$(8c) \quad \left[ \frac{\alpha^{k'} \beta^{k'}}{p} \right]_{\varepsilon} = - \left[ \frac{\alpha^k \alpha^k}{p} \right] \sin \varepsilon \cos \varepsilon + \left[ \frac{\alpha^k \beta^k}{p} \right] (\cos^2 \varepsilon - \sin^2 \varepsilon) + \\ + \left[ \frac{\beta^k \beta^k}{p} \right] \sin \varepsilon \cos \varepsilon$$

Die  $\left[ \frac{\alpha^k \alpha^k}{p} \right]$ ,  $\left[ \frac{\alpha^k \beta^k}{p} \right]$  und  $\left[ \frac{\beta^k \beta^k}{p} \right]$  sind die Gewichtskoeffizien-

ten, die sich aus den Normalgleichungen für die Unbekannten  $\xi_1, \eta_1, \dots, \xi_k, \eta_k, \dots, \xi_u, \eta_u$  mit Hilfe der Gewichtsgleichungen ergeben, in denen die Absolutglieder resp. durch

$$\begin{array}{cccc} -1, 0, \dots & 0, 0 & \dots & 0, 0 \\ 0, -1, \dots & 0, 0 & \dots & 0, 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0, 0 & \dots & -1, 0 & \dots & 0, 0 \\ 0, 0 & \dots & 0, -1 & \dots & 0, 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0, 0 & \dots & 0, 0 & \dots & -1, 0 \\ 0, 0 & & 0, 0 & & 0, -1 \end{array}$$

ersetzt sind.

Nun ist bekanntlich

$$(9 \text{ a}) \quad m^2 x_k = m^2 \left[ \frac{\alpha^k \alpha^k}{p} \right]$$

$$(9 \text{ b}) \quad m^2 y_k = m^2 \left[ \frac{\beta^k \beta^k}{p} \right]$$

wo  $m$  der mittlere Fehler der Gewichtseinheit ist.

Ebenso ist natürlich:

$$(10 \text{ a}) \quad m^2 x'_k = m^2 \left[ \frac{\alpha^{k'} \alpha^{k'}}{p} \right] \varepsilon$$

$$(10 \text{ b}) \quad m^2 y'_k = m^2 \left[ \frac{\beta^{k'} \beta^{k'}}{p} \right] \varepsilon$$

Wir finden durch Einsetzen von (8 a) und (8 b) in (10 a) und (10 b):

$$(11) \quad m^2 x'_k = m^2 \left\{ \left[ \frac{\alpha^k \alpha^k}{p} \right] \cos^2 \varepsilon + 2 \left[ \frac{\alpha^k \beta^k}{p} \right] \sin \varepsilon \cos \varepsilon + \left[ \frac{\beta^k \beta^k}{p} \right] \sin^2 \varepsilon \right\}$$

Dieses  $m^2 x'_k$  wird ein Extremum, wenn

$$\frac{d m^2 x'_k}{d \varepsilon} = 0$$

Das liefert, wenn die Werte von  $\varepsilon$ , für die  $m^2 x'_k$  ein Extremum ist, mit  $\omega$  bezeichnet werden

$$- \left( \left[ \frac{\alpha^k \alpha^k}{p} \right] - \left[ \frac{\beta^k \beta^k}{p} \right] \right) \sin 2 \omega + 2 \left[ \frac{\alpha^k \beta^k}{p} \right] \cos 2 \omega = 0$$

oder

$$(12) \quad \underline{\underline{\text{tg } 2 \omega = \frac{2 \left[ \frac{\alpha^k \beta^k}{p} \right]}{\left[ \frac{\alpha^k \alpha^k}{p} \right] - \left[ \frac{\beta^k \beta^k}{p} \right]}}}$$

Der Wert von  $\omega$ , der zum Maximum von  $m^2 x'_k$  führt, werde mit  $\omega_1$  bezeichnet. Für ihn stimmt das Vorzeichen von  $\sin 2 \omega_1$  mit demjenigen von  $\left[ \frac{\alpha^k \beta^k}{p} \right]$  überein. Damit ist  $\omega_1$  eindeutig bestimmt.

Bezeichnen wir das Maximum von  $m^2 x'_k$  mit  $A^2_k$ , das Minimum mit  $B^2_k$ , so ist:

$$(13 a) \quad A^2_k = m^2 \left\{ \left[ \frac{\alpha^k \alpha^k}{p} \right] \cos^2 \omega_1 + 2 \left[ \frac{\alpha^k \beta^k}{p} \right] \sin \omega_1 \cos \omega_1 + \right. \\ \left. + \left[ \frac{\beta^k \beta^k}{p} \right] \sin^2 \omega_1 \right\}$$

$$(13 b) \quad B^2_k = m^2 \left\{ \left[ \frac{\alpha^k \alpha^k}{p} \right] \cos^2 \omega_2 + 2 \left[ \frac{\alpha^k \beta^k}{p} \right] \sin \omega_2 \cos \omega_2 + \right. \\ \left. + \left[ \frac{\beta^k \beta^k}{p} \right] \sin^2 \omega_2 \right\}$$

oder da

$$\omega_2 = \omega_1 + \frac{\pi}{2}$$

$$(13 c) \quad B^2_k = m^2 \left\{ \left[ \frac{\alpha^k \alpha^k}{p} \right] \sin^2 \omega_1 - 2 \left[ \frac{\alpha^k \beta^k}{p} \right] \sin \omega_1 \cos \omega_1 + \right. \\ \left. + \left[ \frac{\beta^k \beta^k}{p} \right] \cos^2 \omega_1 \right\}$$

Durch einfache Umformungen erhalten wir auch die Gleichungen:

$$A^2_k = m^2 \left\{ \left[ \frac{\alpha^k \alpha^k}{p} \right] + \left[ \frac{\alpha^k \beta^k}{p} \right] \operatorname{tg} \omega_1 \right\} = m^2 \left\{ \left[ \frac{\beta^k \beta^k}{p} \right] + \left[ \frac{\alpha^k \beta^k}{p} \right] \operatorname{cotg} \omega_1 \right\}$$

$$B^2_k = m^2 \left\{ \left[ \frac{\alpha^k \alpha^k}{p} \right] - \left[ \frac{\alpha^k \beta^k}{p} \right] \operatorname{cotg} \omega_1 \right\} = m^2 \left\{ \left[ \frac{\beta^k \beta^k}{p} \right] - \left[ \frac{\alpha^k \beta^k}{p} \right] \operatorname{tg} \omega_1 \right\}$$

Ganz leicht findet man aus den Formeln (13 a), (13 c) und (11) die Gleichung:

$$(14) \quad \underline{\underline{m^2 x_k = A^2_k \cos^2 \omega_1 + B^2_k \sin^2 \omega_1}} \quad \checkmark$$

$A_k$  und  $B_k$  sind die große und die kleine Halbachse der sogenannten *mittleren Fehlerellipse*. (14) stellt die Gleichung der sogenannten „Fußpunktcurve“ der mittleren Fehlerellipse dar.

Man beweist leicht, daß die Achsrichtungen dieser mittleren Fehlerellipse in bezug auf das Triangulationsnetz feste Richtungen sind, unabhängig von dem für die Ausgleichung verwendeten Koordinatensystem, indem man findet:

$$\operatorname{tg} (2 \omega_1') = \frac{2 \left[ \frac{\alpha^{k'} \beta^{k'}}{p} \right] \varepsilon}{\left[ \frac{\alpha^{k'} \alpha^{k'}}{p} \right] \varepsilon - \left[ \frac{\beta^{k'} \beta^{k'}}{p} \right] \varepsilon} = \operatorname{tg} 2 (\omega_1 - \varepsilon) \quad \checkmark$$

Somit ist

$$\omega_1' = \omega_1 - \varepsilon$$

womit die obige Behauptung bewiesen ist.

Ferner findet man, daß sich die Halbachsen der mittleren Fehlerellipse in jedem Koordinatensystem gleich ergeben, indem

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\alpha^{k'} \alpha^{k'}}{p} \right]_{\varepsilon} \cos^2 (\omega_1 - \varepsilon) + 2 \left[ \frac{\alpha^{k'} \beta^{k'}}{p} \right]_{\varepsilon} \sin (\omega_1 - \varepsilon) \cos (\omega_1 - \varepsilon) + \\ & + \left[ \frac{\beta^{k'} \beta^{k'}}{p} \right]_{\varepsilon} \sin^2 (\omega_1 - \varepsilon) = \left[ \frac{\alpha^k \alpha^k}{p} \right] \cos^2 \omega_1 + 2 \left[ \frac{\alpha^k \beta^k}{p} \right] \sin \omega_1 \cos \omega_1 + \\ & + \left[ \frac{\beta^k \beta^k}{p} \right] \sin^2 \omega_1, \text{ wenn man für } \left[ \frac{\alpha^{k'} \alpha^{k'}}{p} \right]_{\varepsilon}, \left[ \frac{\alpha^{k'} \beta^{k'}}{p} \right]_{\varepsilon} \text{ und } \left[ \frac{\beta^{k'} \beta^{k'}}{p} \right]_{\varepsilon} \end{aligned}$$

die Ausdrücke (8) einsetzt.

Damit haben wir die Fehlerellipse für den Punkt  $P(x_k, y_k)$  abgeleitet und die gestellte Aufgabe ist gelöst, soweit es sich um vermittelnde Koordinatenausgleichung handelt.

#### b) *Bedingte Triangulationsausgleichung.*

Man erkennt ohne weiteres, daß die Bedingungsgleichungen, die in Dreiecksnetzen auftreten, invariant in bezug auf die Drehung des Koordinatensystems sind, da sie stets ohne Benutzung eines Koordinatensystems aufgestellt werden können. Wenn man praktisch die Bedingung des Zusammenschlusses eines Kranzsystems oft unter Zuhilfenahme von Koordinaten aufstellt, so geschieht dies nur aus Bequemlichkeit. Die Bedingung existiert unabhängig von irgendwelchem Koordinatensystem.

Demgemäß sind auch die Verbesserungsbedingungsgleichungen invariant in bezug auf Koordinatendrehung. Da die Verbesserungen  $v$  invariant sind, so sind es also auch die Koeffizienten der  $v$  in diesen Verbesserungsbedingungsgleichungen, denen wir die Form geben:

$$\begin{aligned} & a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_i v_i + \dots + a_n v_n + w_1 = 0 \\ (15) \quad & b_1 v_1 + b_2 v_2 + \dots + b_i v_i + \dots + b_n v_n + w_2 = 0 \\ & c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_i v_i + \dots + c_n v_n + w_3 = 0 \end{aligned}$$

Wir wollen jetzt ein rechtwinkliges Koordinatensystem einführen. Als Ursprung wählen wir den einen der beiden Punkte, auf die wir das Netz beziehen. Die Richtung nach dem zweiten Bezugspunkt wählen wir zunächst als  $+x$ -Achse.

Wir berechnen aus der Ursprungsseite die Distanz vom Ursprung bis zum  $k$ ten Punkt ( $S_k$ ), was sich unter Mitnahme geeigneter Winkel leicht durchführen läßt. Ferner drücken wir den Winkel der Geraden  $OK$  mit der  $+x$ -Achse aus ( $v_k$ ). Dann ist:

$$(15 \text{ a}) \quad x_k = S_k \cos v_k$$

$$(15 \text{ b}) \quad y_k = S_k \sin v_k$$



Wir bezeichnen:

$$\frac{\partial x_k}{\partial l_i} = \varphi_i^x; \quad \frac{\partial y_k}{\partial l_i} = \varphi_i^y$$

Wenn das Gewicht der  $i$ -ten Beobachtung mit  $p_i$  bezeichnet wird, so ist bekanntlich (siehe *F. R. Helmert, Ausgleichungsrechnung, Leipzig 1907, SS. 246 und 247*):

$$(16 \text{ a}) \quad m^2 x_k = m^2 \left[ \frac{\varphi^x \varphi^x}{p} - \frac{\left[ \frac{a \varphi^x}{p} \right]^2}{\left[ \frac{aa}{p} \right]} - \frac{\left[ \frac{b \varphi^x}{p} \cdot 1 \right]^2}{\left[ \frac{bb}{p} \cdot 1 \right]} - \frac{\left[ \frac{c \varphi^x}{p} \cdot 2 \right]^2}{\left[ \frac{cc}{p} \cdot 2 \right]} \right]$$

$$(16 \text{ b}) \quad m^2 y_k = m^2 \left[ \frac{\varphi^y \varphi^y}{p} - \frac{\left[ \frac{a \varphi^y}{p} \right]^2}{\left[ \frac{aa}{p} \right]} - \frac{\left[ \frac{b \varphi^y}{p} \cdot 1 \right]^2}{\left[ \frac{bb}{p} \cdot 1 \right]} - \frac{\left[ \frac{c \varphi^y}{p} \cdot 2 \right]^2}{\left[ \frac{cc}{p} \cdot 2 \right]} \right]$$

Dabei stellt  $m$  den mittleren Fehler der Gewichtseinheit dar.

Wir drehen nun das Koordinatensystem um den Ursprung  $O$  um einen Winkel  $\varepsilon$  in positivem Sinne. Die Koordinaten des Punktes  $K$  in dem neuen System bezeichnen wir mit  $x'_k$  und  $y'_k$ .

Es gelten dann die Gleichungen

$$(17 \text{ a}) \quad x'_k = x_k \cos \varepsilon + y_k \sin \varepsilon$$

$$(17 \text{ b}) \quad y'_k = -x_k \sin \varepsilon + y_k \cos \varepsilon$$

Um die mittleren Fehler von  $x'_k$  und  $y'_k$  zu bestimmen, haben wir die Größen

$$\frac{\partial x'_k}{\partial l_i} = \varphi_i^{x'}; \quad \frac{\partial y'_k}{\partial l_i} = \varphi_i^{y'}$$

zu ermitteln. Es ist:

$$(18) \quad \varphi_i^{x'} = \frac{\partial x'_k}{\partial l_i} = \frac{\partial x_k}{\partial l_i} \cos \varepsilon + \frac{\partial y_k}{\partial l_i} \sin \varepsilon = \varphi_i^x \cos \varepsilon + \varphi_i^y \sin \varepsilon$$

$$(19) \quad \varphi_i^{y'} = \frac{\partial y'_k}{\partial l_i} = -\frac{\partial x_k}{\partial l_i} \sin \varepsilon + \frac{\partial y_k}{\partial l_i} \cos \varepsilon = -\varphi_i^x \sin \varepsilon + \varphi_i^y \cos \varepsilon$$

Nun ist aber

$$(20) \quad m^2 x'_k = m^2 \left\{ \frac{\varphi^{x'} \varphi^{x'}}{p} - \frac{\left[ \frac{a \varphi^{x'}}{p} \right]^2}{\left[ \frac{aa}{p} \right]} - \frac{\left[ \frac{b \varphi^{x'}}{p} \cdot 1 \right]^2}{\left[ \frac{bb}{p} \cdot 1 \right]} - \frac{\left[ \frac{c \varphi^{x'}}{p} \cdot 2 \right]^2}{\left[ \frac{cc}{p} \cdot 2 \right]} \right\}$$

Aus (18) folgt:

$$(21) \quad \left[ \frac{\varphi^{x'} \varphi^{x'}}{p} \right] = \left[ \frac{\varphi^x \varphi^x}{p} \right] \cos^2 \varepsilon + \left[ \frac{\varphi^y \varphi^y}{p} \right] \sin^2 \varepsilon + 2 \left[ \frac{\varphi^x \varphi^y}{p} \right] \sin \varepsilon \cos \varepsilon$$

Leicht erkennt man auch die Richtigkeit der folgenden Formeln:

$$(22) \quad \frac{\left[ \frac{a\varphi x'}{p} \right]^2}{\left[ \frac{aa}{p} \right]} = \frac{\left[ \frac{a\varphi x}{p} \right]^2}{\left[ \frac{aa}{p} \right]} \cos^2 \varepsilon + \frac{\left[ \frac{a\varphi y}{p} \right]^2}{\left[ \frac{aa}{p} \right]} \sin^2 \varepsilon + 2 \frac{\left[ \frac{a\varphi x}{p} \right] \left[ \frac{a\varphi y}{p} \right]}{\left[ \frac{aa}{p} \right]} \sin \varepsilon \cos \varepsilon$$

$$(23) \quad \frac{\left[ \frac{b\varphi x' \cdot 1}{p} \right]^2}{\left[ \frac{bb \cdot 1}{p} \right]} = \frac{\left[ \frac{b\varphi x \cdot 1}{p} \right]^2}{\left[ \frac{bb \cdot 1}{p} \right]} \cos^2 \varepsilon + \frac{\left[ \frac{b\varphi y \cdot 1}{p} \right]^2}{\left[ \frac{bb \cdot 1}{p} \right]} \sin^2 \varepsilon + \\ + 2 \frac{\left[ \frac{b\varphi x \cdot 1}{p} \right] \left[ \frac{b\varphi y \cdot 2}{p} \right]}{\left[ \frac{bb \cdot 1}{p} \right]} \sin \varepsilon \cos \varepsilon$$

$$(24) \quad \frac{\left[ \frac{c\varphi x' \cdot 2}{p} \right]^2}{\left[ \frac{cc \cdot 2}{p} \right]} = \frac{\left[ \frac{c\varphi x \cdot 2}{p} \right]^2}{\left[ \frac{cc \cdot 2}{p} \right]} \cos^2 \varepsilon + \frac{\left[ \frac{c\varphi y \cdot 2}{p} \right]^2}{\left[ \frac{cc \cdot 2}{p} \right]} \sin^2 \varepsilon + \\ + 2 \frac{\left[ \frac{c\varphi x \cdot 2}{p} \right] \left[ \frac{c\varphi y \cdot 2}{p} \right]}{\left[ \frac{cc \cdot 2}{p} \right]} \sin \varepsilon \cos \varepsilon$$

Wir führen die abkürzenden Bezeichnungen ein:

$$(25 \text{ a}) \quad Q_{11} = \left[ \frac{\varphi^x \varphi^x}{p} \right] - \frac{\left[ \frac{a \varphi^x}{p} \right]^2}{\left[ \frac{aa}{p} \right]} - \frac{\left[ \frac{b \varphi^x \cdot 1}{p} \right]^2}{\left[ \frac{bb \cdot 1}{p} \right]} - \frac{\left[ \frac{c \varphi^x \cdot 2}{p} \right]^2}{\left[ \frac{cc \cdot 2}{p} \right]}$$

$$(25 \text{ b}) \quad Q_{22} = \left[ \frac{\varphi^y \varphi^y}{p} \right] - \frac{\left[ \frac{a \varphi^y}{p} \right]^2}{\left[ \frac{aa}{p} \right]} - \frac{\left[ \frac{b \varphi^y \cdot 1}{p} \right]^2}{\left[ \frac{bb \cdot 1}{p} \right]} - \frac{\left[ \frac{c \varphi^y \cdot 2}{p} \right]^2}{\left[ \frac{cc \cdot 2}{p} \right]}$$

$$(25 \text{ c}) \quad Q_{12} = \left[ \frac{\varphi^x \varphi^y}{p} \right] - \frac{\left[ \frac{a \varphi^x}{p} \right] \left[ \frac{a \varphi^y}{p} \right]}{\left[ \frac{aa}{p} \right]} - \frac{\left[ \frac{b \varphi^x \cdot 1}{p} \right] \left[ \frac{b \varphi^y \cdot 1}{p} \right]}{\left[ \frac{bb \cdot 1}{p} \right]} - \\ - \frac{\left[ \frac{c \varphi^x \cdot 2}{p} \right] \left[ \frac{c \varphi^y \cdot 2}{p} \right]}{\left[ \frac{cc \cdot 2}{p} \right]}$$

Damit erhalten wir aus den Gleichungen (20) bis (24)

$$(26) \quad m^2 x'_k = m^2 \{ Q_{11} \cos^2 \varepsilon + Q_{22} \sin^2 \varepsilon + 2 Q_{12} \sin \varepsilon \cos \varepsilon \}$$

Auch hier können wir die Werte von  $\varepsilon$  bestimmen, für die  $m^2 x'_k$  ein Extremum wird.

Ganz analog zu der entsprechenden Betrachtung bei der vermittelnden Ausgleichung finden wir, wenn wir den Wert von  $\varepsilon$  für den  $m^2 x'_k$  ein Maximum wird, mit  $\omega_1$ , den Wert für den es ein Minimum wird, mit  $\omega_2$  bezeichnen:

$$(27) \quad \operatorname{tg} 2 \omega = \frac{2 Q_{12}}{Q_{11} - Q_{22}}$$

Das Vorzeichen von  $\sin 2 \omega_1$  stimmt mit dem Vorzeichen von  $Q_{12}$  überein.

Ist wieder  $A^2_k$  das Maximum von  $m^2 x'_k$ ,  $B^2_k$  das Minimum von  $m^2 x'_k$ , so finden wir aus den Formeln (20) bis (24)

$$(28 \text{ a}) \quad A^2_k = m^2 \{ Q_{11} \cos^2 \omega_1 + Q_{22} \sin^2 \omega_1 + 2 Q_{12} \sin \omega_1 \cos \omega_1 \}$$

$$(28 \text{ b}) \quad B^2_k = m^2 \{ Q_{11} \cos^2 \omega_2 + Q_{22} \sin^2 \omega_2 + 2 Q_{12} \sin \omega_2 \cos \omega_2 \}$$

oder da

$$\omega_2 = \omega_1 + \frac{\pi}{2}$$

$$(28 \text{ c}) \quad B^2_k = m^2 \{ Q_{11} \sin^2 \omega_1 + Q_{22} \cos^2 \omega_1 - 2 Q_{12} \sin \omega_1 \cos \omega_1 \}$$

Durch einfache Umformung erhält man ferner:

$$A^2_k = m^2 \{ Q_{11} + Q_{12} \operatorname{tg} \omega_1 \} = m^2 \{ Q_{22} + Q_{12} \operatorname{cotg} \omega_1 \}$$

$$B^2_k = m^2 \{ Q_{11} - Q_{12} \operatorname{cotg} \omega_1 \} = m^2 \{ Q_{22} - Q_{12} \operatorname{tg} \omega_1 \}$$

Auch hier ist:

$$(29) \quad \underline{\underline{m^2 x_k = A^2_k \cos^2 \omega_1 + B^2_k \sin^2 \omega_1}}$$

und  $A_k$  und  $B_k$  sind die große und kleine Halbachse der mittleren Fehlerellipse.

Damit ist unsere Aufgabe auch für die bedingte Triangulationsausgleichung gelöst.