Zeitschrift: Schweizerische Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Revue technique suisse des mensurations et améliorations foncières

Herausgeber: Schweizerischer Geometerverein = Association suisse des géomètres

Band: 39 (1941)

Heft: 7

Artikel: Quelques caractéristiques du système de coordonnés bonne

Autor: Ansermet, A.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-199128

Quelques caractéristiques du Système de coordonnées Bonne

par *A. Ansermet*

Le système de coordonnées Bonne revêt encore une certaine importance puisqu'il est à la base de la cartographie suisse. A cet effet les plans d'ensemble sont en général munis d'un double quadrillage permettant de transformer les coordonnées géodésiques en coordonnées cartographiques et réciproquement.

Ce calcul ne présente pas un intérêt particulier tandis que l'étude des déformations révèle certaines propriétés assez inattendues; c'est ainsi que les formules qui donnent les réductions d'azimut en projection conforme s'appliquent aux coordonnées Bonne du moins dans des limites restreintes comme celles du territoire suisse.

On sait que dans un tel champ les déformations tant angulaires que linéaires s'expriment en valeur absolue par un produit de la forme:

$$K \cdot xy \cdot f(A)$$

où K est un coefficient et A l'azimut topographique (gisement) de la direction considérée. La fonction $f(A)$ est telle que

$$f(A) \leqq 1$$

Les hyperboles $\qquad xy = \text{const.}$
jouent donc le rôle d'isomètres pour des valeurs déterminées de A. Ces courbes servent à déterminer la position la plus favorable de l'origine des coordonnées.

Quant à la courbure d'un côté de triangulation elle est donnée par la formule générale

$$\frac{dA}{ds} = B_1 \sin^3 A + B_2 \sin^2 A \cos A + B_3 \sin A \cos^2 A + B_4 \cos^3 A$$

les coefficients $B_1\, B_2\, B_3\, B_4$ dépendant uniquement des coordonnées du point considéré; l'élément d'arc ds s'exprime par

$$ds = \frac{dx}{\sin A} = \frac{dy}{\cos A} \qquad \operatorname{tg} A = \frac{dx}{dy}$$

Cette formule de la courbure est dûe à C. M. Schols (Annales de l'Ecole Polytechnique de Delft, 1886, p. 179–230); elle se simplifie pour les coordonnées Bonne et devient

$$\frac{dA}{ds} = \frac{1}{R^2}\,(y \sin^3 A - x \cos^3 A)$$

en un point (xy), R désignant le rayon de la sphère. Le méridien central est un axe de symétrie de la projection.

En coordonnées conformes et pour un champ restreint également la courbure s'exprime par la formule

$$\frac{dA}{ds} = \frac{1}{R^2}\,(\beta' y \sin A - \alpha' x \cos A)$$

où $\alpha' = \dfrac{1-n}{2} \qquad \beta' = \dfrac{1+n}{2} \qquad \beta' - \alpha' = n \qquad \alpha' + \beta' = 1$

(voir Revue suisse des mensurations, juillet 1937). On peut donc poser

$$\beta' = \sin^2 A \quad \alpha' = \cos^2 A \text{ d'où } n = -\cos 2A$$

Pour le *calcul de la courbure et des réductions d'azimut* δ_1 et δ_2 *on peut assimiler les coordonnées Bonne à des coordonnées conformes à paramètre variable*

$$n = -\cos 2A$$

A chaque valeur de A correspond une isomètre

$$m - 1 = \frac{1}{R^2}(\alpha x^2 + \beta y^2)$$

où $\qquad \alpha = \dfrac{1-n}{4}, \quad \beta = \dfrac{1+n}{4}, \quad \dfrac{\beta}{\alpha} = \operatorname{tg}^2 A$

L'ensemble de ces courbes constitue un faisceau ponctuel circonscrit à un carré dont les diagonales sont des directions d'altération linéaire invariante (pour m donné).

La direction d'azimut A est elle-même parallèle à une des diagonales du rectangle construit sur les axes de l'isomètre; en comparant l'équation de cette courbe avec la forme classique

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

On a: $\qquad a^2 = \dfrac{(m-1)\,R^2}{\alpha} \qquad\qquad b^2 = \dfrac{(m-1)\,R^2}{\beta}$

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{\beta}{\alpha} = \operatorname{tg}^2 A. \qquad\qquad \operatorname{tg} A = \pm\frac{a}{b} = \pm\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$$

Ces diagonales sont les diamètres conjugés égaux de l'isomètre; nous verrons l'intérêt de cette propriété.

Quant à la transformée plane de la géodésique elle s'incurve donc comme indiqué ci-dessus, mais son allongement ne suit pas les lois de la projection conforme. En première approximation elle est assimilable à la parabole cubique utilisée pour les raccordements progressifs; l'origine de cette parabole est un point de courbure nulle

$$\frac{dA}{ds} = 0$$

Un tel point $(x_0\, y_0)$ est déterminé par la condition

$$\beta'\, y_0 \sin A - \alpha' \cdot x_0 \cdot \cos A = 0$$

Le lieu des points $(x_0\, y_0)$ est une droite passant par l'origine des coordonnées (pour A = const.).

La transformée plane de tout côté du réseau issu d'un tel point $(x_0\, y_0)$ est caractérisée par des réductions d'azimut δ_1 et δ_2 proportionnelles respectivement à la courbure au premier et au second tiers du côté; dans le cas particulier on a donc: $|\delta_2| = |2\,\delta_1|$.

Au point $(x_0\, y_0)$ le côté est normal à l'isomètre de paramètre $n =$ — $\cos 2\,A$ passant par ce point. On vérifie aisément que la condition: $\beta'\, y_0 \sin A - \alpha'\, x_0 \cos A = 0$

$$\text{où} \quad \operatorname{tg} A = \frac{\alpha'\, x_0}{\beta'\, y_0}$$

caractérise bien la normale à la courbe

$$m - 1 = \frac{1}{R^2}\,(\alpha x^2 + \beta y^2)$$

passant par $(x_0\, y_0)$ puisque

$$2\;\alpha x\, dx + 2\;\beta y\, dy = 0$$

$$\text{et} \qquad - \frac{dy}{dx} = \frac{\alpha'\, x_0}{\beta'\, y_0}$$

La valeur de A dépend uniquement du rapport $\dfrac{x_0}{y_0}$ et réciproquement

$$\operatorname{tg}^3 A = \frac{x_0}{y_0}$$

ce qui était évident puisque les isomètres de paramètre n sont semblables et sont coupées sous un angle constant par un vecteur issu de l'origine des coordonnées.

Les valeurs intéressantes du paramètre sont $n = \pm 1$ (côté parallèle à l'un des axes de coordonnées) et surtout $n = 0$ (côté parallèle à l'une des bissectrices des axes) car dans ces trois cas $|\,\delta_1\,| = |\,\delta_2\,|$

c'est-à-dire
$$\frac{dA}{ds} = \text{const.}$$

En effet d'une part les formules pour δ_1 et δ_2 ne diffèrent que par un terme de la forme $K \cdot n \cdot \sin A \cdot \cos A$, où K est un coefficient (voir article déjà cité R. S. M.) et d'autre part il n'y a pas de point $(x_0\, y_0)$ à courbure nulle à distance finie ce qui implique $\dfrac{dA}{ds} = \text{const.}$ pour la transformée plane.

Extrêmums. Faisons varier l'azimut A en un point $P_1\;(x_1\, y_1)$ et annulons la première dérivée

$$\sin A \cdot \cos A\,(y_1 \sin A + x_1 \cos A) = 0$$

les solutions $\sin A = 0$ ou $\cos A = 0$ correspondent aux valeurs $n = \pm 1$ du paramètre.

La troisième solution (minimum)

$$y_1 \sin A + x_1 \cos A = 0$$

$$\text{ou} \quad \operatorname{tg} A = - \frac{x_1}{y_1} = \frac{dx}{dy}$$

est intéressante

$$- \operatorname{tg}^2 A = - \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A} = - \frac{\beta}{\alpha} = - \frac{x_1^{\,2}}{y_1^{\,2}}$$

Or le rayon vecteur OP_1 issu de l'origine des coordonnées a pour azimut

$$\operatorname{tg} A' = \frac{x_1}{y_1}$$

d'où
$$\operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} A' = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{a^2}{b^2}$$

Les valeurs A et A' définissent des directions conjuguées par rapport à l'isomètre

$$m - 1 = \frac{1}{R^2}(\alpha x^2 + \beta y^2)$$

Ces directions sont parallèles aux diagonales du rectangle construit sur les axes de l'isomètre et on déduit des formules ci-dessus

$$A + A' = 180^0$$

La direction d'azimut topographique A est donc la tangente à l'isomètre en $(x_1\, y_1)$.

Cette même direction est de plus tangente à l'hyperbole

$$xy = x_1\, y_1$$

$$x\, dy + y\, dx = 0$$

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{x}{y} = -\frac{x_1}{y_1}$$

Le point P_1 $(x_1\, y_1)$ est donc le point de contact de l'isomètre et de l'hyperbole.

Parmi toutes les isomètres passant par le point P_1 $(x_1\, y_1)$ celle qui est tangente à l'hyperbole en ce point a une surface minimum. Cette propriété est facile à vérifier. Ces isomètres passant par le point P_1 $(x_1\, y_1)$ engendrent un faisceau ponctuel mais à coefficient m variable entre certaines limites (pour $n = \pm 1$).

Dans cette direction pour laquelle

$$y_1 \sin A + x_1 \cos A = 0$$

la courbure est donnée par l'expression plus simple

$$\frac{dA}{ds} = \frac{y_1}{R^2} \sin A = -\frac{x_1}{R^2} \cos A$$

Enfin pour une transformée plane telle que OP_1 passant par l'origine des coordonnées l'emploi de coordonnées polaires est indiqué

$$s_1 = \frac{y_1}{\cos A} = \frac{x_1}{\sin A}$$

$$\frac{dA}{ds} = \frac{s_1}{R^2}(\cos A \sin^3 A - \sin A \cos^3 A)$$

$$= \frac{s_1}{2\, R^2}\, n \cdot \sin 2\, A = -\frac{s_1}{4\, R^2} \sin 4\, A$$

Telles sont quelques déductions tirées du remarquable mémoire de C. M. Schols de 1886; elles méritaient semble-t-il de faire l'objet d'une note succincte pour notre organe professionnel.