Zeitschrift: Schweizerische Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Revue technique suisse des mensurations et améliorations foncières

Herausgeber: Schweizerischer Geometerverein = Association suisse des géomètres

Band: 39 (1941)

Heft: 8

Artikel: Calcul du relèvement par inversion

Autor: Bachmann, W.K.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-199130

Calcul du relèvement par inversion

par *W. K. Bachmann*, géomètre officiel, licencié ès sciences.

Le problème du relèvement (détermination des coordonnées provisoires) a déjà fait l'objet d'un grand nombre de publications; il semble au premier abord inutile de revenir sur cette question. Cependant, un examen plus détaillé montre que les méthodes indiquées jusqu'à présent donnent toutes lieu à des calculs relativement longs. En effet, si nous utilisons la méthode de Collins, nous devons calculer deux intersections, dont la première sert uniquement à déterminer le point de Collins, tandis que la seconde donne le point cherché. Un autre procédé se base sur une construction géométrique indiquée par Cassini. Il est avantageusement appliqué lorsqu'on utilise la machine à calculer; les calculs y relatifs sont cependant aussi assez longs étant donné que deux points auxiliaires doivent préalablement être déterminés. Une troisième méthode, fréquemment appliquée dans la pratique, est celle de Kästner. Cette dernière, ainsi que celle indiquée par Delambre sont également trop longues.

Il y a donc lieu de se demander si l'on ne pourrait pas diminuer dans une certaine mesure l'importance de ces calculs en introduisant au préalable une transformation géométrique appropriée. Le but envisagé peut être atteint très simplement en appliquant l'inversion ou bien la transformation conforme

(1) $$w = \frac{1}{z}$$

où

$$z = x + iy$$

$$w = \xi + i\eta.$$

On sait que cette dernière transformation se compose d'une inversion suivie d'une symétrie par rapport à l'axe réel.

Dans le but de faciliter la lecture de ce qui suit, j'indiquerai ci-après quelques propriétés de la transformation conforme sus-mentionnée.

1° *Rappel de quelques propriétés de la transformation* (1).

Posons
$$z = x + iy = r \cdot e^{i\varphi}$$
$$w = \xi + i\eta = R \cdot e^{i\phi};$$
la relation (1) nous donne
$$Re^{i\phi} = \frac{1}{r}\, e^{-i\varphi}.$$

Au point p de rayon vecteur r et d'argument $+\varphi$ correspond ainsi le point image P de rayon vecteur $R = \frac{1}{r}$ et d'argument $-\varphi$ (voir fig. 1). Nous voyons ainsi que la transformation considérée consiste bien en une inversion par rapport au cercle unité ayant son centre à l'origine,

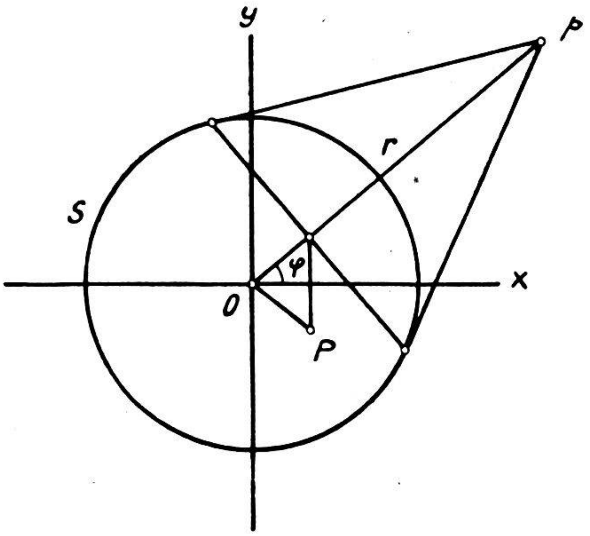

Fig. 1.

et en une symétrie par rapport à l'axe réel. Le résultat indiqué plus haut est ainsi confirmé.

Notons en passant que la transformation (1) est un cas particulier de

$$(2) \qquad w = \frac{a \cdot z + b}{c \cdot z + d}.$$

Cette dernière projection joue un rôle très important dans la théorie des fonctions. On montre du reste facilement que la transformation (2) peut être décomposée en une inversion, une rotation et une symétrie. L'importance de (2) résulte du fait que les cercles et les droites du plan des z sont transformés en cercles et droites. Etant donné que la relation (2) ne nous intéressera pas directement par la suite, nous ne démontrerons la propriété énoncée que pour la transformation (1).

Dans le plan des z, une droite ou un cercle est représenté par une équation de la forme

$$(3) \qquad a \cdot z\bar{z} + b \cdot \bar{z} + \bar{b} \cdot \bar{z} + c = 0$$

où a et c sont des nombres réels, tandis que l'on a

$$z = x + iy \qquad b = b_1 + ib_2$$
$$\bar{z} = x - iy \qquad \bar{b} = b_1 - ib_2$$

En effet, la relation (3) peut s'écrire

$$a\,(x^2 + y^2) + (b_1 + ib_2)\,(x + iy) + (b_1 - ib_2)\,(x - iy) + c = 0$$
$$a\,(x^2 + y^2) + 2\,b_1 x - 2\,b_2 y + c = 0$$

et nous avons ainsi bien des cercles si $a \neq 0$, et des droites si $a = 0$.

Appliquons la transformation (1) à l'ensemble de courbes données par (3); nous obtenons

$$a \cdot \frac{1}{w \cdot \bar{w}} + \frac{b}{w} + \frac{\bar{b}}{\bar{w}} + c = 0$$

ou bien

$$(4) \qquad a + b \cdot \bar{w} + \bar{b} \cdot w + c \cdot w \cdot \bar{w} = 0.$$

En comparant les équations (3) et (4), nous constatons que les courbes transformées sont encore des droites et des cercles c. q. f. d. En particulier, nous remarquons que nous obtenons des droites lorsque $c = 0$, c'est-à-dire lorsque les droites et les cercles donnés par (3) passent par l'origine des coordonnées. Ainsi, tout cercle et toute droite passant par l'origine des coordonnées se transforme en une droite.

2° *Principe de la solution.*

Après ces explications préliminaires, nous allons indiquer le principe de la solution envisagée. Dans ce but, nous considérons la fig. 2. Soient P_0, P_1 et P_2 trois points donnés par leurs coordonnées. P est le point à déterminer, à partir duquel les deux angles α et β ont été mesurés. Considérons les deux cercles S_1 et S_2, passant respectivement par les points $P_0\ P_1\ P$ et $P_0\ P_2\ P$. Choisissons un nouveau système de coordonnées xy dans le plan de la figure en plaçant son origine en P_0. Le point P est caractérisé par le fait qu'il doit être situé à la fois sur les deux cercles S_1 et S_2. En appliquant la projection (1), les deux cercles S_1 et S_2 se transforment en deux droites. Soit Q le point d'intersection de ces dernières. En utilisant ensuite la transformation inverse $z = \frac{1}{w}$, le point Q se transforme en P, et nous trouvons ainsi le point cherché.

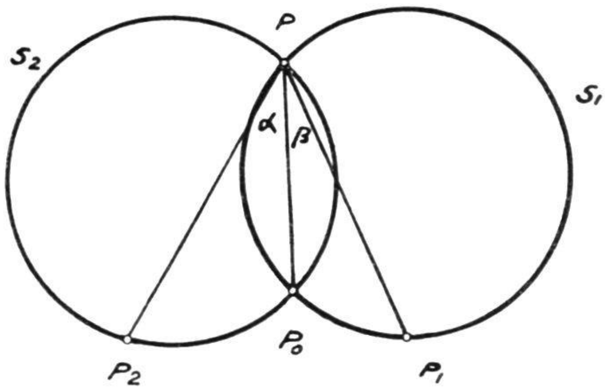

Fig. 2.

Nous constatons ainsi que le problème du relèvement a été ramené à celui de l'intersection.

3° *Etablissement des formules fondamentales.*

Développons maintenant la solution analytique du problème. Pour simplifier les calculs, nous choisissons les axes de coordonnées parallèles à ceux du système de projection du pays en question. Pour la Suisse, nous dirigeons donc l'axe des x vers le nord et l'axe des y vers l'est. Considérons le cercle S_1 circonscrit au triangle $P_0\,P_1\,P$ (voir fig. 3).

Déterminons premièrement les coordonnées de son centre C_1 en introduisant les désignations suivantes:

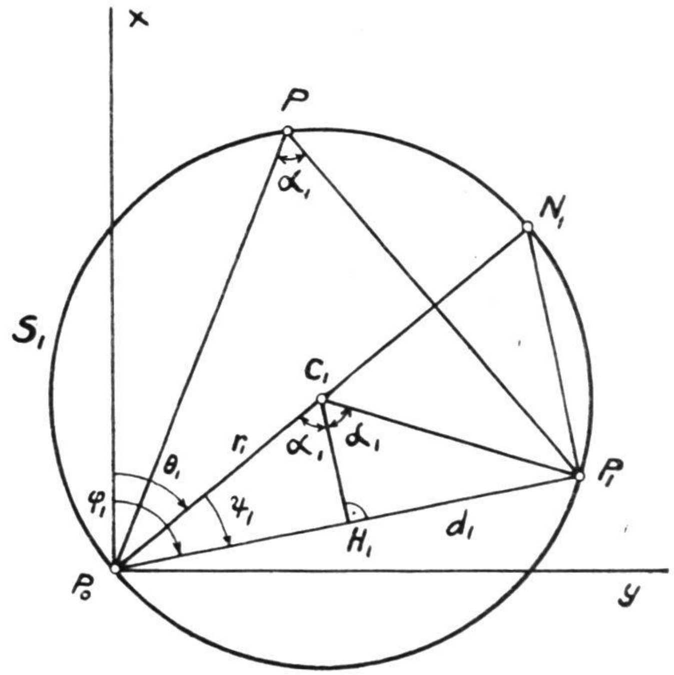

Fig. 3.

$$\overline{P_0 P_1} = d_1 \qquad \overline{P_0 C_1} = r_1$$

$$\sphericalangle (x P_0 P_1) = \varphi_1 \qquad \sphericalangle (x P_0 N_1) = \Theta_1 \qquad \sphericalangle (N_1 P_0 P_1) = \psi_1.$$

Remarquons que l'on a $\sphericalangle (P_0 C_1 P_1) = 2\,\alpha_1$ puisque $\sphericalangle (P_0 P P_1) = \alpha_1$. Nous trouvons en outre en considérant le triangle $(P_0 C_1 P_1)$:

$$2\,\psi_1 + 2\,\alpha_1 = \pi \quad \text{d'où} \quad \psi_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha_1.$$

A l'aide du triangle $(P_0 N_1 P_1)$, nous obtenons

$$\frac{d_1}{2\,r_1} = \sin \alpha_1 \qquad \text{d'où} \qquad r_1 = \frac{d_1}{2 \sin \alpha_1}$$

Les coordonnées du centre C_1 sont donc

$$C_1 \begin{cases} y_{C1} = r_1 \cdot \sin \Theta_1 \\ x_{C1} = r_1 \cdot \cos \Theta_1 \end{cases}$$

et l'équation du cercle S_1 est

$$(y - r_1 \cdot \sin \Theta_1)^2 + (x - r_1 \cdot \cos \Theta_1)^2 = r_1^2$$

ou bien en développant

$$(5) \qquad x^2 + y^2 - 2\,x \cdot r_1 \cdot \cos \Theta_1 - 2\,y \cdot r_1 \cdot \sin \Theta_1 = 0.$$

(A suivre.)

---

† Alberto Keller

Mercoledi, 28 maggio, dopo breve malattia, moriva a Bellinzona il Collega Alberto Keller, Aggiunto alla Direzione dell'Ufficio cantonale del Registro fondiario.

La repentina ed immatura dipartita dell'amato Collega, all'età di soli 44 anni, ha lasciato gli amici ed i colleghi che altamente ne stimavano le doti tecniche e morali, sgomenti.

Alberto Keller era uno di quegli uomini che bisogna amare: per la bonta genuina, per la signorilità spontanea dei tratti, per la gentilezza, la grande operosità, il reale valore, che la modestia vorrebbe nascondere: era di quegli uomini che quando partono lasciano un tale solco che si stenta a colmare. Noi che l'abbiamo potuto apprezzare, non lo dimenticheremo!

La morte di Alberto Keller fu grave sventura per la Sua Famiglia; per l'ufficio cantonale del Registro fondiario, al quale dedicò 15 anni di ammirevole attività, è una perdita ben dura.

Fu nel 1926 che entro in qualità di verificatore presso l'Ufficio cantonale del Registro fondiario. Egli era sceso alcuni anni prima nel Ticino con l'animo colmo di speranze, con il cuore e la mente aperti ai tanti problemi di questa terra ticinese, che ben presto per lui divenne luogo d'elezione e che seppe amare come si ama la terra natia.

All'Ufficio cantonale del Registro fondiario diede subito prova della Sua vasta competenza professionale, della sua solida preparazione matematica e delle preclari doti del suo carattere. Lavorava con costanza indefessa, con una coscienziosità e con uno zelo che destavano l'ammirazione in tutti coloro che l'avvicinavano.

Nel 1931 venne nominato Aggiunto alla Direzione dell'Ufficio.

Tracciare la Sua opera significa rifare la storia dei più importanti lavori catastali e di migliorie fondiarie eseguiti nel Cantone Ticino negli ultimi 10 anni. A tutti egli collaborò con la sua esperienza e con una