

Zeitschrift: Schweizerische Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik =
Revue technique suisse des mensurations et améliorations foncières

Herausgeber: Schweizerischer Geometerverein = Association suisse des géomètres

Band: 39 (1941)

Heft: 9

Artikel: Calcul du relèvement par inversion [fin]

Autor: Bachmann, W.K.

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-199131>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 09.03.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

SCHWEIZERISCHE
Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik

ORGAN DES SCHWEIZ. GEOMETERVEREINS

Offiz. Organ der Schweiz. Gesellschaft für Kulturtechnik / Offiz. Organ der Schweiz. Gesellschaft für Photogrammetrie

Revue technique suisse des mensurations et améliorations foncières

ORGANE DE LA SOCIÉTÉ SUISSE DES GÉOMÈTRES

Organe officiel de l'Association Suisse du Génie rural / Organe officiel de la Société Suisse de Photogrammétrie

Redaktion: Dr. h. c. C. F. BAESCHLIN, Professor, Zollikon (Zürich)

Redaktionsschluß: Am 1. jeden Monats

Expediton, Inseraten- und Abonnements-Annahme:

BUCHDRUCKEREI WINTERTHUR A.G., WINTERTHUR

<p style="text-align: center;">No. 9 • XXXIX. Jahrgang der „Schweizerischen Geometer-Zeitung“ Erscheinend am zweiten Dienstag jeden Monats 9. September 1941 Inserate: 50 Cts. per einspaltige Nonp.-Zeile</p>	<p style="text-align: center;">Abonnemente: Schweiz Fr. 12.—, Ausland Fr. 16.— jährlich Für Mitglieder der Schweiz. Gesellschaften für Kulturtechnik u. Photogrammetrie Fr. 9.— jährl. Unentgeltlich für Mitglieder des Schweiz. Geometervereins</p>
---	--

Calcul du relèvement par inversion

par *W. K. Bachmann*, géomètre officiel, licencié ès sciences.

(Fin)

Posons maintenant $z = x + iy$ et $\bar{z} = x - iy$, ce qui nous donne

$$x^2 + y^2 = z\bar{z} \quad 2x = z + \bar{z} \quad 2y = \frac{z - \bar{z}}{i} = -i(z - \bar{z})$$

et l'équation du cercle S_1 devient

$$z\bar{z} - (z + \bar{z}) r_1 \cdot \cos \Theta_1 + i(z - \bar{z}) r_1 \cdot \sin \Theta_1 = 0$$

ou bien

$$z\bar{z} - r_1 \cdot z \cdot (\cos \Theta_1 - i \sin \Theta_1) - r_1 \cdot \bar{z} (\cos \Theta_1 + i \sin \Theta_1) = 0$$

et en définitif

$$(6) \quad z\bar{z} - r_1 \cdot z \cdot e^{-i\Theta_1} - r_1 \cdot \bar{z} \cdot e^{+i\Theta_1} = 0.$$

En appliquant la transformation (1), l'équation (6) devient

$$\frac{1}{w \cdot \bar{w}} - \frac{r_1 e^{-i\Theta_1}}{w} - \frac{r_1 \cdot e^{+i\Theta_1}}{\bar{w}} = 0 \quad \text{ou bien}$$

$$1 - r_1 \cdot e^{-i\Theta_1} \cdot \bar{w} - r_1 \cdot e^{+i\Theta_1} \cdot w = 0.$$

En posant, comme plus haut $w = \xi + i\eta$ et $\bar{w} = \xi - i\eta$, nous trouvons la droite

$$d_1: 1 - 2 r_1 \cdot \cos \Theta_1 \cdot \xi + 2 r_1 \cdot \sin \Theta_1 \cdot \eta = 0.$$

L'interprétation géométrique de cette équation est immédiate et il me semble inutile de donner d'autres explications à ce sujet.

Ainsi, les cercles S_1 et S_2 ont pour transformées:

$$(7) \quad \begin{cases} d_1: 2r_1 \cdot \cos \theta_1 \cdot \xi - 2r_1 \cdot \sin \theta_1 \cdot \eta = 1 \\ d_2: 2r_2 \cdot \cos \theta_2 \cdot \xi - 2r_2 \cdot \sin \theta_2 \cdot \eta = 1. \end{cases}$$

Désignons le déterminant de ce système par Δ ; sa valeur est

$$\Delta = 4r_1 \cdot r_2 \cdot \begin{vmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 \end{vmatrix} = 4r_1 r_2 (\sin \theta_1 \cos \theta_2 - \cos \theta_1 \sin \theta_2)$$

ou bien

$$(8) \quad \Delta = 4r_1 r_2 \sin (\theta_1 - \theta_2).$$

La résolution du système (7) nous donne

$$\xi = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2r_1 \sin \theta_1 \\ 1 & -2r_2 \sin \theta_2 \end{vmatrix} = \frac{2}{\Delta} (r_1 \sin \theta_1 - r_2 \sin \theta_2)$$

$$\eta = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{vmatrix} 2r_1 \cos \theta_1 & 1 \\ 2r_2 \cos \theta_2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{2}{\Delta} (r_1 \cos \theta_1 - r_2 \cos \theta_2)$$

d'où finalement

$$(9) \quad \begin{cases} \xi = \frac{r_1 \sin \theta_1 - r_2 \sin \theta_2}{2r_1 r_2 \sin (\theta_1 - \theta_2)} \\ \eta = \frac{r_1 \cos \theta_1 - r_2 \cos \theta_2}{2r_1 r_2 \sin (\theta_1 - \theta_2)}. \end{cases}$$

Appliquons maintenant la transformation inverse $z = \frac{1}{w}$; on a

$$x + iy = \frac{1}{\xi + i\eta} = \frac{\xi - i\eta}{\xi^2 + \eta^2}$$

$$\xi^2 + \eta^2 = \frac{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 (\sin \theta_1 \sin \theta_2 + \cos \theta_1 \cos \theta_2)}{4r_1^2 r_2^2 \sin^2 (\theta_1 - \theta_2)}$$

$$\xi^2 + \eta^2 = \frac{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos (\theta_1 - \theta_2)}{4r_1^2 r_2^2 \sin^2 (\theta_1 - \theta_2)}$$

$$\xi - i\eta = \frac{(r_1 \sin \theta_1 - r_2 \sin \theta_2) - i(r_1 \cos \theta_1 - r_2 \cos \theta_2)}{2r_1 r_2 \sin (\theta_1 - \theta_2)}$$

$$x + iy = \frac{\xi - i\eta}{\xi^2 + \eta^2} = \frac{2r_1 r_2 \sin (\theta_1 - \theta_2)}{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos (\theta_1 - \theta_2)} \cdot \left\{ \dots \right. \\ \left. \cdot \left\{ (r_1 \sin \theta_1 - r_2 \sin \theta_2) - i(r_1 \cos \theta_1 - r_2 \cos \theta_2) \right\}, \right.$$

d'où, en séparant les parties imaginaire et réelle

$$(10) \quad \boxed{\begin{aligned} x &= \frac{2r_1 r_2 \sin (\theta_1 - \theta_2)}{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos (\theta_1 - \theta_2)} \cdot (r_1 \sin \theta_1 - r_2 \sin \theta_2) \\ y &= \frac{-2r_1 r_2 \sin (\theta_1 - \theta_2)}{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos (\theta_1 - \theta_2)} \cdot (r_1 \cos \theta_1 - r_2 \cos \theta_2). \end{aligned}}$$

4° Interprétation géométrique des relations (10).

Les relations (10) admettent une interprétation géométrique très simple; il suffit en effet d'introduire les centres $C_1(y_{C_1}, x_{C_1})$ et $C_2(y_{C_2}, x_{C_2})$ des deux cercles S_1 et S_2 (voir fig. 4).

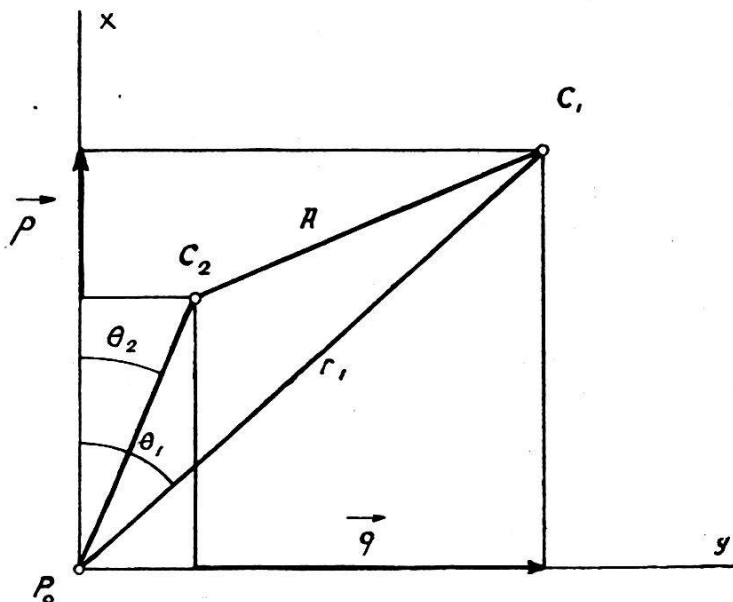


Fig. 4.

En désignant la distance $\overline{C_1 C_2}$ par R et la surface du triangle $(P_0 C_1 C_2)$ par S , nous avons

$$R^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2 r_1 r_2 \cos (\theta_1 - \theta_2)$$

$$4 S = 2 r_1 r_2 \sin (\theta_1 - \theta_2)$$

d'où
$$\frac{4 S}{R^2} = \frac{2 r_1 r_2 \sin (\theta_1 - \theta_2)}{r_1^2 + r_2^2 - 2 r_1 r_2 \cos (\theta_1 - \theta_2)}.$$

La surface S est naturellement prise avec son signe; elle peut être positive ou négative. Posons maintenant

$$(11) \quad \lambda = \frac{4 S}{R^2}.$$

Soient p et q les projections du vecteur $\overrightarrow{C_2 C_1}$ sur les axes de coordonnées; nous avons

$$(12) \quad \begin{cases} p = r_1 \cos \theta_1 - r_2 \cos \theta_2 \\ q = r_1 \sin \theta_1 - r_2 \sin \theta_2 \end{cases}$$

et les relations (10) peuvent alors s'écrire

$$(13) \quad \boxed{\begin{aligned} x &= \frac{4 S}{R^2} \cdot q \\ y &= -\frac{4 S}{R^2} \cdot p \end{aligned}}$$

où tous les éléments ont une signification géométrique.

Dans le but de faciliter les calculs numériques, nous allons introduire les coordonnées des centres C_1 et C_2 , ce qui nous donne

$$2 r_1 r_2 \sin (\Theta_1 - \Theta_2) = 2 (y_{C_1} x_{C_2} - x_{C_1} y_{C_2})$$

$$p = (x_{C_1} - x_{C_2})$$

$$q = (y_{C_1} - y_{C_2})$$

d'où les relations

$$(14) \quad \begin{cases} x = \frac{2 (y_{C_1} x_{C_2} - x_{C_1} y_{C_2})}{(y_{C_1} - y_{C_2})^2 + (x_{C_1} - x_{C_2})^2} \cdot (y_{C_1} - y_{C_2}) \\ y = \frac{-2 (y_{C_1} x_{C_2} - x_{C_1} y_{C_2})}{(y_{C_1} - y_{C_2})^2 + (x_{C_1} - x_{C_2})^2} \cdot (x_{C_1} - x_{C_2}) \end{cases}$$

5° Calculs numériques.

Dans ce qui précède, nous avons établi toutes les formules utiles pour le calcul numérique du relèvement. Afin d'en faciliter l'application, nous allons les résumer ici.

Soient α_1 et α_2 les deux angles mesurés. Il est essentiel d'introduire l'angle α_2 tel qu'il est indiqué à la fig. 5 et non pas l'angle $P_2 P P_0$; nous obtenons ainsi les mêmes formules pour la détermination des deux

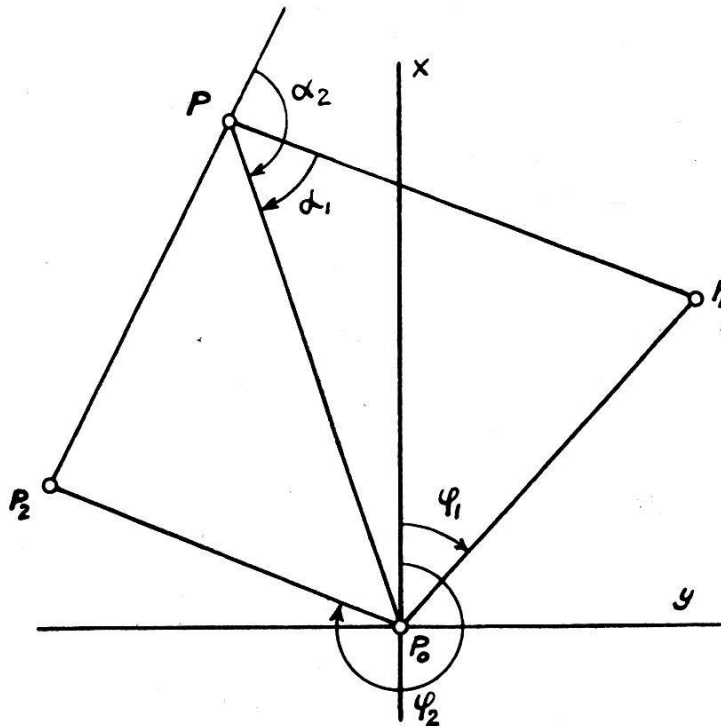


Fig. 5.

$P :$	y_P	\pm	$52\ 161.16$	x_P	\pm	$37\ 222.20$
$P_0 : 7$	Δy_0	—	689.37	Δx_0	—	624.81
$P_1 : 1$	y_0	—	$51\ 471.79$	x_0	+	$37\ 847.01$
$P_2 : 2$	y_1	—	$50\ 947.34$	x_1	—	$36\ 870.44$
	y_2	—	$51\ 729.30$	x_2	—	$38\ 394.39$
	$\Delta y_1 = y_1 - y_0$	+	524.45	$\Delta x_1 = x_1 - x_0$	+	976.57
	$\Delta y_2 = y_2 - y_0$	—	257.51	$\Delta x_2 = x_2 - x_0$	—	547.38

$$\begin{aligned}
 \text{tg } \varphi_1 &= \frac{\Delta y_1}{\Delta x_1} = +0.537033 & \varphi_1 &= 31^{\text{gr}} 37' 47'' & \text{tg } \varphi_2 &= \frac{\Delta y_2}{\Delta x_2} = +0.470441 & \varphi_2 &= 227^{\text{gr}} 99' 36'' \\
 \sin \alpha_1 &= +0.851259 & \alpha_1 &= 64^{\text{gr}} 83' 21'' & \sin \alpha_2 &= +0.463103 & \alpha_2 &= 169^{\text{gr}} 34' 72'' \\
 \Theta_1 &= \varphi_1 + \alpha_1 - 100^{\text{gr}} = 396^{\text{gr}} 20' 68'' & \Theta_2 &= \varphi_2 + \alpha_2 - 100^{\text{gr}} = 297^{\text{gr}} 34' 08'' \\
 \sin \varphi_1 &= +0.473123 & \sin \Theta_1 &= -0.059548 & \sin \varphi_2 &= -0.425688 & \sin \Theta_2 &= -0.999127 \\
 \cos \varphi_1 &= +0.880996 & \cos \Theta_1 &= +0.998225 & \cos \varphi_2 &= -0.904870 & \cos \Theta_2 &= -0.041758 \\
 d_1 &= \frac{\Delta y_1}{\sin \varphi_1} = \frac{\Delta x_1}{\cos \varphi_1} = \frac{1108.485}{1108.484} & d_2 &= \frac{\Delta y_2}{\sin \varphi_2} = \frac{\Delta x_2}{\cos \varphi_2} = \frac{604.926}{604.926} & & & & \\
 2r_1 &= \frac{d_1}{\sin \alpha_1} = 1302.170 & r_1 &= 651.085 & 2r_2 &= \frac{d_2}{\sin \alpha_2} = 1306.245 & r_2 &= 653.122 \\
 y_{C1} &= r_1 \cdot \sin \Theta_1 = -38.77 & y_{C2} &= r_2 \cdot \sin \Theta_2 = -652.55 \\
 x_{C1} &= r_1 \cdot \cos \Theta_1 = +649.93 & x_{C2} &= r_2 \cdot \cos \Theta_2 = -27.27 \\
 & & y_{C1} - y_{C2} &= +613.78 \\
 & & x_{C1} - x_{C2} &= +677.20 \\
 A &= y_{C1} x_{C2} - x_{C1} y_{C2} = +425\ 169.08 & B &= (y_{C1} - y_{C2})^2 + (x_{C1} - x_{C2})^2 = +835\ 325.73 \\
 \lambda &= 2 \cdot \frac{A}{B} = 2 \cdot 0.508986 = +1.01797 \\
 \Delta y_C &= -\lambda (x_{C1} - x_{C2}) = -689.37 & \Delta x_C &= +\lambda (y_{C1} - y_{C2}) = +624.81
 \end{aligned}$$

cercles C_1 et C_2 . Il est facile de voir pour quelle raison l'angle α_2 doit être introduit tel qu'il est indiqué à la figure 5. L'angle ψ (voir fig. 3) peut en effet être positif ou négatif. Il est facile d'établir une règle y relative. En effet, soit $\overline{P_o P_a}$ le côté pour lequel nous voulons déterminer le cercle S_a . Considérons le vecteur $\overrightarrow{P_o P_a}$. A l'aide d'une figure, la position approchée du point P peut être déterminée ainsi que la position approchée du centre C_a de S_a . Nous obtenons alors la règle suivante:

Si le centre C_a est situé à gauche du vecteur $\overrightarrow{P_o P_a}$, nous prenons pour α l'angle intérieur du triangle $P_o P P_a$ en P ; dans le cas où le centre est situé à droite du vecteur $\overrightarrow{P_o P_a}$, nous prenons l'angle extérieur.

En supprimant les indices (puisque les relations sont valables à la fois pour les deux cercles), nous avons

$$\psi = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

$$\Theta = \varphi - \psi = \varphi + \alpha - \frac{\pi}{2}$$

$$r = \frac{d}{2 \sin \alpha}.$$

En ajoutant à ces relations les formules (14), nous avons tout ce qui est nécessaire pour déterminer le point P .

Les calculs numériques s'effectuent très rapidement en utilisant le formulaire ci-joint. Je tiens cependant à faire remarquer que j'ai expressément renoncé à développer des formules de contrôle pour ces calculs, et ceci pour la simple raison qu'elles ne seraient d'aucune utilité pratique. En effet, une fois les coordonnées provisoires déterminées, nous devons procéder à la compensation en utilisant les visées surabondantes. Dans ce but, les gisements des côtés déjà utilisés pour la détermination du point approché sont de nouveau calculés. Une fois ces gisements obtenus, les calculs se vérifient immédiatement puisque nous devons de nouveau obtenir les angles α_1 et α_2 .

La méthode développée permettant de calculer facilement un point en une demi-heure, elle présente des avantages considérables pour la pratique.

Lausanne, le 3 avril 1941.