

Zeitschrift: Schweizerische Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik =
Revue technique suisse des mensurations et améliorations foncières

Herausgeber: Schweizerischer Geometerverein = Association suisse des géomètres

Band: 39 (1941)

Heft: 9

Artikel: Betrachtungen über die Richtungsverbesserungen an Hand der
Ergebnisse der Triangulation IV. Ordnung des Kantons Zürich

Autor: Leemann, W.

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-199132>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 09.03.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Betrachtungen über die Richtungsverbesserungen und Richtungsgewichte an Hand der Ergebnisse der Triangulation IV. Ordnung des Kantons Zürich

Von W. Leemann, a. Kantonsgeometer

1. Die Richtungsverbesserungen.

Berechnet man für eine große Zahl von Punkten IV. Ordnung, welche durch kombiniertes Vorwärts- und Rückwärtseinschneiden, mit Ausgleichung nach der Methode der Kleinsten Quadrate bestimmt wurden, das *durchschnittliche Fehlerquadrat* der *äußern Richtungen* sowohl, als auch dasjenige der *innern Richtungen* für sich, so ergibt sich, daß in der großen Mehrzahl der Fälle das erste Fehlerquadrat merklich größer ist als das zweite.

Dieses Ergebnis ist nicht verwunderlich, weil ja, wie bekannt, die *äußern Richtungen* mit einem größern Fehler in die Ausgleichung eingingen als die *innern Richtungen*, gleichwohl aber auf die Einführung von Gewichten verzichtet wurde.

Verfasser hat nun in vier beliebig gewählten Triangulationssektionen das *Verhältnis* der beiden genannten Fehlerquadrate zueinander untersucht und gefunden, daß es im Mittel $1,2 \pm 0,1$ beträgt.

Die Tatsache, daß das errechnete Verhältnis erheblich größer als 1 ist, zeigt deutlich, daß strenge genommen zwischen den *äußern* und *innern Richtungen* ein Gewichtsunterschied hätte gemacht werden sollen.

Auf Grund des Quotienten 1,2 könnte nachträglich untersucht werden, welche Gewichtsannahmen richtig gewesen wären. Diese Untersuchung ist aber, wie *Helmert* in seinem Buche „Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der Kleinsten Quadrate“ zweite Auflage, S. 358–363) zeigt, umständlich und zudem recht unsicher. Es soll daher nachstehend ein anderer Weg eingeschlagen werden.

2. Die Richtungsgewichte.

Die Eidg. Instruktion für die Durchführung der Triangulation IV. Ordnung verzichtet auf die Forderung von Gewichten. Es erscheint dies durchaus begründet, indem angesichts der ausgezeichneten Grundlage, welche die neue Triangulation I.–III. Ordnung bildet, und gestützt auf die zweckmäßigen Anordnungen der Eidg. Landestopographie für die Durchführung der Beobachtungen, von vornherein gute Ergebnisse bei den Punktbestimmungen zu erwarten waren, Ergebnisse, welche aller Voraussicht nach keiner weiteren Genauigkeitssteigerung durch Einführung von Gewichten bedurften. Wenn man ermißt, welche große Mehrarbeit den Trigonometern, bei den vielen Tausenden von Punktbestimmungen, durch die Einführung von Gewichten erwachsen wäre, so muß der Verzicht auf Gewichte nicht nur als eine große Zeit- und

Kostenersparnis, sondern geradezu auch als eine Wohltat für die Rechner bezeichnet werden.

Wenn nun im nachstehenden trotzdem auf die Richtungsgewichte näher eingegangen wird, so geschieht es in der Annahme, daß die Kenntnis der korrekten Gewichte immerhin von allgemeinem Interesse sein dürfte. Auch können die Ergebnisse für etwa vorkommende, feinere Punktbestimmungen von Nutzen sein.

Für die *Herleitung der Gewichte* ist die Kenntnis der *mittleren Fehler der innern und äußern Richtungen vor der Ausgleichung* notwendig.

Der mittlere Fehler der *innern* Richtungen ist, wie ohne weiteres klar ist, identisch mit dem mittleren *Messungsfehler* der Richtungen. Es wäre aber unrichtig, als Messungsfehler etwa den aus der Stationsausgleichung hervorgehenden Fehler anzunehmen, weil so nur die „nackten“ Messungsfehler, ohne die äußern Einflüsse, berücksichtigt würden. Am besten berechnet man den Messungsfehler aus einer großen Zahl von *Dreieckswidersprüchen* nach der sogenannten internationalen Formel

$$\mu = \sqrt{\frac{[w^2]}{6 \cdot n}}$$

worin w den Dreieckswiderspruch und n die Anzahl der Dreiecke bedeutet. Dieser Wert μ enthält die Gesamtheit aller bei den Richtungsmessungen auftretenden Fehlereinflüsse.

Für den so berechneten Richtungsfehler wurde als *Durchschnitt der vier Triangulationssektionen* erhalten

$$\mu = \pm 1,6'' \pm 0,2'' \text{ (sex.)}$$

Der mittlere Fehler der *äußern* Richtungen ergibt sich aus folgender Betrachtung:

Zur Bestimmung der *Orientierungsgröße* O werden, wie bekannt, für jede Station die Unterschiede $Z - \alpha$ zwischen den *festen* Richtungen Z und den entsprechenden gemessenen Richtungen α gebildet. Diesen Unterschieden haftet nun, nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz, das Fehlerquadrat

$$m^2 + \mu^2$$

an, und dem Durchschnittswert aller Unterschiede, bzw. der Orientierungsgröße O kommt das Fehlerquadrat

$$M^2 = \frac{m^2 + \mu^2}{s}$$

zu. (Hierin bedeutet m den mittleren Fehler der festen Richtungen und s deren Anzahl.)

M^2 kann nun leicht an Hand der im Abriß gebildeten, meist mit roter Tinte geschriebenen, v berechnet werden, denn es ist

$$M^2 = \frac{[v^2]}{s(s-1)}$$

Als *Durchschnittswert* wurde aus den vier Sektionen erhalten:

$$\underline{M^2 = 1.56''}$$

Der weitere Schritt zur Bestimmung der *äußeren orientierten Richtungen* φ ist sodann der, daß die Orientierungsgröße O einzeln zu den gemessenen Richtungen α hinzugezählt wird. Da nach obigem den gemessenen Richtungen der mittlere Fehler μ anhaftet, so ergibt sich das *Fehlerquadrat der orientierten Richtungen* insgesamt zu

$$M_{\varphi}^2 = M^2 + \mu^2$$

Mit Einsetzung der oben genannten Zahlenwerte erhält man

$$M_{\varphi}^2 = 4,12.$$

Zur *Gewichtsbestimmung* übergehend ist nun das Verhältnis

$$M_{\varphi}^2 : \mu^2 = M^2 + \mu^2 : \mu^2$$

zu bilden.

Da sich die Gewichte umgekehrt zueinander verhalten, wie die mittleren Fehlerquadrate, so ergibt sich, wenn das Gewicht der innern Richtungen, wie üblich, gleich 1 gesetzt wird, das *Gewicht der äußern Richtungen* zu

$$P = \frac{\mu^2}{M^2 + \mu^2}$$

Setzt man den oben genannten Ausdruck für M^2 ein ∇ und kürzt, so erhält man

$$P = \frac{s}{1 + \frac{m^2}{\mu^2} + s}$$

Dieser Gewichtsausdruck findet sich auch z. B. in *Jordans Handbuch für Vermessungskunde* in etwas anderer Weise abgeleitet.

Setzt man die Zahlenwerte für μ^2 und M^2 in den ersten Ausdruck für P ein, so ergibt sich für die vier Triangulationssektionen als *Gesamtdurchschnitt für das Gewicht der äußern Richtungen*

$$\underline{P = 0,62 \pm 0,10}$$

General *Schreiber* hat bei den preußischen Triangulationen dieses Gewicht zu 0,5 angesetzt. Man kommt zu diesem Wert, wenn man $s = 1$ setzt und den Fehler der festen Richtungen vernachlässigt, oder wenn man $s = 1,5$ annimmt und $m = \mu$ setzt.

Das abgeleitete Gewicht der äußern Richtungen dürfte wegen der Kleinheit des Wertes den einen oder andern Geometer überraschen und vielleicht dazu veranlassen, eine Reihe von Punkten neu zu rechnen, um den Einfluß des Gewichtes auf die Richtungsverbesserungen zu prüfen. Um aber zu einer einigermaßen zuverlässigen Schlußfolgerung zu kommen, müßte eine größere Zahl von Punktbestimmungen durchgeführt werden.

Rüschlikon, im August 1941.