

Zeitschrift: Schweizerische Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik =
Revue technique suisse des mensurations et améliorations foncières

Herausgeber: Schweizerischer Geometerverein = Association suisse des géomètres

Band: 40 (1942)

Heft: 10

Artikel: Résolution mécano-optique d'un système de deux équations linéaires à
deux inconnues

Autor: Bachmann, W.K.

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-199779>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 26.11.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Sekunden an. Der aufmerksame Leser wird ohne weiteres einsehen, welche große Vorteile auch in diesem Fall die Rechenmaschinenrechnung bietet. Im Formular Fig. 7 ist der Sinus sechsstellig eingesetzt, aber aus obigem geht hervor, daß auch fünf Stellen genügen würden, ohne Einbuße an Genauigkeit zu erleiden.

Zum Schluß möchte ich noch den erfahrenen Rat beifügen, daß wer sich mehr dem Rechnen als dem Konstruieren zuwenden will, sich nur einer Maschine bedienen soll, die im Resultatwerk und im Zählwerk durchgehende Zehnerübertragung aufweist.

Die Einführung der Rechenmaschine in unseren Beruf hat sich bewährt; Maß und Zahl sind dank der Verwendung der Rechenmaschine zum Erlebnis des Praktikers geworden und damit ist unser Beruf, unter voller Ausnützung der Meßgenauigkeit, mehr und mehr zur mathematischen Behandlung seiner Aufgaben übergegangen. *E. Reich.*

Résolution mécano-optique d'un système de deux équations linéaires à deux inconnues

W. K. Bachmann, géomètre off. licencié ès sciences.

§ 1. Généralités.

Lors de l'orientation relative de deux vues conjuguées, on est fréquemment amené à résoudre un système de deux équations linéaires à deux inconnues ayant la forme

$$(1) \quad \begin{cases} a_1 \cdot x + b_1 \cdot y + c_1 = 0 \\ a_2 \cdot x + b_2 \cdot y + c_2 = 0 \end{cases}$$

La résolution numérique est immédiate. En photogrammétrie, le problème se complique cependant quelque peu, vu que les coefficients ne sont souvent pas bien connus, quoiqu'ils aient des valeurs bien définies. Souvent aussi leur détermination exacte demanderait un trop gros travail. Nous sommes alors forcés de résoudre le système (1) par approximation successive. La *théorie analytique* de ce problème se trouve développée dans de nombreux ouvrages de photogrammétrie. J'estime cependant qu'une *théorie géométrique* présente au point de vue théorique certains avantages sur la méthode analytique et c'est pour cette raison que j'indiquerai ci-après une théorie nouvelle en me basant essentiellement sur des considérations d'ordre géométrique.

Dans les équations (1), $a_1, b_1, a_2, b_2, c_1, c_2$ sont des constantes et x, y sont les inconnues. Considérons maintenant, au lieu de (1), le système suivant

$$(1') \quad \begin{cases} a_1 \cdot x + b_1 \cdot y + c_1 = v_1 \\ a_2 \cdot x + b_2 \cdot y + c_2 = v_2 \end{cases}$$

dans lequel v_1 et v_2 sont des parallaxes que l'on peut mesurer dans l'appareil de restitution. Ces parallaxes v_1 et v_2 sont observées respectivement aux points C_1 et C_2 des clichés et se nomment parallaxes verticales.

§ 2. Résolution théorique.

Soit oxy un système de coordonnées rectangulaires (voir fig. 1). Attribuons à v_1 et v_2 différentes valeurs numériques. Nous obtenons ainsi dans le plan des xy deux familles de droites parallèles. L'intersection des deux droites d'équations $v_1 = 0$ et $v_2 = 0$ nous donne le point $P(x_0, y_0)$ que nous cherchons.

Envisageons maintenant le problème de l'orientation relative. Soient C_1 et C_2 les deux points du cliché, auxquels nous mesurons respectivement les parallaxes v_1 et v_2 . Ainsi, la parallaxe v_1 sera toujours observée au point C_1 , tandis que l'on détermine v_2 en C_2 .

Cela étant, nous reprenons le système de coordonnées rectangulaires x, y de la fig. 1. Dans ce système, d_1 et d_2 sont les droites données par les équations (1). Leur point d'intersection est désigné par $P(x_0, y_0)$. Dans les appareils de restitution, les valeurs attribuées aux grandeurs x et y sont indiquées par des tambours. Nous pouvons par conséquent donner une valeur arbitraire à x en actionnant la vis des x et il en est de même pour les y . Donnons à x et y des valeurs déterminées, voisines de x_0, y_0 . L'ensemble de ces deux valeurs est indiqué par le point Q de la fig. 1. Les parallaxes auront respectivement pour valeurs v_1 et v_2 .

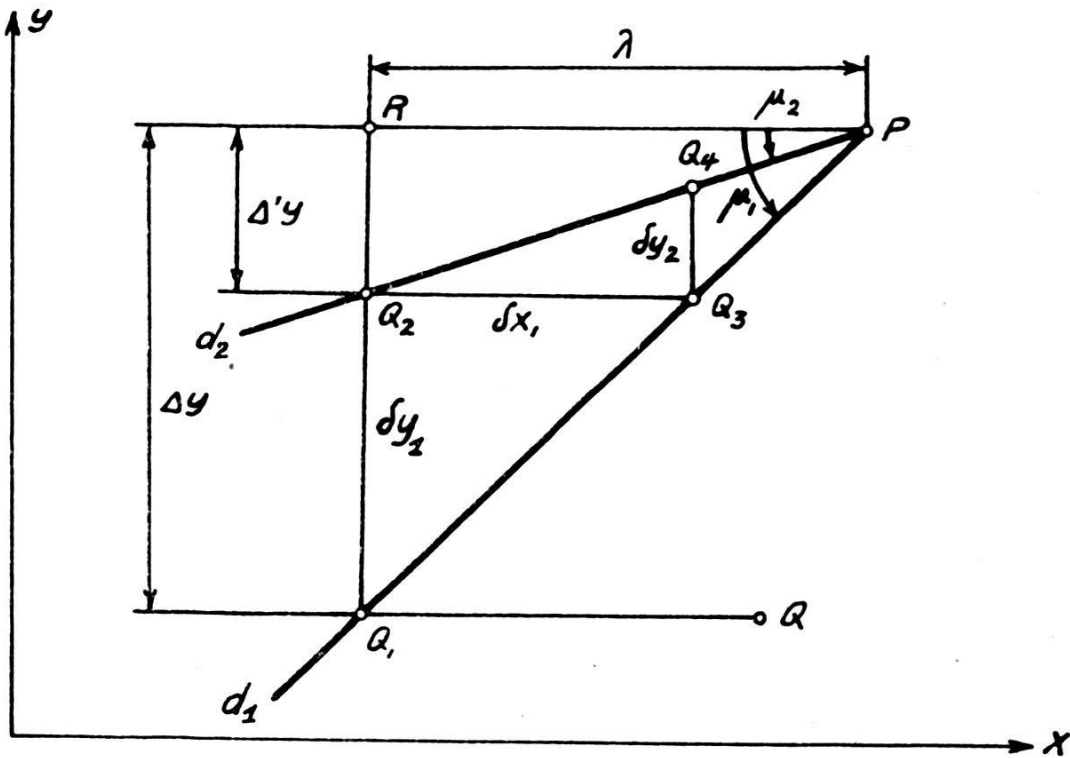


Fig. 1

Changeons x de façon à annuler v_1 . On y parvient en éliminant la parallaxe v_1 au point C_1 au moyen de la vis des x ; nous obtenons ainsi le point Q_1 . Au point C_2 des clichés, nous éliminons ensuite la parallaxe v_2 en changeant la valeur de y ; ceci nous donne le point Q_2 . Retournons au point C_1 , où nous éliminons de nouveau la parallaxe en changeant la

valeur de x . Nous obtenons ainsi le point Q_3 . En continuant de la même façon, nous trouvons une suite de points Q_1, Q_2, Q_3, \dots , qui tend vers le point P si certaines conditions sont remplies. S'il en est ainsi, nous dirons que le procédé est *convergent*; dans le cas contraire, il sera dit *divergent*.

Cherchons maintenant la condition de convergence. Soient μ_1 et μ_2 les angles que forment les droites d_1 et d_2 avec l'axe des x négatifs (voir fig. 1). En posant

$$\overline{PQ}_1 = \rho_1 \quad \text{et} \quad \overline{PQ}_2 = \rho_2$$

et si les coordonnées de Q_i sont x_i, y_i , nous trouvons

$$x_1 = x_0 - \rho_1 \cdot \cos \mu_1$$

$$y_1 = y_0 - \rho_1 \cdot \sin \mu_1$$

$$x_2 = x_0 - \rho_2 \cdot \cos \mu_2$$

$$y_2 = y_0 - \rho_2 \cdot \sin \mu_2$$

$$\text{mais } x_1 = x_2 \quad \text{d'où} \quad \rho_2 = \rho_1 \cdot \frac{\cos \mu_1}{\cos \mu_2}$$

ce qui nous donne

$$x_2 = x_0 - \rho_1 \cdot \cos \mu_1$$

$$y_2 = y_0 - \rho_1 \cdot \frac{\cos \mu_1}{\cos \mu_2} \cdot \sin \mu_2$$

En posant $\overline{PQ}_3 = \rho_1'$, nous obtenons

$$x_3 = x_0 - \rho_1' \cdot \cos \mu_1$$

$$y_3 = y_0 - \rho_1' \cdot \sin \mu_1$$

$$\text{mais } y_3 = y_2 \quad \text{d'où} \quad \rho_1' = \rho_1 \cdot \frac{\cos \mu_1 \cdot \sin \mu_2}{\cos \mu_2 \cdot \sin \mu_1}$$

ou bien

$$\rho_1' = \rho_1 \left(\frac{\operatorname{tg} \mu_2}{\operatorname{tg} \mu_1} \right)$$

Pour le point Q_5 , nous trouvons en posant $\overline{PQ}_5 = \rho_1''$:

$$\rho_1'' = \rho_1 \left(\frac{\operatorname{tg} \mu_2}{\operatorname{tg} \mu_1} \right)^2$$

et par conséquent pour le point Q_{2n+1} , en posant $\overline{PQ}_{2n+1} = \rho_1^{(n)}$

$$\rho_1^{(n)} = \rho_1 \left(\frac{\operatorname{tg} \mu_2}{\operatorname{tg} \mu_1} \right)^n$$

La condition de convergence est $\rho_1^{(n)} \rightarrow 0$ si $n \rightarrow \infty$. Mais ceci ne peut avoir lieu que si

$$\left| \frac{\operatorname{tg} \mu_2}{\operatorname{tg} \mu_1} \right| < 1$$

ou bien

$$(2) \quad |\mu_2| < |\mu_1|$$

Si l'inégalité (2) a lieu, le procédé indiqué est convergent.

Nous allons maintenant examiner ce qui se passe lorsque l'inégalité (2) n'est pas vérifiée. Supposons donc que l'on ait

$$|\mu_2| > |\mu_1|$$

Nous voyons facilement qu'il suffira de permuter x et y dans les développements précédents pour aboutir à un procédé convergent. Ainsi, le point Q_1 obtenu, nous changeons premièrement la valeur de x pour annuler v_2 ; nous faisons ensuite varier y et ainsi de suite (voir fig. 2).

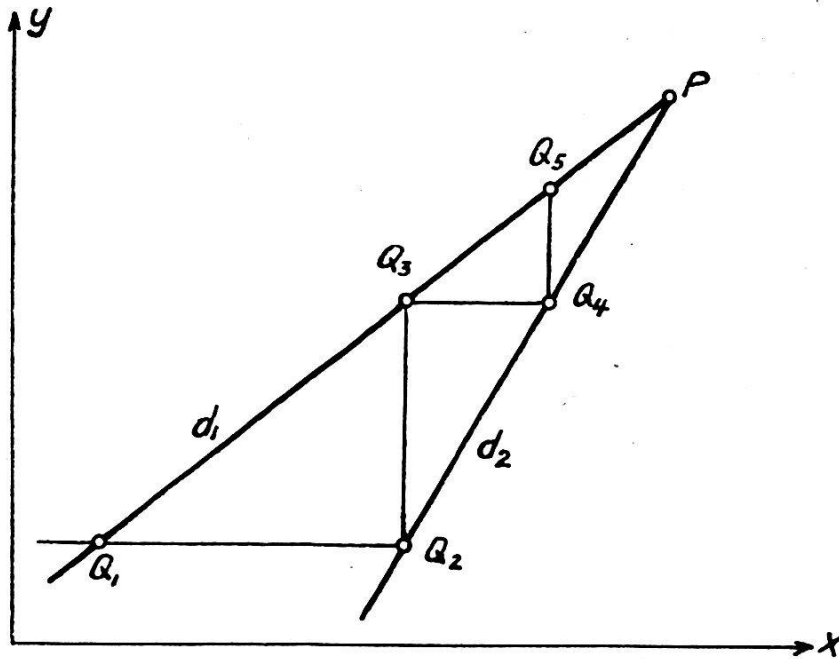


Fig. 2

Pratiquement, il ne sera pourtant pas toujours facile de savoir dans quel cas on se trouve effectivement. Aussi, la convergence peut-elle être très lente, de sorte que l'utilisation pratique du procédé mentionné devient très laborieuse. J'indiquerai plus loin une méthode qui s'appliquera aux deux cas. Elle permettra la détermination des inconnues au moyen d'un nombre fini d'opérations, et nous aurons ainsi la possibilité de nous rendre indépendants de la condition de convergence.

Soit maintenant $\mu_1 = \mu_2$; dans ce cas, les deux droites d_1 et d_2 sont parallèles ou confondues, et le problème est indéterminé.

Si $\mu_2 = -\mu_1$, les deux droites sont symétriques par rapport aux axes de coordonnées. Dans ce cas, la suite des points Q_1, Q_2, \dots , forme un rectangle (voir fig. 3) et l'on voit immédiatement que les deux procédés indiqués ne sont pas convergents.

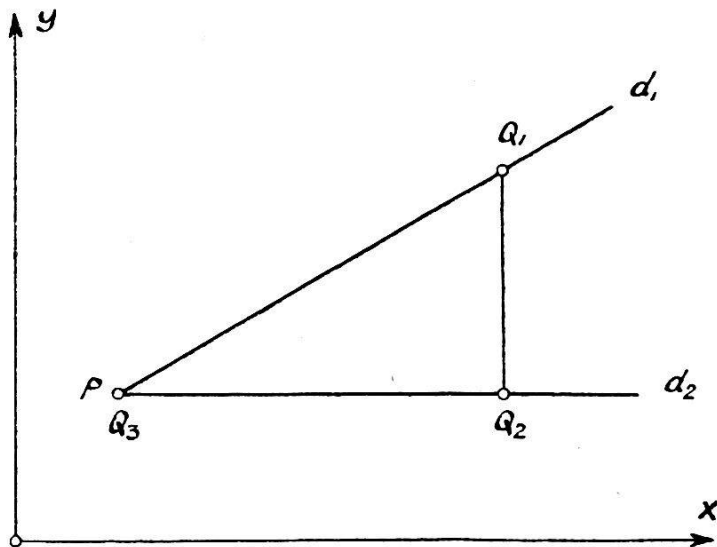


Fig. 3

Dans ce dernier cas, une autre méthode, qui sera développée plus loin, permettra encore de trouver la solution.

§ 3. *Résolution pratique.*

Première méthode.

Il sera surtout indiqué d'utiliser cette méthode lorsque les coefficients des équations ne seront pas bien connus, ou lorsque leur détermination serait trop laborieuse. Nous introduirons par la suite des « surcorrections », ce qui nous permettra de déterminer les valeurs des inconnues au moyen d'un nombre fini d'opérations.

Considérons premièrement la fig. 1. Partant du point Q_1 , nous effectuons les opérations indiquées plus haut. Nous obtenons ainsi successivement les points Q_2, Q_3, \dots . Par P , nous menons une parallèle à l'axe des x . L'intersection de celle-ci avec la droite Q_1, Q_2 sera désignée par R . Essayons de déterminer la distance $\overline{RQ_1}$ par un nombre fini d'opérations. Une fois cette distance trouvée, il nous sera facile de déterminer le point P . La fig. 1 nous donne

$$\frac{\delta y_1}{\delta x_1} = \frac{\Delta y}{\lambda} \quad \frac{\delta x_1}{\delta y_2} = \frac{\lambda}{\Delta y - \delta y_1}$$

En éliminant λ entre ces deux équations, nous trouvons

$$\frac{\delta y_1}{\delta y_2} = \frac{\Delta y}{\Delta y - \delta y_1} \quad \text{d'où}$$

(3) $\Delta y = + \frac{\delta y_1^2}{\delta y_1 - \delta y_2}$

Il suffit donc de connaître δy_1 et δy_2 pour pouvoir déterminer Δy . Remarquons que la relation (3) ne contient pas *explicitement* les constantes a, b et c . Reprenons maintenant le problème de l'orientation relative. La marche à suivre est la suivante:

1. Au point C_1 : élimination de la parallaxe au moyen de la vis des x ; lecture du tambour des y ($= y_1$). *
2. Au point C_2 : élimination de la parallaxe au moyen de la vis des y ; lecture $= y_2$. La différence des deux lectures donne $\delta y_1 = y_2 - y_1$.
3. Au point C_1 : élimination de la parallaxe au moyen de la vis des x .
4. Au point C_2 : élimination de la parallaxe au moyen de la vis des y ; lecture $= y_4$, d'où $\delta y_2 = y_4 - y_2$.
5. Calcul de Δy d'après la formule (3):

$$\Delta y = \frac{(y_2 - y_1)^2}{2y_2 - (y_1 + y_4)}$$

6. Amener la vis des y à $y_0 = y_1 + \Delta y$.
7. Élimination de la parallaxe restante au moyen de la vis des x en l'un quelconque des deux points. On contrôlera ensuite l'autre point, où la parallaxe doit également avoir disparue.

Considérons maintenant la fig. 2. Dans ce cas, il est naturellement préférable de déterminer premièrement l'inconnue x en fonction de δx_1 et δx_2 . On aboutit alors à une formule tout à fait analogue à (3); il semble donc inutile d'indiquer ici ce développement qui ne se distingue du reste guère de celui que nous venons de traiter.

Deuxième Méthode.

J'indiquerai ci-après une autre méthode, plus rapide que la première, mais qui ne s'applique que dans le cas où les coefficients a et b sont connus. La fig. 1 nous donne

$$\begin{aligned} \overline{Q_2R} &= \Delta'y & \overline{Q_1R} &= \Delta y & \text{et} \\ \Delta'y &= \lambda \cdot \text{tg } \mu_2 & \Delta y &= \lambda \cdot \text{tg } \mu_1 & \text{mais on a} \\ \text{tg } \mu_2 &= -\frac{a_2}{b_2} & \text{et } \text{tg } \mu_1 &= -\frac{a_1}{b_1} & \text{d'où} \\ & & \frac{\Delta y}{\Delta'y} &= \frac{a_1 b_2}{a_2 b_1} \end{aligned}$$

Posons (4)
$$n = \frac{a_1 b_2}{a_2 b_1}$$

Avec $\Delta'y = \Delta y - \delta y_1$ nous obtenons $n = \frac{\Delta y}{\Delta y - \delta y_1}$
d'où finalement

(5)
$$\Delta y = \frac{n}{n-1} \delta y_1$$

Cette dernière relation nous permet de calculer Δy aussitôt que nous connaissons δy_1 . Nous voyons que cette seconde méthode est plus rapide que la première vu que δy_2 ne figure pas dans la relation (5).

Pratiquement, nous procédons comme suit:

1. Au point C_1 : élimination de la parallaxe au moyen de la vis des x ; lecture du tambour des y ($= y_1$).
2. Au point C_2 : élimination de la parallaxe au moyen de la vis des y ; lecture $= y_2$. On a $\delta y_1 = y_2 - y_1$.
3. Calcul de Δy d'après la relation (5), ce qui nous donne

(6)
$$\Delta y = \frac{n}{n-1} (y_2 - y_1)$$

4. Introduction au tambour des y de la valeur $y_0 = y_1 + \Delta y$.
5. Élimination de la parallaxe restante avec la vis des x en un des points; contrôle sur l'autre point.

§ 4. *Cas particulier.*

Reprenons la théorie générale et supposons que les équations (1') se réduisent à

(7)
$$\begin{cases} a_1 \cdot x + b_1 \cdot y + c_1 = v_1 \\ b_2 \cdot y + c_2 = v_2 \end{cases}$$

La seconde droite, représentée par ces équations est parallèle à l'axe des x (voir fig. 4).

Pour résoudre ce système, nous appliquons la première méthode, développée dans le paragraphe 3. Nous obtenons successivement les points Q_1 , Q_2 , Q_3 . Le dernier point étant confondu avec P , nous avons pu déterminer les inconnues moyennant un nombre fini d'opérations.

L'examen des équations (7) nous montre tout de suite que nous devons premièrement changer y de façon que v_2 devienne nulle; une fois ce résultat obtenu, on annulera la parallaxe v_1 au moyen de la vis des x ,

ce qui nous donne le point P cherché. Nous retrouvons ainsi par les calculs un résultat bien connu.

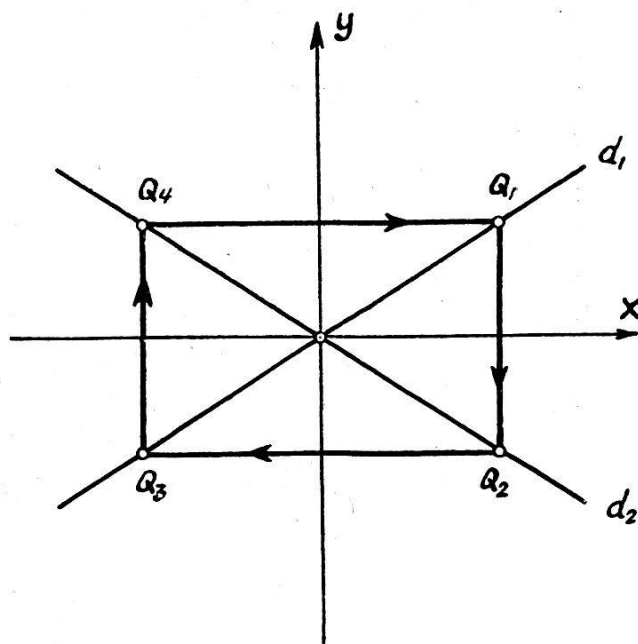


Fig. 4

Geodätische Grundlagen der Vermessungen in den Kantonen St. Gallen und Appenzel I.-Rh. und A.-Rh.*

Mitteilung der Eidg. Landestopographie,
verfaßt von Sektionschef *J. Ganz*, Grundbuchgeometer.

Unter geodätischen Grundlagen für Vermessungen verstehen wir die Koordinaten und Höhen der Signalpunkte von Triangulationsnetzen verschiedener Größenordnungen und die Koten der Höhenfixpunkte der eidgenössischen und kantonalen Nivellemente. Diese Festpunkte bilden als Teilstücke der Landestriangulation, der Grundbuchtriangulation und des Landesnivellements den Rahmen für die Detailmessungen und verbürgen den zwangslosen Zusammenhang der einzelnen Teile und Gemeinden unter sich und mit den Gebieten der übrigen, benachbarten Kantone. Bis der heutige Grad der Vollkommenheit dieser Triangulations- und Nivellementsnetze erreicht war, mußten viele Erkenntnisse

* Veröffentlichung zugelassen unter Bewilligung Nr. 6265 vom 22. Juli 1942, BRB. vom 3. Oktober 1939.