

**Zeitschrift:** Schweizerische Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik =  
Revue technique suisse des mensurations et améliorations foncières

**Herausgeber:** Schweizerischer Geometerverein = Association suisse des géomètres

**Band:** 43 (1945)

**Heft:** 3

**Artikel:** Théorie des erreurs de l'observation des variables secondaires [fin]

**Autor:** Bachmann, W.K.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-202930>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 01.04.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

SCHWEIZERISCHE  
**Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik**

ORGAN DES SCHWEIZ. GEOMETERVEREINS

Offiz. Organ der Schweiz. Gesellschaft für Kulturtechnik / Offiz. Organ der Schweiz. Gesellschaft für Photogrammetrie

**Revue technique suisse des mensurations et améliorations foncières**

ORGANE DE LA SOCIÉTÉ SUISSE DES GÉOMÈTRES

Organe officiel de l'Association Suisse du Génie rural / Organe officiel de la Société Suisse de Photogrammétrie

Redaktion: Dr. h. c. C. F. BAESCHLIN, Professor, Zollikon (Zürich)

Ständ. Mitarbeiter für Kulturtechnik: E. RAMSER, Prof. für Kulturtechnik an der ETH.,  
Freie Straße 72, Zürich

Redaktionsschluß: Am 1. jeden Monats

Expediton, Inseraten- und Abonnements-Annahme

BUCHDRUCKEREI WINTERTHUR AG., WINTERTHUR

<p style="text-align: center;"><b>No. 3 • XLIII. Jahrgang</b> der „Schweizerischen Geometer-Zeitung“ Erscheinend am zweiten Dienstag jeden Monats <b>13. März 1945</b> <b>Inserate:</b> 25 Cts. per einspalt. Millimeter-Zeile. Bei Wiederholungen Rabatt gemäß spez. Tarif</p>	<p style="text-align: center;"><b>Abonnemente:</b> Schweiz Fr. 14. —, Ausland Fr. 18. — jährlich Für Mitglieder der Schweiz. Gesellschaften für Kulturtechnik u. Photogrammetrie Fr. 9. — jährl. Unentgeltlich für Mitglieder des Schweiz. Geometervereins</p>
-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

**Théorie des erreurs de l'observation  
des variables secondaires**

*par Dr. W. K. Bachmann*

(Fin)

*IV. Exemple numérique*

Dans notre prochaine publication, intitulée «Méthode de la connexion des images et théorie des erreurs de l'orientation relative», nous aurons l'occasion d'appliquer les formules que nous venons de développer à l'orientation relative, problème comportant 5 variables. Il nous semble toutefois indiqué de traiter au préalable un exemple numérique très simple à deux variables, ce qui nous donne la possibilité de calculer les ellipses d'erreur relatives aux divers modes d'opérations que nous envisageons.

Le problème que nous allons traiter se rapporte au *rétablissement d'un point de triangulation à l'aide de visées extérieures*.

Soient  $P(x, y)$ ,  $P_1(x_1, y_1)$ ,  $P_2(x_2, y_2)$  trois points de triangulation donnés. Nous supposons que le point  $P$  ait disparu et qu'il s'agisse de le rétablir sur le terrain à l'aide des directions extérieures  $P_1P$  et  $P_2P$ . Calculons premièrement les gisements  $\varphi_1, \varphi_2$  des côtés orientés  $s_1 = \overline{P_1P}$  et  $s_2 = \overline{P_2P}$ , ainsi que les coefficients de direction  $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$  ce qui nous donne

$$(23) \quad \begin{cases} \delta\varphi_1 = \alpha_1 \delta x + \beta_1 \delta y \\ \delta\varphi_2 = \alpha_2 \delta x + \beta_2 \delta y. \end{cases}$$

Comme application numérique, nous choisissons

$$\varphi_1 = 370^{\text{gr}} 24^{\text{c}} 00^{\text{cc}}$$

$$\varphi_2 = 225^{\text{gr}} 42^{\text{c}} 00^{\text{cc}}$$

$$s_1 = 5516,64 \text{ m}$$

$$s_2 = 3808,44 \text{ m}$$

et nous prenons comme erreur moyenne à craindre sur l'unité de poids

$$\mu = \pm 10^{\text{cc}}$$

Les coefficients de direction se calculant d'après la formule

$$\delta\varphi^{\text{cc}} = -\frac{\rho^{\text{cc}}}{s} \sin \varphi \cdot \delta x + \frac{\rho^{\text{cc}}}{s} \cos \varphi \cdot \delta y$$

nous obtenons pour les données numériques ci-dessus, en introduisant  $\delta x$  et  $\delta y$  en cm et  $\delta\varphi$  en secondes centésimales:

$$\rho^{\text{cc}} = 636620^{\text{cc}}$$

$$\sin \varphi_1 = -0,4506$$

$$\sin \varphi_2 = -0,3888$$

$$\cos \varphi_1 = +0,8927$$

$$\cos \varphi_2 = -0,9213$$

$$\frac{\rho^{\text{cc}}}{s_1} = +1,1540$$

$$\frac{\rho^{\text{cc}}}{s_2} = +1,6716$$

$$\begin{cases} \delta\varphi_1 = +0,52 \delta x + 1,03 \delta y \\ \delta\varphi_2 = +0,65 \delta x - 1,54 \delta y \end{cases}$$

Nous envisageons dès lors trois méthodes différentes pour la détermination du point  $P$ .

*1<sup>ère</sup> méthode:*

Si nous plaçons en  $P_1$  et  $P_2$  deux théodolites que nous orientons à l'aide de directions connues  $Q_1P_1$ ,  $Q_2P_2$  (voir fig. 1), après introduction des gisements  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$ , l'intersection des deux visées  $P_1P$ ,  $P_2P$ , nous donne le point  $P$ . Il suffit donc de faire placer un jalon de façon qu'il se trouve simultanément sur les deux visées. En procédant ainsi, les gisements  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  jouent le rôle de variables primaires qui sont mesurées et observées. Nous sommes donc en présence d'un simple problème d'observations médiates, et nous pouvons calculer les coefficients de poids et de corrélation en appliquant la méthode habituelle des moindres carrés. Les équations aux poids sont par conséquent

$$(24) \quad \begin{cases} [a a] Q_{xx} + [a \beta] Q_{xy} = 1 \\ [a \beta] Q_{xx} + [\beta \beta] Q_{xy} = 0 \\ [a a] Q_{xy} + [a \beta] Q_{yy} = 0 \\ [a \beta] Q_{xy} + [\beta \beta] Q_{yy} = 1 \end{cases}$$

et l'ellipse d'erreur  $E_1$  a pour équation

$$(25) \quad E_1: [\alpha \alpha] \delta x^2 + 2 [\alpha \beta] \delta x \delta y + [\beta \beta] \delta y^2 = \mu^2$$

En introduisant les valeurs numériques, nous trouvons

$$(I) \quad \boxed{\begin{array}{l} Q_{xx} = + 1,59 \quad Q_{xy} = + 0,22 \quad Q_{yy} = + 0,32 \\ E_1: + 0,69 \delta x^2 - 0,93 \delta x \delta y + 3,43 \delta y^2 = 100 \end{array}}$$

Calculons encore les coefficients de poids  $Q_{\varphi_1\varphi_1}$ ,  $Q_{\varphi_2\varphi_2}$  après détermination du point  $P$ . En appliquant la méthode symbolique aux équations (23) nous trouvons

$$(26) \quad \begin{cases} Q_{\varphi_1\varphi_1} = \alpha_1^2 Q_{xx} + 2 \alpha_1 \beta_1 Q_{xy} + \beta_1^2 Q_{yy} \\ Q_{\varphi_2\varphi_2} = \alpha_2^2 Q_{xx} + 2 \alpha_2 \beta_2 Q_{xy} + \beta_2^2 Q_{yy} \end{cases}$$

et en introduisant les valeurs numériques

$$Q_{\varphi_1\varphi_1} = 0,27 \cdot 1,59 + 1,07 \cdot 0,22 + 1,06 \cdot 0,32 = 1,00$$

$$Q_{\varphi_2\varphi_2} = 0,42 \cdot 1,59 - 2,00 \cdot 0,22 + 2,37 \cdot 0,32 = 1,00$$

Nous constatons que le poids de  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  n'a pas changé et que l'erreur moyenne à craindre sur ces gisements est encore  $\pm \mu$  après la détermination de  $P$ . Il s'agit là bien entendu d'une propriété connue des observations médiates sans mesures surabondantes.

*2<sup>me</sup> méthode:*

Soit  $P_0$  un point voisin de  $P$  (voir fig. 1). A l'aide d'une boussole, nous déterminons en  $P_0$  des parallèles aux axes de coordonnées  $0x, 0y$ . Sur la fig. 1, celles-ci sont désignées par  $d_x$  et  $d_y$ . Introduisons en outre un système de coordonnées rectangulaires  $P \xi \eta$ , ayant son origine en  $P$  et dont les axes sont respectivement parallèles à  $0x$  et  $0y$ . La droite  $d_x$  étant déterminée sur le terrain, l'aide devra se déplacer de telle sorte que le jalon qu'il porte reste constamment sur cette droite. Plaçons le théodolite successivement en  $P_1$  et  $P_2$  en introduisant les gisements  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$ . Nous pouvons ainsi déterminer les points d'intersection de la droite  $d_x$  avec les visées  $P_1P$ ,  $P_2P$ . Désignons ces points par  $A$  et  $B$ , et soient  $\xi_A$ ,  $\xi_B$  leurs abscisses dans le système  $P \xi \eta$ . La distance  $\overline{AB} = \xi_B - \xi_A$  étant mesurée sur le terrain, nous pouvons calculer la position du point d'intersection  $Q$  des droites  $d_x$  et  $P\eta$ . Les formules (23) nous donnent en effet

$$\text{pour } A: \delta\varphi_2 = 0 \quad \text{d'où} \quad 0 = \alpha_1 \xi + \beta_1 \delta y$$

$$\text{pour } B: \delta\varphi_2 = 0 \quad \text{d'où} \quad 0 = \alpha_2 \xi_B + \beta_2 \delta y$$

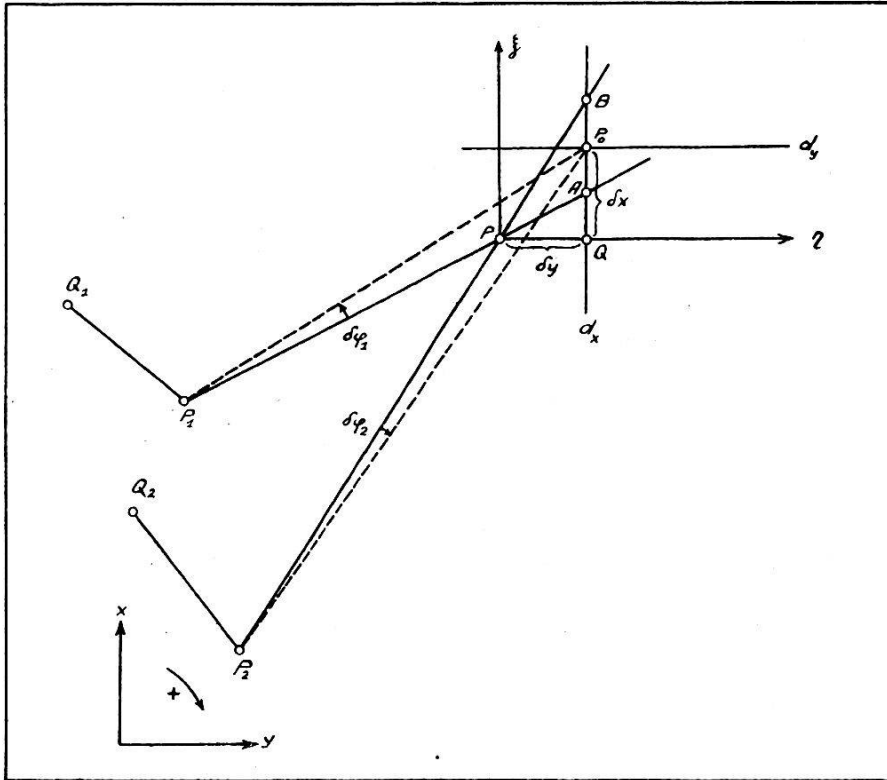


Fig. 1

et nous déterminons maintenant  $\xi_A$  en fonction de  $(\xi_B - \xi_A)$  en éliminant l'inconnue  $\delta y$  entre les deux équations que nous venons d'écrire. Ceci nous donne

$$a_1 \beta_2 \xi_A = a_2 \beta_1 \xi_B$$

et en ajoutant des deux côtés le terme  $- a_2 \beta_1 \xi_A$

$$(27) \quad (a_1 \beta_2 - a_2 \beta_1) \xi_A = a_2 \beta_1 (\xi_B - \xi_A).$$

En introduisant encore le déterminant

$$(28) \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & \beta_1 \\ a_2 & \beta_2 \end{vmatrix},$$

nous trouvons finalement

$$(29) \quad \xi_A = \frac{a_2 \beta_1}{\Delta} (\xi_B - \xi_A).$$

La formule (29) nous donne le moyen de déterminer le point Q en reportant sur le terrain la distance  $\xi_A$  à partir de A sur  $d_x$ .

Le point Q étant déterminé, l'aide déplacera le jalon sur la droite  $Q\eta$  jusqu'à ce qu'il se trouve sur la visée  $P_1P$ , ce qui nous donne le point P que nous cherchons.

Dans cette seconde méthode,  $\xi$  et  $\eta$  jouent le rôle de variables primaires, tandis que les gisements  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  sont des variables secondaires. Il s'agit donc d'un problème d'observation de variables secondaires, qui est représenté par les équations (18), dans lesquelles nous avons  $p_1 = p_2 = 1$ . Les observations médiatees équivalentes sont par conséquent

$$(30) \quad \begin{aligned} p &= 1 & \varepsilon_1' &= \alpha_1 \delta x + \beta_1 \delta y \\ p &= [\alpha \alpha \cdot 1] & \varepsilon_2' &= \delta x. \end{aligned}$$

Les équations aux poids deviennent ainsi

$$(31) \quad \left\{ \begin{aligned} \{\alpha_1^2 + [\alpha \alpha \cdot 1]\} Q_{xx} + \alpha_1 \beta_1 Q_{xy} &= 1 \\ \alpha_1 \beta_1 Q_{xx} + \beta_1 \beta_1 Q_{xy} &= 0 \\ \{\alpha_1^2 + [\alpha \alpha \cdot 1]\} Q_{xy} + \alpha_1 \beta_1 Q_{yy} &= 0 \\ \alpha_1 \beta_1 Q_{xy} + \beta_1 \beta_1 Q_{yy} &= 1 \end{aligned} \right.$$

et l'ellipse d'erreur  $E_2$  a pour équation

$$(32) \quad E_2: \{\alpha_1^2 + [\alpha \alpha \cdot 1]\} \delta x^2 + 2 \alpha_1 \beta_1 \delta x \delta y + \beta_1^2 \delta y^2 = \mu^2.$$

L'introduction des valeurs numériques nous donne

$$(II) \quad \boxed{\begin{aligned} Q_{xx} &= + 1,59 & Q_{xy} &= - 0,80 & Q_{yy} &= + 1,35 \\ E_2: &+ 0,90 \delta x^2 + 1,07 \delta x \delta y + 1,06 \delta y^2 & & & &= 100 \end{aligned}}$$

Les coefficients de poids  $Q_{\varphi_1 \varphi_1}$ ,  $Q_{\varphi_2 \varphi_2}$  après détermination de  $P$  deviennent

$$(33) \quad \begin{aligned} Q_{\varphi_1 \varphi_1} &= 0,27 \cdot 1,59 - 1,07 \cdot 0,80 + 1,06 \cdot 1,35 = 1,00 \\ Q_{\varphi_2 \varphi_2} &= 0,42 \cdot 1,59 + 2,00 \cdot 0,80 + 2,37 \cdot 1,35 = 5,47 \end{aligned}$$

et nous constatons que  $Q_{\varphi_2 \varphi_2}$  est supérieur à l'unité. Il en résulte que l'erreur moyenne à craindre sur  $\varphi_2$ , après détermination de  $P$ , est égale à

$$\pm \sqrt{5,47} \mu;$$

elle est donc plus grande que  $\mu$  en valeur absolue.

Notons encore que  $Q_{xx}$  prend la même valeur pour les deux méthodes — ce que la théorie générale laissait prévoir — tandis que la valeur de  $Q_{yy}$  est plus élevée pour la seconde méthode.

3<sup>me</sup> méthode :

Dans ce qui précède, nous avons déterminé l'inconnue  $\xi$  moyennant élimination de  $\eta$ . Nous pouvons encore appliquer ce même procédé d'élimination à l'inconnue  $\xi$  en vue de la détermination de  $\eta$ . Les observations médiatees équivalentes, relatives à ces opérations sont données par les équations (16) où nous devons de nouveau poser  $p_1 = p_2 = 1$ , ce qui nous donne

$$(34) \quad \begin{aligned} p\xi &= [\alpha \alpha \cdot 1] & \varepsilon_1' &= \xi \cdot \\ p\eta &= [\beta \beta \cdot 1] & \varepsilon_2' &= \cdot \eta \end{aligned}$$

Les coefficients de poids deviennent

$$(35) \quad Q_{xx} = \frac{1}{[\alpha \alpha \cdot 1]} \quad Q_{xy} = 0 \quad Q_{yy} = \frac{1}{[\beta \beta \cdot 1]}$$

et l'ellipse d'erreur a pour équation

$$(36) \quad E_3: [\alpha \alpha \cdot 1] \delta x^2 + [\beta \beta \cdot 1] \delta y^2 = \mu^2.$$

L'introduction des valeurs numériques nous donne

$$(III) \quad \boxed{\begin{array}{l} Q_{xx} = +1,59 \quad Q_{xy} = 0 \quad Q_{yy} = +0,32 \\ E_3: +0,63 \delta x^2 + 3,12 \delta y^2 = 100 \end{array}}$$

et les coefficients de poids  $Q_{\varphi_1 \varphi_1}$ ,  $Q_{\varphi_2 \varphi_2}$  deviennent après détermination de  $P$ :

$$(37) \quad \begin{aligned} Q_{\varphi_1 \varphi_1} &= 0,27 \cdot 1,59 + 1,06 \cdot 0,32 = 0,77 \\ Q_{\varphi_2 \varphi_2} &= 0,42 \cdot 1,59 + 2,37 \cdot 0,32 = 1,43 \end{aligned}$$

Pour ce qui a trait à la construction graphique des trois ellipses (voir fig. 2) il est indiqué de déterminer leurs axes. En désignant l'angle formé par un axe de l'ellipse et l'axe des  $x$  par  $\alpha$ , nous avons la formule bien connue

$$\operatorname{ctg} 2 \alpha = \frac{[aa] - [bb]}{2 [ab]}$$

qui donne les 2 valeurs de  $\alpha$  qui diffèrent de  $100^\circ$  l'une de l'autre. On obtient ensuite les axes correspondants  $d$  en appliquant la formule

$$d^2 = \frac{\mu^2}{[bb] + [ab] \operatorname{ctg} \alpha} = \frac{\mu^2}{[aa] + [ab] \operatorname{tg} \alpha}.$$

Ces calculs étant bien connus, nous nous bornons à en donner les résultats

$$E_1: \begin{cases} \alpha_1 = + 10^\circ 43^c & d_1 = 12,7 \text{ cm.} \\ \alpha_2 = + 110^\circ 43^c & d_2 = 5,3 \text{ cm.} \end{cases}$$

$$E_2: \begin{cases} \alpha_1 = - 45^\circ 26^c & d_1 = 15,1 \text{ cm.} \\ \alpha_2 = - 145^\circ 26^c & d_2 = 8,1 \text{ cm.} \end{cases}$$

$$E_3: \begin{cases} \alpha_1 = 0^\circ 00^c & d_1 = 12,6 \text{ cm.} \\ \alpha_2 = 100^\circ 00^c & d_2 = 5,7 \text{ cm.} \end{cases}$$

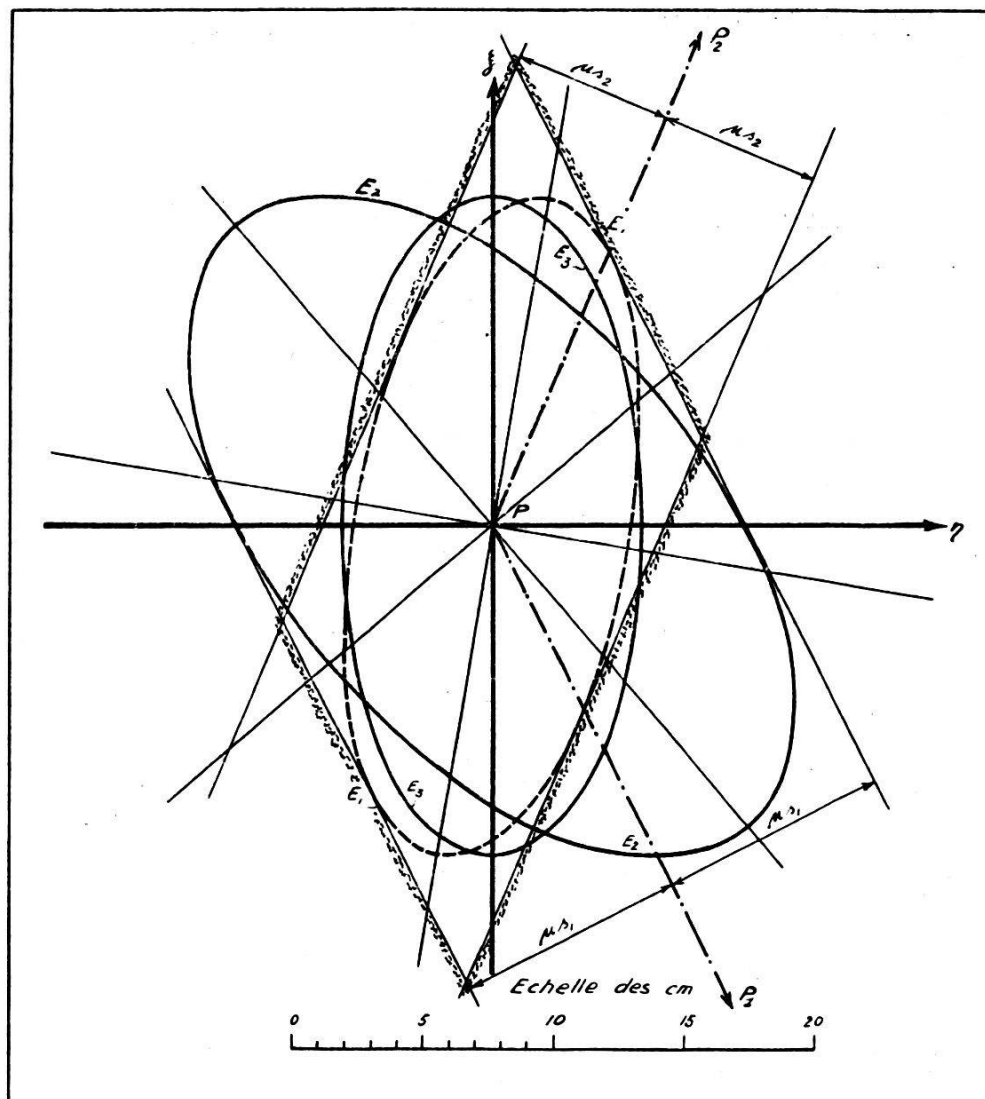


Fig. 2

### Conclusions

Nous constatons que les trois méthodes envisagées donnent lieu à des ellipses d'erreur différentes (voir fig. 2). Il en résulte que la méthode d'observation doit être donnée avec précision si l'on ne veut pas être amené à des résultats erronés en calculant les erreurs. Si les erreurs moyennes  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  après détermination de  $P$ , ne doivent pas dépasser  $\mu$  en valeur absolue, la suite des opérations doit être répétée plusieurs fois lorsqu'on applique les méthodes II ou III.

Terminons ces remarques en ajoutant que tous ces résultats peuvent également être obtenus par voie géométrique, ce qui facilite parfois considérablement la compréhension de ces problèmes de nature assez subtile.