Zeitschrift: Schweizerische Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Revue technique suisse des mensurations et améliorations foncières

Herausgeber: Schweizerischer Geometerverein = Association suisse des géomètres

Band: 43 (1945)

Heft: 8

Artikel: Les calculs de compensation et le contrôle des poids

Autor: Ansermet, A.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-202950

Les calculs de compensation et le contrôle des poids

Par *A. Ansermet.*

Les calculs de compensation nécessitent de nombreux contrôles portant notamment sur l'expression $[pvv]$ qui doit être rendue minimum. Les v sont les résidus

$$l_i + v_i = f_i\,(xyz\,\ldots) \qquad\qquad i = 1, 2 \ldots n$$

et les p les poids respectifs des quantités mesurées l_i. Il y a n observations, u inconnues $(xyz\ldots)$ et $n - u = r$ observations en excédent. Dans certains problèmes il est opportun d'éliminer les inconnues; les résidus v seuls subsistent dans un système de r équations.

Après compensation les expressions $(l_i + v_i)$ sont affectées de poids P_i $(i = 1, 2 \ldots n)$ dont le calcul est souvent demandé. Un contrôle est donc utile; or une relation très simple existe entre les valeurs p_i et P_i:

la somme des quotients $p_i : P_i$ est égale au nombre des inconnues

$$\left[p_i : P_i\right]_1^n = u = n - r$$

Cette valeur est un extrêmum valable lorsqu'on applique le principe $[pvv] = \min$. La démonstration est aisée; considérons le système

$$l_i + v_i = a_i x + b_i y + c_i z \qquad\qquad (u = 3)$$

$$P_i = \text{poids de } (a_i x + b_i y + c_i z)$$

et appliquons les formules aux coefficients de poids

$$\frac{1}{P_i} = a_i^2 \left[\frac{\alpha\alpha}{p}\right] + b_i^2 \left[\frac{\beta\beta}{p}\right] + c_i^2 \left[\frac{\gamma\gamma}{p}\right] + 2\,a_i\,b_i \left[\frac{\alpha\beta}{p}\right] + \\ + 2a_i\,c_i \left[\frac{\alpha\gamma}{p}\right] + 2\,b_i\,c_i \left[\frac{\beta\gamma}{p}\right]$$

$$\begin{aligned}\left[p_i : P_i\right]_1^n &= [paa]\left[\frac{\alpha\alpha}{p}\right] + [pab]\left[\frac{\alpha\beta}{p}\right] + [pac]\left[\frac{\alpha\gamma}{p}\right] \\ &+ [pab]\left[\frac{\alpha\beta}{p}\right] + [pbb]\left[\frac{\beta\beta}{p}\right] + [pbc]\left[\frac{\beta\gamma}{p}\right] \\ &+ [pac]\left[\frac{\alpha\gamma}{p}\right] + [pbc]\left[\frac{\beta\gamma}{p}\right] + [pcc]\left[\frac{\gamma\gamma}{p}\right] = 1 + 1 + 1 = u = 3\end{aligned}$$

on peut aussi appliquer la forme sans coefficients de poids

$$\frac{1}{P_i} = \frac{F_1^2}{[paa]} + \frac{[F_2 \cdot 1]^2}{[pbb \cdot 1]} + \frac{[F_3 \cdot 2]^2}{[pcc \cdot 2]} \ldots$$

où $\qquad F_1 = a_i \qquad\qquad [F_2 \cdot 1] = b_i - \dfrac{[pab]}{[paa]}\,a_i \qquad\qquad$ etc. ...

S'il s'agit d'observations conditionelles le calcul est analogue. Considérons le système

$$\begin{aligned} a_1 v_1 + a_2 v_2 \ldots + a_n v_n + w_1 &= 0 \\ b_1 v_1 + b_2 v_2 \ldots + b_n v_n + w_2 &= 0 \\ c_1 v_1 + c_2 v_2 \ldots + c_n v_n + w_3 &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \end{aligned}$$

où $w_1\, w_2\, w_3 \ldots$ sont les discordances fonctions de $l_1\, l_2 \ldots l_n$. Le poids P_i de $(l_i + v_i)$ est donné par

$$\frac{1}{P_i} = \frac{1}{p_i} - \frac{\left(\frac{a_i}{p_i}\right)^2}{\left[\frac{aa}{p}\right]} - \frac{\left[\frac{b_i}{p_i}\cdot 1\right]^2}{\left[\frac{bb}{p}\cdot 1\right]} - \frac{\left[\frac{c_i}{p_i}\cdot 2\right]^2}{\left[\frac{cc}{p}\cdot 2\right]} \ldots\ldots$$

où

$$\left[\frac{b_i}{p_i}\cdot 1\right] = \frac{b_i}{p_i} - \frac{\left[\frac{ab}{p}\right]}{\left[\frac{aa}{p}\right]}\frac{a_i}{p_i} \qquad \left[\frac{c_i}{p_i}\cdot 2\right] = \left[\frac{c_i}{p_i}\cdot 1\right] - \frac{\left[\frac{bc}{p}\cdot 1\right]}{\left[\frac{bb}{p}\cdot 1\right]}\left[\frac{b_i}{p_i}\cdot 1\right]$$

$$\frac{p_i}{P_i} = 1 - p_i\frac{\left(\frac{a_i}{p_i}\right)^2}{\left[\frac{aa}{p}\right]} - p_i\frac{\left[\frac{b_i}{p_i}\cdot 1\right]^2}{\left[\frac{bb}{p}\cdot 1\right]} - p_i\frac{\left[\frac{c_i}{p_i}\cdot 2\right]^2}{\left[\frac{cc}{p}\cdot 2\right]} \ldots\ldots$$

et on vérifie sans peine que $\left[\frac{p_i}{P_i}\right]_1^n = n - 1 - 1 - 1 \ldots = n - r = u$

on peut aussi avoir recours aux cœfficients $Q_{11}\, Q_{12}\, Q_{13}\, Q_{22} \ldots$ qui sont à la base de la résolution indeterminée des équations normales (calcul des $K_1\, K_2\, K_3 \ldots$ en fonction de $w_1\, w_2\, w_3 \ldots$)

$$\frac{1}{P_i} = \frac{1}{p_i} - \frac{a_i}{p_i}L_1 - \frac{b_i}{p_i}L_2 - \frac{c_i}{p_i}L_3 \ldots\ldots \qquad \text{([2] p. 62–66)}$$

ou

$$L_1 = \frac{a_i}{p_i}Q_{11} + \frac{b_i}{p_i}Q_{12} + \frac{c_i}{p_i}Q_{13} \ldots\ldots$$

$$L_2 = \frac{a_i}{p_i}Q_{21} + \frac{b_i}{p_i}Q_{22} + \frac{c_i}{p_i}Q_{23} \ldots\ldots$$

$$L_3 = \frac{a_i}{p_i}Q_{31} + \frac{b_i}{p_i}Q_{32} + \frac{c_i}{p_i}Q_{33} \ldots\ldots$$ d'où l'on déduit

$$\left[\frac{p_i}{P_i}\right]_1^n =$$

$$= n - \left(\left[\frac{aa}{p}\right]Q_{11} + \left[\frac{bb}{p}\right]Q_{22} + \left[\frac{cc}{p}\right]Q_{33} + 2\left[\frac{ab}{p}\right]Q_{12} + 2\left[\frac{ac}{p}\right]Q_{13} + 2\left[\frac{bc}{p}\right]Q_{23}\right)$$

pour $r = 3$

$$\left[p_i : P_i\right]_1^n = n - r = u$$

Applications.

1⁰ *Méthode des combinaisons binaires* (ou de Schreiber)

$$n = \frac{s\,(s - 1)}{2} \qquad u = s - 1 \qquad r = \frac{(s - 1)\,(s - 2)}{2}$$

(s visées mesurées)

$$p_i = 1 \quad (i = 1, 2 \ldots n)$$

Il faut distinguer, après compensation, les poids P_i au nombre de $(s - 1)$ et P'_i au nombre de $\frac{(s - 1)\,(s - 2)}{2}$

$$\left[\frac{1}{P_i}\right]_1^n = (s - 1)\left(\frac{1}{P_i}\right) + \frac{(s - 1)\,(s - 2)}{2}\left(\frac{1}{P'_i}\right) = u = s - 1$$

relation verifiée pour $\frac{1}{P_i} = \frac{1}{P'_i} = \frac{2}{s}$

2⁰ *Nivellement.* Considérons le réseau compensé par M. Ad. Hunziker dans cette Revue (novembre 1944) comprenant 4 repères et 16 lignes ($u = 4$, $n = 16$):

$$\left[\frac{\alpha\alpha}{p}\right] = 0.336; \quad \left[\frac{\beta\beta}{p}\right] = 0.347; \quad \left[\frac{\gamma\gamma}{p}\right] = 0.273; \quad \left[\frac{\delta\delta}{p}\right] = 0.257;$$

$$\left[\frac{\alpha\beta}{p}\right] = + 0.075; \quad \left[\frac{\alpha\gamma}{p}\right] = + 0.016; \quad \left[\frac{\alpha\delta}{p}\right] = + 0.017; \quad \left[\frac{\beta\gamma}{p}\right] = + 0.072;$$

$$\left[\frac{\beta\delta}{p}\right] = + 0.078; \quad \left[\frac{\gamma\delta}{p}\right] = + 0.096.$$

	$1 : P_i =$	p_i	$p_i : P_i =$
1	0.336	1.25	0.42
2	0.336	0.67	0.23
3	0.336 + 0.347 — 2 × 0.075 = 0.530	0.67	0.35
4	0.336	0.53	0.18
5	0.347	0.62	0.22
6	0.347	0.36	0.13
7	0.347 + 0.273 — 2 × 0.072 = 0.476	0.59	0.28
8	0.347 + 0.257 — 2 × 0.078 = 0.450	0.72	0.32
9	0.347	0.33	0.12
10	0.273	0.67	0.18
11	0.273	0.62	0.17
12	0.273	1.00	0.27
13	0.273 + 0.257 — 2 × 0.096 = 0,338	1.43	0.48
14	0.257	1.25	0.32
15	0.257	0.77	0.20
16	0.257	0.46	0.12

$$\left[p_i : P_i\right]_1^n = 3.99$$

(exactement 4.00)

La valeur moyenne du rapport $p_i : P_i = \frac{4}{16} = 0.25$. Ce quotient, dans les cas particulier, varie entre des limites relativement étendues et l'examen de ces résultats est intéressant (limites 0.12 et 0.48)

3⁰ *Compensation d'une station.* Considérons l'exemple traité par R. Helmert ([1], p. 159).

$$
\begin{array}{llllll}
v_1 = l_1 & & +z & & \text{poids} = 9 & \\
v_2 = l_2 & & & +t & \text{»} \quad 8 & n = 8 \\
v_3 = l_3 & & -z & +t & \text{»} \quad 7 & u = 4 \\
v_4 = l_4 & -y & & +t & \text{»} \quad 2 & r = 4 = n - u \\
v_5 = l_5 & +y & & & \text{»} \quad 2 & \\
v_6 = l_6 & -x & +z & & \text{»} \quad 4 & \\
v_7 = l_7 & +x & & & \text{»} \quad 6 & \\
v_8 = l_8 & -x+y & & & \text{»} \quad 2 &
\end{array}
$$

éliminons les 4 inconnues

$$
\begin{array}{l}
+v_1 - v_2 + v_3 + w_1 = 0 \\
-v_2 + v_4 + v_5 + w_2 = 0 \\
-v_1 + v_6 + v_7 + w_3 = 0 \\
-v_5 + v_7 + v_8 + w_4 = 0
\end{array}
$$

$$\left[\frac{aa}{p}\right] = 0.379, \quad \left[\frac{bb}{p}\right] = 1.125, \quad \left[\frac{cc}{p}\right] = 0.528, \quad \left[\frac{dd}{p}\right] = 1.167,$$

$$\left[\frac{ab}{p}\right] = +0.125, \quad \left[\frac{ac}{p}\right] = -0.111, \quad \left[\frac{ad}{p}\right] = \left[\frac{bc}{p}\right] = 0, \quad \left[\frac{bd}{p}\right] = -0.500,$$

$$\left[\frac{cd}{p}\right] = +0.167, \quad \left[\frac{bb}{p}\cdot 1\right] = 1.084, \quad \left[\frac{bc}{p}\cdot 1\right] = +0.037,$$

$$\left[\frac{bd}{p}\cdot 1\right] = -0.500, \quad \left[\frac{cc}{p}\cdot 2\right] = 0.495, \quad \left[\frac{cd}{p}\cdot 2\right] = +0.184,$$

$$\left[\frac{dd}{p}\cdot 2\right] = 0.936, \quad \left[\frac{dd}{p}\cdot 3\right] = 0.868$$

$$p_i : P_i = 1 - p_i \frac{\left(\frac{a_i}{p_i}\right)^2}{\left[\frac{aa}{p}\right]} - p_i \frac{\left[\frac{b_i}{p_i}\cdot 1\right]^2}{\left[\frac{bb}{p}\cdot 1\right]} - p_i \frac{\left[\frac{c_i}{p_i}\cdot 2\right]^2}{\left[\frac{cc}{p}\cdot 2\right]} - p_i \frac{\left[\frac{d_i}{p_i}\cdot 3\right]^2}{\left[\frac{dd}{p}\cdot 3\right]} \cdots$$

La valeur moyenne $p_i : P_i = 0.5$; les limites pour ce quotient sont ici 0.593 et 0.379. Ce sont encore les poids faibles qui sont amplifiés dans la proportion la plus forte. Les discordances w_1, w_2, w_3, w_4 ne jouent bien entendu aucun rôle dans ce calcul; leur valeur numérique ainsi que celle des termes absolues l_1, l_2 ... l_8 n'est donc pas donnée.

$i = 1$	$p_i : P_i$	$= 1$	$— 0.293$	$— 0.012$	$— 0.111$	$— 0.001$	$= 0.583$
2	»	$= 1$	$— 0.330$	$— 0.052$	$— 0.018$	$— 0.007$	$= 0.593$
3	»	$= 1$	$— 0.377$	$— 0.014$	$— 0.026$	$— 0.012$	$= 0.571$
4	»	$= 1$	0	$— 0.461$	$— 0.001$	$— 0.130$	$= 0.408$
5	»	$= 1$	0	$— 0.461$	$— 0.001$	$— 0.159$	$= 0.379$
6	»	$= 1$	0	0	$— 0.505$	$— 0.040$	$= 0.455$
7	»	$= 1$	0	0	$— 0.337$	$— 0.076$	$= 0.587$
8	»	$= 1$	0	0	0	$— 0.576$	$= 0.424$
sommes:		8	$— 1.000$	$— 1.000$	$— 0.999$	$— 1.001$	$= 4.000$
							$= u = n — r$

4⁰ *Méthode des secteurs* (Dr. H. Wild). Le contrôle des poids est ici très utile; désignons par p_s et p_i les poids respectifs des secteurs et des angles intermédiaires et par P_s et P_i les poids correspondants *après* compensation

$$\left[\frac{p_s}{P_s}\right] + \left[\frac{p_i}{P_i}\right] = u$$

Exemples: 3 secteurs, 6 angles intermédiaires (2 par secteur)

$$\text{pour } p_s = p_i = 1 \quad \text{on a}$$

$$3 \times \frac{1}{P_s} + 6 \times \frac{1}{P_i} = 5 = u \qquad P_s = 2.25 \qquad P_i = \frac{18}{11}$$

4 secteurs, 8 angles intermédiaires (2 par secteur)

$$4 \times \frac{1}{P_s} + 8 \times \frac{1}{P_i} = 7 \qquad P_s = 2.00 \qquad P_i = \frac{8}{5}$$

Si on a recours à une compensation approchée le calcul est plus complexe car la détermination des poids présente une certaine ambiguité ([3] p. 124–129).

En *résumé* le contrôle $[p : P]$ des poids *avant* et *après* compensation peut rendre de réels services. La condition $[pvv]$ = min entraîne $[p : P] = u$ et réciproquement.

Littérature

[1] R. Helmert, Ausgleichsrechnung.
[2] C. F. Baeschlin, Ausgleichsrechnung und Landesvermessung.
[3] Eggert-Jordan, Vermessungskunde I.
[4] Koll O., Methode der kl. Quadrate.
[5] Wellisch S., Theorie und Praxis der Ausgleichsrechnung.