Zeitschrift: Schweizerische Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Revue technique suisse des mensurations et améliorations foncières

Band: 43 (1945)

Heft: 11

Artikel: Die örtliche Längenverzerrung : in der winkeltreuen Zylinderprojektion der Schweiz

Autor: Bolliger, J.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-202961

vielfach noch die Auffassung herrscht, man benötige nun die Fixpunkte nicht mehr, und daß der Nachführungsgeometer die Punkte nur dann kontrolliert, wenn er sie für seine Vermessungsarbeiten braucht oder wenn er für eine spezielle Kontrolle beauftragt und bezahlt wird.

Die örtliche Längenverzerrung

in der winkeltreuen Zylinderprojektion der Schweiz

Von J. Bolliger

In dem von M. Rosenmund bearbeiteten „Projektionssystem der schweizerischen Landesvermessung" wird die Längenverzerrung für die Arbeit des Trigonometers eingehend behandelt. Einleitend gibt er auch die Formel für die *örtliche Längenverzerrung* — wie wir im folgenden die elementare Längenverzerrung eines Ortes nennen wollen —, jedoch ohne besondere Ableitung. Man kann nun aus Rosenmunds Tafeln der Werte von σ die örtliche Längenverzerrung in Einheiten der 7. Mantissenstelle entnehmen, unter der Voraussetzung, daß für einen beliebigen Ort $X_2 = X_1$ und damit $\sigma_1 = 0$ wird. Um diesen Umweg zu vermeiden und die Verzerrung anschaulicher als in Mantissenstellen darzustellen, soll im folgenden kurz die Formel, auf der ja auch die Flächenverzerrung aufgebaut ist, abgeleitet und in praktischer Schlußform gegeben werden.

Aus der Bedingung der winkeltreuen Übertragung auf den Zylindermantel erhält man für das Linienelement ds der Kugel und das entsprechende Element ds' der Projektionsebene für den Übergang von der Kugel auf den Zylinder und damit in die Ebene das *Verzerrungsverhältnis*

$$\frac{ds'}{ds} = m = \frac{1}{\cos b} \tag{1}$$

Es ist dabei b die Kugelbreite für ein Kugelkoordinatensystem, dessen Achse mit der Zylinderachse zusammenfällt, was dem Normalfall der winkeltreuen Zylinderprojektion entspricht. Damit kommen die einfachen Projektionsgesetze zur Anwendung, wie sie für die Merkatorprojektion mit Berührungskreis im Äquator gelten. Da unsere Kugelbreite b nicht der geographischen Breite φ entspricht, sondern dem Großkreisbogenabstand senkrecht zum Zylinderberührungskreis durch Bern, kann b auf einfache Weise durch den ebenen X-Koordinatenwert ersetzt werden.

Die Kugelbreite b ist für unser Land stets ein kleiner Bogen, so daß wir $\cos b$ in Reihenform einsetzen dürfen. Wir brauchen für unsern Zweck nur die Glieder bis und mit der 2. Ordnung und erhalten damit aus 1)

$$m = \frac{1}{1 - \frac{b^2}{2} + \ldots}$$

und unter Anwendung der Binomialreihe:

$$m = 1 + \frac{b^2}{2} - \ldots$$

Aus den Merkator-Projektionsgesetzen in Reihenform haben wir

$$b = \frac{X}{R} - \ldots, \text{ woraus } \frac{b^2}{2} = \frac{X^2}{2R^2} - \ldots$$

Darin ist R der Radius der Projektionskugel der Schweiz. Wir setzen den letzten Wert in das obige Verzerrungsverhältnis ein und erhalten die von Rosenmund einleitend gegebene Formel für das *Verzerrungsverhältnis:*

$$m = 1 + \frac{X^2}{2R^2} \tag{1*}$$

Setzen wir in das Verzerrungsverhältnis den konstanten Wert für $R = 6378{,}8$ km und den X-Koordinatenwert unseres Ortes in km ein, so erhalten wir aus 1) die *Länge der Projektionsstrecke:*

$$ds' = m\, ds = ds + ds\, \frac{X^2}{2R^2} \tag{2}$$

Das Glied mit X^2 ist der Streckenzuwachs, die Längenverzerrung in der Projektion, die stets positiv ist, und es zeigt, daß die örtliche Längenverzerrung nur von der Entfernung eines Ortes von der Y-Achse abhängt und bei gegebenem X in der Y-Richtung konstant bleibt. Die Verzerrung ist unabhängig vom Vorzeichen von X, also symmetrisch zur Y-Achse gleich groß. Für ein unendlich kleines Linienelement ist wegen der Winkeltreue die Verzerrung von der Richtung der Strecke unabhängig. Man sieht aber aus dem Glied von X^2 leicht, daß für endliche Strecken die Verzerrung gegen die Y-Achse hin abnimmt, und mit der Drehung der Strecke bis zur Richtung entgegen der Y-Achse zu einem Maximum anschwillt, also nicht mehr von der Richtung unabhängig ist. Das heißt, daß wir die örtliche Längenverzerrung nur für unendlich kleine Strecken genau angeben können, ihre Anwendung auf endliche Strecken wird mit der zu fordernden Genauigkeit begrenzt. Dies ist der Grund, warum in der Ableitung keine höhern Glieder gegeben wurden. Immerhin gibt die örtliche Längenverzerrung doch das Maß der Verzerrung und damit ein Urteil über anzubringende Korrekturen und in vielen Fällen die Korrektur selbst.

Für den praktischen Gebrauch wollen wir die örtliche Längenverzerrung in Promillen angeben. Wir erhalten aus 2) die *Verzerrung der Längeneinheit:*

$$\frac{ds' - ds}{ds} = \frac{X^2}{2R^2}$$

Auf 1000 Längeneinheiten gibt das die gesuchte örtliche Längenverzerrung in Promillen:

$$m\,{}^0\!/_{00} = \frac{1000}{2R^2}\, X^2$$

Setzen wir den konstanten Wert in diese Formel ein, und zwar für das logarithmische Rechnen dessen Logarithmus, was durch eckige Klammern angedeutet sein soll, so erhalten wir unsere Gebrauchsformeln für X in km für die *örtliche Längenverzerrung:*

$$m\,{}^0/_{00} = [5.08949 - 10]\;X^2 \tag{3}$$

und für den Rechenschieber:

$$m\,{}^0/_{00} = 1.23\;X^2\;10^{-5} \tag{3*}$$

Die folgende Zusammenstellung orientiert über die Größe der Längenverzerrung mit wachsendem Abstand von der Y-Achse. Die in mm angegebene Verzerrung bezieht sich auf die Streckeneinheit von 1 km, was streng nur in der Y-Richtung zutrifft. Um das Abweichen von dieser Verzerrung in der maximal ändernden Richtung beurteilen zu können, ist ferner eine unterste Spalte mit der Abweichung auf 1 km Längenausdehnung in der X-Richtung beigefügt.

Örtliche Längenverzerrung in der schweizerischen Projektionsebene

Ortslage X in km	$\pm$	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
Längenverzerrung W–E auf 1 km in mm	+	1	5	11	20	31	44	60	79	100	123	149	177
Verzerrungsänderung N–S auf 1 km in mm	$\pm$	0.1	0.2	0.4	0.5	0.6	0.7	0.9	1.0	1.1	1.2	1.4	1.5

Die Grenzverhältnisse am Bodensee

Von O. Possert, alt Kantonsgeometer

Im Jahre 1904 ist zwischen den Kantonen St. Gallen und Thurgau eine Bereinigung der Kantonsgrenze vereinbart worden. Auf dem Festlande nahm die Regulierung ihren ungehinderten Fortgang, im Bodensee dagegen traten zwischen den beauftragten Funktionären Meinungsverschiedenheiten auf, in bezug auf die thurgauische Enklave *Horn* im Kanton St. Gallen und der zwischen Horn und Kt. Thurgau eingekeilten st. gallischen Gemeinde Steinach. Im Grenzbeschrieb heißt es:

„Daß zwischen Horn und Goldach scheiden sich die beiden Territorien aus der Mitte des Bodensees, dem badischen Abscheiden gemäß gegen Mittag, allwo die Goldach in den besagten Bodensee fließt. Zwischen Horn und Steinach: „Dieser zeiget der Geräde nach hinunterwärts (gemeint ist Marke 11 an der Seestraße Horn–Steinach) bis in den Bodensee hinein, soweit es dem Abscheiden gemäß ist, von da dem See nach bis