

**Zeitschrift:** Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie

**Band:** 46 (1948)

**Heft:** 3

**Artikel:** Über den Rückwärtseinschnitt aus fehlerharten Festpunkten [Fortsetzung]

**Autor:** Ackerl, Franz

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-205579>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 08.11.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

**VERMESSUNG UND KULTURTECHNIK****Revue technique Suisse des Mensurations et du Génie rural**

Herausgeber: Schweiz. Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik. Offiz. Organ der Schweiz. Gesellschaft f. Photogrammetrie

Editeur: Société Suisse de Mensuration et du Génie rural. Organe officiel de la Société Suisse de Photogrammétrie

REDAKTION: Dr. h. c. G. F. BAESCHLIN, Professor, Zollikon (Zürich)

Ständiger Mitarbeiter f. Kulturtechnik: E. RAMSER, Prof. f. Kulturtechnik ETH., Freiestr. 72, Zürich

Redaktionsschluß: Am 1. jeden Monats

Expedition, Administration und Inseratenannahme: BUCHDRUCKEREI WINTERTHUR AG.

Schluß der Inseratenannahme am 6. jeden Monats

**NR. 3 • XLVI. JAHRGANG**

der „Schweizerischen Geometer-Zeitung“  
Erscheinend am 2. Dienstag jeden Monats

9. MÄRZ 1948

INSERATE: 25 Rp. per einspalt. mm-Zeile.  
Bei Wiederholungen Rabatt gemäß spez. Tarif

**ABONNEMENTE:**

Schweiz Fr. 15.—, Ausland Fr. 20.— jährlich

Für Mitglieder der Schweiz. Gesellschaft für  
Photogrammetrie Fr. 10.— jährlich

Unentgeltlich für Mitglieder des Schweiz.  
Vereins f. Vermessungswesen u. Kulturtechnik

## Über den Rückwärtseinschnitt aus fehlerhaften Festpunkten

Von Prof. Dr. Franz Ackerl, Wien.

(Fortsetzung)

Zur Erreichung einer besseren Übersicht schreiben wir die Gl. (10a) in der folgenden Art:

$$M^2_P = \left\{ \begin{array}{l} \text{I} \} m^2_{x_A} + \{ \text{II} \} m^2_{y_A} + \{ \text{III} \} m^2_{x_B} + \{ \text{IV} \} m^2_{y_B} \\ + \{ \text{V} \} m^2_{x_M} + \{ \text{VI} \} m^2_{y_M} + \{ \text{VII} \} m^2_{\alpha} + \{ \text{VIII} \} m^2_{\beta} \end{array} \right\} \quad (25a)$$

Für Vergleichszwecke sind die Gleichungsnummern von der genannten Arbeit [1] her übernommen, *in der jedoch nur der Einfluß der fehlerhaften Festpunkte, nicht aber die Wirkung der Winkelfehler abgeleitet wurde.*

Die Beiträge der Lagefehler der gegebenen Punkte zum entstehenden Punktfehler  $M_P$  ergeben sich daher mit:

$$\mu^2_A = \{ \text{I} \} m^2_{x_A} + \{ \text{II} \} m^2_{y_A}, \quad (26a)$$

$$\mu^2_B = \{ \text{III} \} m^2_{x_B} + \{ \text{IV} \} m^2_{y_B}, \quad (27a)$$

$$\mu^2_M = \{ \text{V} \} m^2_{x_M} + \{ \text{VI} \} m^2_{y_M}. \quad (28a)$$

Mit Übergang aller Einzelheiten werden hier lediglich die zur Auswertung der Formel (25a) erforderlichen Koeffizienten  $\{I\} - \{VI\}$  angegeben. Sie lauten:

$$\left. \begin{aligned} \{I\} &= \frac{c^2 d^2}{a^2 s^2} \sin^2 t_{AP}, & \{II\} &= \frac{c^2 d^2}{a^2 s^2} \cos^2 t_{AP}, \\ \{III\} &= \frac{c^2 d^2}{b^2 s^2} \sin^2 t_{BP}, & \{IV\} &= \frac{c^2 d^2}{b^2 s^2} \cos^2 t_{BP}, \\ \{V\} &= \frac{c^2 d^2}{a^2 b^2} \frac{S^2}{s^2} \sin^2 t_{MP}, & \{VI\} &= \frac{c^2 d^2}{a^2 b^2} \frac{S^2}{s^2} \cos^2 t_{MP}. \end{aligned} \right\} (56a)$$

Aus den Bezeichnungen der Abb. 1 bzw. 2 erkennen wir, daß sämtliche zur Berechnung der Koeffizienten  $\{K\}$  notwendigen Größen, mit für praktische Zwecke hinreichender Genauigkeit, aus einem guten Netzplan abgegriffen werden können, sofern man in diesem noch die beiden Hilfskreise  $A M P C$  bzw.  $B D P M$  mit den Durchmessern  $c$  bzw.  $d$  konstruiert.

Für eine möglichst vereinfachte Berechnung der durchaus gleichartig gebauten Koeffizienten wird man diese in günstiger Weise z. B. mit dem für jeden bestimmten Rückwärtseinschnitt typischen Betrag  $(c^2 d^2 : a^2 b^2)$  ausdrücken.

Wenn die Koordinatenfehler  $m_{x_i}, m_{y_i}$  der gegebenen Punkte einzeln bekannt sind, dann erhalten wir mit den Beziehungen (56a) aus Gl. (25a) den Gesamtfehler des Punktes  $P$ .

Sind indessen die Koordinatenfehler nicht gesondert gegeben, wohl aber die Punktfehler  $M_i$  der Ausgangspunkte  $i$ , dann entstehen aus den Gl. (26a), (27a), (28a) mit der Annahme  $m_{x_i} = m_{y_i} = m_i, m^2_i = \frac{M^2_i}{2}$ , die folgenden Fehleranteile:

$$\mu^2_A = \left( \{I\} + \{II\} \right) \frac{M^2_A}{2}, \quad (57a)$$

$$\mu^2_B = \left( \{III\} + \{IV\} \right) \frac{M^2_B}{2}, \quad (58a)$$

$$\mu^2_M = \left( \{V\} + \{VI\} \right) \frac{M^2_M}{2}. \quad (59a)$$

Diese nun vom Koordinatensystem nicht mehr abhängigen Beträge nehmen mit den Gleichungen (56a) die folgenden Formen an:

$$\mu^2_A = \frac{c^2 d^2}{a^2 s^2} \frac{M^2_A}{2}, \quad \mu^2_B = \frac{c^2 d^2}{b^2 s^2} \frac{M^2_B}{2}, \quad \mu^2_M = \frac{c^2 d^2}{a^2 b^2} \frac{S^2}{s^2} \frac{M^2_M}{2}. \quad (60a)$$

Wenn keine Einzelangaben für die Werte  $M_i$  vorliegen und ein Durchschnittswert  $M_A = M_B = M_M = M$  angenommen wird, so erhalten wir als Lagefehler des Neupunktes:

$$M^2_P = \frac{c^2 d^2}{a^2 b^2} \frac{a^2 + b^2 + S^2}{s^2} \frac{M^2}{2}. \quad (61a)$$

Vor einer Betrachtung dieser Ergebnisse wollen wir nun, der Vollständigkeit halber, noch die Wirkung der fehlerhaft beobachteten Winkel ableiten, obgleich hierfür schon jene Darstellung vorliegt, die in [4] (S. 450) bzw. [5] (S. 135) angegeben ist. Es wird sich indessen zeigen, daß durch die hier verwendete Bestimmung mit anderen als den von *Eggert* benutzten Unterlagen eine übersichtlichere Lösung entsteht, bei der jede Hilfskonstruktion vermieden wird.

Im Hinblick auf die Formel (10) sind aus den Gl. (8), unter Beachtung von (4)–(7) und (9), die folgenden Differentialgleichungen zu entwickeln:

$$\frac{\partial \xi}{\partial \alpha} = \frac{\partial \xi}{\partial Z'} \frac{\partial Z'}{\partial \alpha} + \frac{\partial \xi}{\partial N'} \frac{\partial N'}{\partial \alpha} + \frac{\partial \xi}{\partial f_1'} \frac{\partial f_1'}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} = \frac{\partial \eta}{\partial Z'} \frac{\partial Z'}{\partial \alpha} + \frac{\partial \eta}{\partial N'} \frac{\partial N'}{\partial \alpha} + \frac{\partial \eta}{\partial f_2'} \frac{\partial f_2'}{\partial \alpha}, \quad (62)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial \beta} = \frac{\partial \xi}{\partial Z'} \frac{\partial Z'}{\partial \beta} + \frac{\partial \xi}{\partial N'} \frac{\partial N'}{\partial \beta} + \frac{\partial \xi}{\partial f_1'} \frac{\partial f_1'}{\partial \beta}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial \beta} = \frac{\partial \eta}{\partial Z'} \frac{\partial Z'}{\partial \beta} + \frac{\partial \eta}{\partial N'} \frac{\partial N'}{\partial \beta} + \frac{\partial \eta}{\partial f_2'} \frac{\partial f_2'}{\partial \beta}.$$

Aus Raumgründen werden die Ergebnisse für das Koordinatensystem  $\xi, \eta$  hier nicht mitgeteilt. Wie schon weiter vorne (nach Gl. (10)) bemerkt wurde, gehen wir, zur Vereinfachung der folgenden Umformungen, auf ein Parallelsystem  $x // \xi, y // \eta$  mit dem Ursprung in  $M$  über. Aus den grundlegenden Beziehungen (1)–(9) entstehen damit die folgenden Ausdrücke:

$$\left. \begin{aligned} y_C - y_A &= -x_A \operatorname{ct} \alpha, & x_C - x_A &= y_A \operatorname{ct} \alpha, \\ y_D - y_B &= x_B \operatorname{ct} \beta, & x_D - x_B &= -y_B \operatorname{ct} \beta, \end{aligned} \right\} (1a)$$

$$y = -A(x_D - x_C) = A f_2, \quad x = A(y_D - y_C) = A f_1, \quad (2a)$$

$$x_D - x_C = -f_2, \quad y_D - y_C = f_1, \quad (3a)$$

$$A = \frac{y_C(x_C - x_D) + x_C(y_D - y_C)}{(y_D - y_C)^2 + (x_D - x_C)^2} = \frac{Z}{N}, \quad (4a)$$

$$Z = y_C f_2 + x_C f_1 = x_C y_D - x_D y_C, \quad (5a)$$

$$N = f_1^2 + f_2^2 = \overline{CD}^2 = s^2, \quad (6a)$$

$$2 F = x_A y_B - x_B y_A, (F = \text{Dreiecksfläche } A M B) \quad (7a)$$

$$x = \frac{Z}{N} f_1, \quad y = \frac{Z}{N} f_2, \quad (8a)$$

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= x_A \operatorname{ct} \alpha + x_B \operatorname{ct} \beta + (y_B - y_A), \\ f_2 &= y_A \operatorname{ct} \alpha + y_B \operatorname{ct} \beta - (x_B - x_A), \end{aligned} \right\} \quad (9a)$$

Wenn wir die Gl. (62) ebenfalls auf das Koordinatensystem  $x, y$  mit dem Ursprung  $M$  beziehen, so ergeben sich schließlich die folgenden Werte:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \alpha} &= -\frac{x}{\sin^2 \alpha} \left\{ \frac{1}{Z} (x_A x_D + y_A y_D) - \frac{2}{N} (x_A f_1 + y_A f_2) + \frac{x_A}{f_1} \right\}, \\ \frac{\partial y}{\partial \alpha} &= -\frac{y}{\sin^2 \alpha} \left\{ \frac{1}{Z} (x_A x_D + y_A y_D) - \frac{2}{N} (x_A f_1 + y_A f_2) + \frac{y_A}{f_2} \right\}, \\ \frac{\partial x}{\partial \beta} &= -\frac{x}{\sin^2 \beta} \left\{ \frac{1}{Z} (x_B x_C + y_B y_C) - \frac{2}{N} (x_B f_1 + y_B f_2) + \frac{x_B}{f_1} \right\}, \\ \frac{\partial y}{\partial \beta} &= -\frac{y}{\sin^2 \beta} \left\{ \frac{1}{Z} (x_B x_C + y_B y_C) - \frac{2}{N} (x_B f_1 + y_B f_2) + \frac{y_B}{f_2} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (62a)$$

Faßt man diese Gleichungen entsprechend (10a) und (25a) zusammen und beachtet dabei die aus (2a), (4a), (6a) entstehenden Beziehungen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{x^2 + y^2}{Z^2} &= \frac{1}{N}, \quad \frac{x^2 + y^2}{N^2} = \frac{A^2}{N}, \quad \frac{x^2 + y^2}{Z N} = \frac{A}{N}, \quad x^2 + y^2 = N A^2, \\ \frac{x^2 x_A^2}{f_1} + \frac{y^2 y_A^2}{f_2} &= A^2 (x_A^2 + y_A^2), \quad \frac{x^2 x_A}{f_1} + \frac{y^2 y_A}{f_2} = A^2 (x_A f_1 + y_A f_2), \end{aligned} \right\} \quad (63a)$$

so ergeben sich, nach hier nicht mitgeteilten Umformungen, mit den Bezeichnungen:

$$\left\{ \left( \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right)^2 \right\} = \{ \text{VII} \}, \quad \left\{ \left( \frac{\partial x}{\partial \beta} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \beta} \right)^2 \right\} = \{ \text{VIII} \}, \quad (64a)$$

die folgenden Gleichungen:

$$\left\{ \text{VII} \right\} s^2 \sin^4 \alpha = (x_A x_D + y_A y_D)^2 + (x^2 + y^2) (x_A^2 + y_A^2) - 2 (x_A x_D + y_A y_D) (x_A x + y_A y), \quad (65a)$$

$$\left\{ \text{VIII} \right\} s^2 \sin^4 \beta = (x_B x_C + y_B y_C)^2 + (x^2 + y^2) (x_B^2 + y_B^2) - 2 (x_B x_C + y_B y_C) (x_B x + y_B y). \quad (66a)$$

(Fortsetzung folgt)