

**Zeitschrift:** Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie

**Herausgeber:** Schweizerischer Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Société suisse de la mensuration et du génie rural

**Band:** 51 (1953)

**Heft:** 7

**Artikel:** Die astronomisch-gravimetrische Bestimmung des mittleren Erellipsoides

**Autor:** Ledersteger, K.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-210092>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 20.02.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

graphen und der Wasservorrat im Boden durch Ohmmeter genügend genau ermittelt werden. Die fehlende Wassermenge entspricht dann dem Verdunstungsbetrag, sofern im betreffenden Boden keine Abgabe oder Zufuhr aus dem Grundwasser erfolgen kann.

Anläßlich eines für das Frühjahr 1954 in Aussicht genommenen Vortragskurses an der ETH soll eine umfassende Darstellung dieser neuen Untersuchungsmethoden geboten werden.

## **Die astronomisch-gravimetrische Bestimmung des mittleren Erdellipsoides**

*Von Dr. K. Ledersteger, Wien*

Autorreferat eines Vortrages, gehalten in der Schweizerischen Gesellschaft für Photogrammetrie

Um dieser neuen Methode zur Bestimmung der Normalfigur der Erde ihre richtige systematische Stellung innerhalb des großen Zentralproblems der Geodäsie zuweisen zu können, ist es notwendig, die älteren Lösungsversuche zur Frage nach der Erdfigur in ihren wesentlichen Zügen zu umschreiben. Es liegt dies vor allem in der Eigenheit der neuen Methode begründet, die die Kenntnis der Undulationen des Geoides zur Voraussetzung hat, so daß eigentlich die Abweichungen des Geoides von der Normalfigur der Erde bekannt sein müssen, ehe diese selbst möglichst hypothesenfrei bestimmt werden kann.

Vorerst läßt sich zeigen, daß die Normalfigur der Erde fast vollständig mit einem Rotationsellipsoid zusammenfällt, das wir als mittleres Erdellipsoid bezeichnen. Demgegenüber stellen die „bestanschließenden Ellipsoide“ Approximationen von Geoidausschnitten dar. Ihre Achsen sind infolge der stärkeren Krümmung des Geoides über den Kontinenten im allgemeinen zu klein. Somit kann entgegen den früheren Bemühungen aus der Kombination noch so vieler Gradmessungen oder bestanschließender Ellipsoide niemals das mittlere Erdellipsoid gewonnen werden.

Für das geometrische und physikalische Problem der Erdfigur gibt es vier Lösungswege:

1. die astronomisch-geodätische Bestimmung bestanschließender Ellipsoide;
2. die astronomisch-geodätische Bestimmung des mittleren Erdellipsoides auf Grund isostatisch reduzierter Lotabweichungen;
3. die gravimetrische Bestimmung der Geoidundulationen auf Grund des *Stokesschen* Integrales oder einer Kugelfunktionsentwicklung der Schwerestörungen und
4. die astronomisch-gravimetrische Bestimmung des mittleren Erdellipsoides.

Schließlich können noch Geoidprofile und flächenhafte Geoidausschnitte auf dem Wege des astronomischen Nivellements gewonnen werden.

Für die astronomisch-geodätische Bestimmung bestanschließender Ellipsoide wurden in zeitlicher und fortschrittlicher Aufeinanderfolge drei Methoden entwickelt: die Gradmessungen, die Flächenmethode (*Helmert, Hayford*) und die Methode der Partialsysteme (*Ledersteiger*). Das Prinzip läßt sich am klarsten an der Flächenmethode darlegen. Ein möglichst großes Dreiecksnetz wird auf dem Referenzellipsoid differentiell verschoben und verdreht und gleichzeitig diese differentiell variiert, so daß sich die geodätischen Punktkoordinaten möglichst eng an die astronomischen Beobachtungsdaten anschließen oder daß die restlichen Lotabweichungen in ihrer Quadratsumme zu einem Minimum werden. Aus den Differentialformeln der geodätischen Linie ergeben sich die Änderungen der geodätischen Koordinaten in Funktion von fünf Größen, nämlich der Verschiebung  $d\varphi_0$  und  $d\lambda_0$  im Fundamentalpunkt, der Verdrehung  $d\alpha_0$  daselbst und einer Änderung von Achse  $\frac{da}{a}$  und Abplattung  $da$ :

$$d\varphi_K, d\lambda_K, d\alpha_K = f_\varphi, f_\lambda, f_\alpha \left( d\varphi_0, d\lambda_0, d\alpha_0, \frac{da}{a}, da \right).$$

Dadurch ändern sich die ursprünglichen Lotabweichungen, z. B.

$$(\varphi' - \varphi) \rightarrow (\varphi' - \varphi) - d\varphi = \xi = f \left( d\varphi_0, d\alpha_0, \frac{da}{a}, da \right)$$

und man kann die fünf Unbekannten durch Ausgleichung nach der Bedingung

$$\Sigma (\xi^2 + \eta^2) = \min$$

ermitteln, wobei  $\xi$  und  $\eta$  die meridionale und Ost-West-Komponente der Lotabweichung bedeuten:

$$\xi = (\varphi' - \varphi); \eta = (\lambda' - \lambda) \cos \varphi = (a' - a) \cotg \varphi.$$

Man sieht, daß sich das bestanschließende Ellipsoid zusammen mit der „Minimallage“ des Netzes ergibt, die nicht mit der aus der direkten Projektion der Geoidpunkte auf das mittlere Erdellipsoid hervorgehenden „absoluten Lage“ verwechselt werden darf. Denn die Undulationen des Geoides sind weit ausgedehnt, so daß auch für große Gebiete mit einem systematischen Neigungsunterschied zwischen Geoid und mittlerem Erdellipsoid zu rechnen ist. Damit ist aber bereits der Hauptmangel des Verfahrens aufgedeckt. Die relativen Lotabweichungen tragen nicht nur infolge der fehlerhaften Referenzfläche, sondern auch infolge der mittleren Neigung des Geoides im Vermessungsgebiet einen systematischen Charakter, und es ist unmöglich, diese beiden systematischen Anteile mit obiger Minimumbedingung richtig zu trennen.

Die letzten Bestimmungen von bestanschließenden Ellipsoiden sind folgende:

1. Die Russen haben 1942 aus ihrer neuen Großtriangulation nach der Flächenmethode gefunden (CNIGAIK, *Krassowski*):  
 $a = 6\,378\,245 \text{ m}$ ;  $\alpha = 1:298,3$
2. *Jeffreys* fand 1948 aus einer Kombination weltweiter Gradmessungen und Lotabweichungssysteme:  
 $a = 6\,378\,097 \pm 31 \text{ m}$ ;  $\alpha = 1:(298,85 \pm 0,85)$
3. *Ledersteger* erhielt 1948 und 1949 für Europa bis ungefähr zum 30. Meridian nach der Methode der Partialsysteme:  
 $a = 6\,377\,879 \pm 37 \text{ m}$ ;  $\alpha = 1:(298,6 \pm 1,1)$ .

Demgegenüber fand *Hayford* 1909 aus dem gesamten nordamerikanischen Material nach der Flächenmethode und mit unreduzierten Lotabweichungen, also als bestanschließendes Ellipsoid für Nordamerika:

$$a = 6\,378\,062 \text{ m}; \alpha = 1:298,2,$$

hingegen nach vorhergehender isostatischer Reduktion der Lotabweichungen als Approximation des mittleren Erdellipsoides:

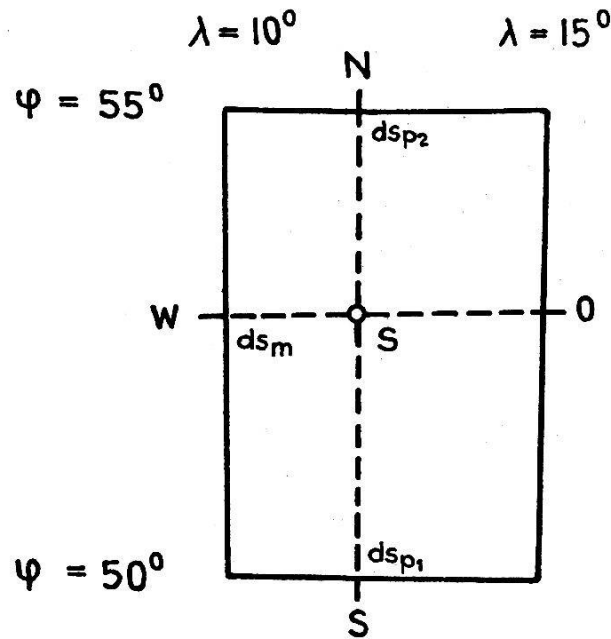
$$a = 6\,378\,388 \text{ m}; \alpha = 1:297,0.$$

Dieses Ellipsoid wurde 1924 zum „Internationalen Ellipsoid“ erklärt und als einheitliche Referenzfläche empfohlen. Der Vergleich des internationalen Ellipsoides mit den beiden darüberstehenden läßt deutlich die systematische Achsenverkürzung der bestanschließenden Ellipsoide erkennen, die in Europa ungefähr doppelt so groß ist wie in Amerika.

Zur astronomisch-gravimetrischen Bestimmung des mittleren Erdellipsoides benötigt man die Undulationen des Geoides, um aus ihnen die gravimetrischen Lotabweichungen abzuleiten. Die Undulationen des Geoides werden bekanntlich mit Hilfe der *Stokesschen* Formel aus den Schwerestörungen berechnet. Die beiden bisherigen Versuche, nämlich das Geoid von *Hirvonen* (1934) und das Geoid von *Tanni* (1948) führten auf mittlere Undulationen von nur 50 m, bzw. 30 m.

Weil diese Geoidbestimmung nach der *Stokesschen* Formel weitgehend unabhängig ist von einem Fehler in der angenommenen Achse der Bezugsfläche, vermag sie die Sollwerte für die auf das Normalsphäroid bezogenen Lotabweichungen zu liefern. Liegt auf einem beliebigen Referenzellipsoid ein möglichst großes Lotabweichungssystem vor, so muß dieses zunächst auf das Ellipsoid derselben Achse, jedoch mit der *Hayfordschen* Abplattung 1:297,0 transformiert werden. Denn diese Abplattung, die übrigens sehr gut mit den Bestimmungen aus dem *Clairautschen* Theorem übereinstimmt, ist in der internationalen Schwereformel und damit in den in das *Stekessche* Integral eingeführten Schwerestörungen vorweggenommen. Dann aber kann die Achsenverbesserung und die Netzverschiebung so ermittelt werden, daß die gegebenen relativen Lotabweichungen möglichst vollständig in die Sollwerte übergeführt werden. Die Minimumforderung gilt nun wirklich für rein zufällige Fehler und nicht mehr für physikalische und noch dazu systematische Größen.

*Tanni* hat die Undulationen für die Eckpunkte von 5°-Feldern bestimmt. Man wird daher den gegebenen kontinentalen Netzverband nach diesen Feldern in Teilsysteme zerlegen und wie bei der Methode der Partialsysteme die auf den jeweiligen Schwerpunkt bezogenen mittleren Komponenten  $\xi$  und  $\eta$  der relativen Lotabweichung berechnen, die bei genügender Dichte und guter Verteilung der astronomischen Stationen einen mehr oder minder repräsentativen Charakter für das Feld aufweisen werden. Sodann zeichnet man mit Hilfe der diskreten *Tannischen* Undulationen des aktuellen Geoides aus freier Hand Meridian- und Parallelkreisprofile, an denen man für die Breite und Länge jedes Schwerpunktes



die für die Randlinien des Feldes geltenden Undulationsbeträge  $S$ ,  $W$ ,  $N$ ,  $O$  abliest. Nach der Grundformel für das astronomische Nivellement gilt nun für die relative Geoiderhebung, wenn man im nordöstlichen Azimut vorwärtsschreitet:

$$dN = -\varepsilon ds = -(\xi \cos x + \eta \sin x) \cdot ds.$$

Spezialisiert man diese Formel für die Richtung des Meridians und Parallels:

$$dN_m = -\frac{\xi''}{\rho''} ds_m; \quad dN_p = -\frac{\eta''}{\rho''} ds_p,$$

so erhält man die Sollwerte:

$$\xi''_{\text{soll}} = -\frac{\rho''}{ds_m} \cdot (N - S); \quad \eta''_{\text{soll}} = -\frac{\rho''}{ds_p} (O - W),$$

wobei  $ds_m$  und  $ds_p$  die leicht berechenbaren linearen Längen der Randlinien des Feldes darstellen. Mithin sind die Sollwerte der gravimetrischen Lotabweichungen aus den Neigungen der Geoidprofile abgeleitet.

Die „absolute Lotabweichungsausgleichung“ kann jetzt auf Grund der Fehlergleichungen:

$$\xi - d\varphi \left( d\varphi_0, d\alpha_0, \frac{d\alpha}{a} \right) = \xi_{\text{soll}} - v_\varphi$$

$$\eta - d\lambda \left( d\varphi_0, d\lambda_0, d\alpha_0, \frac{d\alpha}{a} \right) \cos \varphi = \eta_{\text{soll}} - v_\lambda$$

nach der Minimumforderung

$$\Sigma (v_\varphi^2 + v_\lambda^2) = \min$$

erfolgen. An Stelle eines bestanschließenden Ellipsoides und der dazugehörigen Minimallage des Netzes liefert sie das mittlere Erdellipsoid und die durch die reine Projektion definierte absolute Lage des Netzes, weil durch die Kenntnis der gravimetrischen Lotabweichungskomponenten die richtige Zerlegung der beiden systematischen Anteile in den relativen Lotabweichungen verbürgt ist. Übrigens sind hier genau so wie bei der älteren Lotabweichungsausgleichung die Schwierigkeiten außer acht gelassen worden, die sich aus der Doppelbestimmung der  $\eta$ -Komponente und der Existenz *Laplacescher* Widersprüche

$$(\alpha' - \alpha) - (\lambda' - \lambda) \sin \varphi = w$$

ergeben; sie berühren das Wesen der Methoden nicht.

Nach diesem Verfahren fand sich getrennt für Europa und Amerika als Achse des Normalsphäroids der Erde:

Europa:	$a = 6378286 \pm 53 \text{ m}$
Amerika:	$a = 6378282 \pm 44 \text{ m}$
Mittel:	$a = 6378284 \pm 34 \text{ m}$

Die verblüffende Übereinstimmung muß in Anbetracht der Dürftigkeit des zugrundeliegenden Lotabweichungsmaterials und der dem *Tannischen* Geoid noch anhaftenden Mängel als Zufall bezeichnet werden.

Da ferner bei dieser Methode mit unreduzierten Lotabweichungen und mit Undulationen des aktuellen Geoides operiert wurde, eignet sich der Vergleich ihres Ergebnisses mit dem *Hayfordschen* Ellipsoid zu einer Kontrolle der Hypothese der Isostasie. Trotzdem die *Hayfordsche* Achse um etwa 100 m zu groß sein dürfte, darf man, im großen gesehen, die Isostasie durch die absolute Lotabweichungsausgleichung als bestätigt ansehen.

Ein nicht zu unterschätzender Vorteil der neuen Methode ist schließlich darin zu erblicken, daß sie die absolute Lage der durch die Weltmeere getrennten Kontinentalnetze liefert, womit gleichzeitig die gegenseitige Lage kontinentaler Netze mit einer Genauigkeit verbürgt ist, die durch eine trigonometrische Verbindung – etwa durch Hochzieltriangulation über eine Inselbrücke – niemals erreicht werden kann.