

**Zeitschrift:** Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie

**Herausgeber:** Schweizerischer Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Société suisse de la mensuration et du génie rural

**Band:** 56 (1958)

**Heft:** 10

**Artikel:** Über den Einfluss der Stehachsenschiefe auf die Messung der horizontalen Richtungen

**Autor:** Tarczy-Hornoch, A.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-214398>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 30.03.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Société suisse de Photogrammétrie

## Convocation à l'assemblée d'automne

qui aura lieu le samedi, 8 novembre 1958 à 14 h. à Zurich, Zunfthaus zur Waag, Münsterhof 8.

### Ordre du jour:

1. Approbation du procès-verbal de la 31<sup>e</sup> assemblée générale du 19 avril 1958.
2. Communications du comité.
3. Divers.

Une rencontre de spécialistes en cartographie eut lieu au mois de juin dernier aux Etats-Unis. Monsieur le Professeur Imhof, à l'issue de la partie administrative de notre assemblée, présentera un résumé de ce congrès. La première partie de sa conférence traitera du

*Déroulement de la deuxième conférence cartographique internationale, tenue du 16 au 27 juin 1958 à Chicago et Washington.*

Il y parlera des problèmes spécifiques qui ont occupé les délégués et, dans une seconde partie,

*«Où commence le Far West»; impressions et projections lumineuses d'un voyage à travers les Rocky Mountains,*

il décrira une région spécialement intéressante des U.S.A.

Les personnes intéressées sont cordialement invitées à cette séance récréative.

*Le Comité*

## Über den Einfluß der Stehachsenschiefe auf die Messung der horizontalen Richtungen

*Von A. Tarczy-Hornoch, Sopron*

Es ist sehr zu begrüßen, daß in der Arbeit von H. Matthias [1] die Einflüsse der fundamentalen Theodolitfehler systematisch und bündig zusammengestellt wurden. Wertvoll erscheint dabei, daß zunächst die strengen Beziehungen hergeleitet sind, aus denen sich die Gebrauchsformeln ergeben. Daß dabei Bekanntes mitbenützt wurde, ist selbstverständlich; einen Hinweis auf Baeschlins gründliche Arbeit [2] hielten wir aber dennoch als angebracht.

Bei der Behandlung des Einflusses der Stehachsenschiefe finden wir bei Matthias keinen strengen Ausdruck. Dies nachzuholen erscheint nicht nur der Vollständigkeit halber wünschenswert, sondern auch deshalb, weil die so erhaltenen Beziehungen auch bei beliebiger Abweichung der

Umdrehungsachse von der Vertikalen gelten und sich daher zur Umrechnung eines in einer beliebigen Ebene gemessenen Winkels auf die Waagrechte eignen. Die Erörterung gibt dabei Anlaß zur schärferen Unterscheidung einiger Größen.

Zur übersichtlicheren Darstellung legen wir die Zeichenebene der Abbildung 1 in die vertikale Ebene durch das Lot mit dem Zenit  $Z$  und

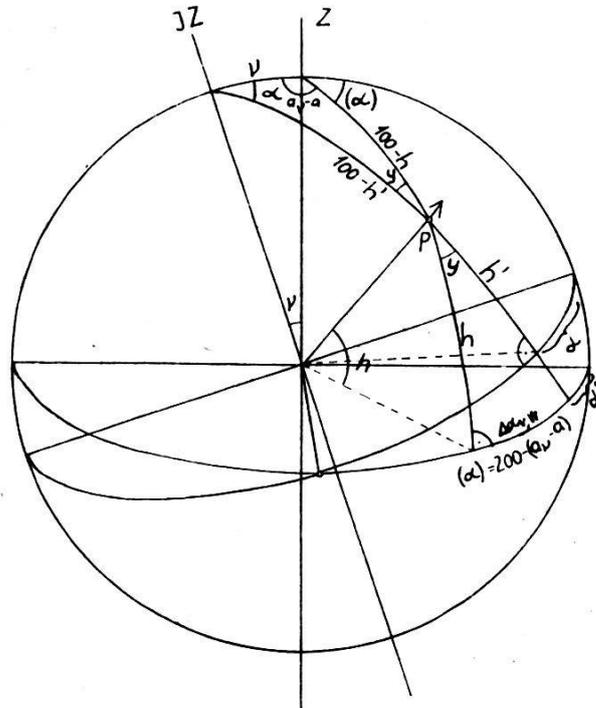


Abb. 1.

durch die Stehachse  $IZ$  des Theodolits. Der Vertikalachsenfehler  $\nu$  liegt folglich in der Zeichenebene. Der Teilkreis wird zunächst – wie bei Matthias – normal zur Stehachse angenommen.  $a$  und  $(a_v - a)$  entsprechen den Bezeichnungen von Matthias, obwohl es besser wäre, den supplementären Winkel zu  $(a_v - a)$  damit zu bezeichnen. Wir führen also noch die Beziehung ein:

$$(a) = 200 - (a_v - a) \quad (1)$$

Wie bei Matthias wird daher der Fehler  $\Delta a_v$  der horizontalen Richtung:

$$\Delta a_v = (a) - a = 200 - (a_v - a) - a \quad (2)$$

und

$$(a) = a^\circ + \Delta a_v \quad (2a)$$

beziehungsweise

$$(a_v - a) = 200 - (a^\circ + \Delta a_v) \quad \text{und} \quad (3)$$

$$a^\circ = (a) - \Delta a_v = 200 - (a_v - a) - \Delta a_v \quad (3a)$$

Da im sphärischen Dreieck  $Z$ ,  $IZ$  und  $P$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{tg} h \sin \nu \frac{1}{\sin (a_\nu - a)} - \cos \nu \operatorname{ctg} (a_\nu - a)$$

ist (siehe Aufsatz [1] Matthias, dieser Zeitschrift Seite 142, Gleichung E3), so wird nach Einführung von Gleichung (3)

$$\frac{1 - \operatorname{tg} (a_\nu - a) \operatorname{tg} \Delta a_\nu}{\operatorname{tg} \Delta a_\nu - \operatorname{tg} (a_\nu - a)} = \frac{\operatorname{tg} h \sin \nu}{\sin (a_\nu - a)} - \cos \nu \operatorname{ctg} (a_\nu - a).$$

Daraus erhält man für  $\operatorname{tg} \Delta a_\nu$  die geschlossene Beziehung:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \Delta a_\nu &= \frac{\sin \nu \operatorname{tg} h \sin (a_\nu - a) + \sin (a_\nu - a) \cos (a_\nu - a) -}{\sin^2 (a_\nu - a) + \cos^2 (a_\nu - a) \cos \nu -} \\ &\quad - \cos \nu \sin (a_\nu - a) \cos (a_\nu - a) \\ &= \frac{- \sin \nu \operatorname{tg} h \cos (a_\nu - a)}{- \sin \nu \operatorname{tg} h \cos (a_\nu - a)} = \\ &= \frac{\sin \nu \operatorname{tg} h + \cos (a_\nu - a) - \cos \nu \cos (a_\nu - a)}{\sin (a_\nu - a) + \operatorname{ctg} (a_\nu - a) \cos (a_\nu - a) \cos \nu - \sin \nu \operatorname{tg} h \operatorname{ctg} (a_\nu - a)} \end{aligned} \quad (4)$$

Falls  $a$  durchlaufend bis 400g gezählt wird, erhalten wir  $\Delta a_\nu$  mit richtigem Vorzeichen.

Bei kleinen Winkeln kann  $\operatorname{tg} \Delta a_\nu = \Delta a_\nu$ ,  $\sin \nu = \nu$  und  $\cos \nu = 1$  gesetzt werden, und man erhält dann aus Gleichung (4) die gute Näherungsformel:

$$\Delta a_\nu = \nu \operatorname{tg} h \sin (a_\nu - a) \quad (4a)$$

Es mag aber sogleich bemerkt werden, daß die geschlossene Formel (4), obwohl sie in aller Strenge gilt, für die praktische Rechnung dennoch eine Näherungsformel darstellt, da zur Berechnung von  $\Delta a_\nu$  der richtige Wert  $(a_\nu - a)$  erforderlich ist. Da man diesen erst nach der Berechnung von  $\Delta a_\nu$  kennt, muß man zur Berechnung von  $\Delta a_\nu$  an Stelle von  $(a_\nu - a)$  zunächst den gemessenen Wert  $a$  einführen.

Wir erhalten aber dadurch einen besseren Ausdruck für  $\Delta a_\nu$ , daß wir  $\Delta a_\nu$  als Funktion der gemessenen – und nicht der gesuchten – Größen ausdrücken. Dabei müssen wir zwei Fälle unterscheiden, je nachdem ob der Theodolit ohne oder mit Höhenkreislibelle versehen ist. Im ersten Falle messen wir  $a$  und  $h'$ ; im zweiten Falle, bei einspielender Libelle,  $a$  und  $h$ .

\*

#### *Theodolit ohne Höhenkreislibelle*

Werden die fehlerhaften Winkel  $\alpha$  und  $h'$  gemessen, so gilt für diese die Beziehung:

$$\operatorname{ctg} (a_\nu - a) = \operatorname{tg} h' \sin \nu \frac{1}{\sin \alpha} - \cos \nu \operatorname{ctg} \alpha$$

Mit Hilfe von Gleichung (3) wird daraus

$$-\operatorname{ctg}(a + \Delta a_\nu) = \frac{\operatorname{tg} a \operatorname{tg} \Delta a_\nu - 1}{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} \Delta a_\nu} = \frac{\operatorname{tg} h' \sin \nu}{\sin a} - \cos \nu \operatorname{ctg} a$$

und nach entsprechender Ordnung:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \Delta a_\nu &= \frac{\operatorname{tg} h' \sin \nu \sin a + \sin a \cos a - \cos \nu \sin a \cos a}{\sin^2 a + \cos^2 a \cos \nu - \operatorname{tg} h' \sin \nu \cos a} = \\ &= \frac{\cos a + \operatorname{tg} h' \sin \nu - \cos \nu \cos a}{\sin a - \operatorname{tg} h' \sin \nu \operatorname{ctg} a + \cos \nu \operatorname{ctg} a \cos a} \end{aligned} \quad (5)$$

Bei kleinem Winkel  $\nu$  gilt hier:

$$\Delta a_\nu = \nu \operatorname{tg} h' \sin a \quad (5a)$$

Der Aufbau dieser Gleichungen ist dem der Gleichungen (4) sehr ähnlich, was auf den Umstand zurückzuführen ist, daß zwischen  $\nu$ ,  $(a_\nu - a)$  und  $h$  ähnliche Beziehungen bestehen wie zwischen  $\nu$ ,  $a$  und  $h'$ .

Gleichung (5) ist namentlich geeignet, den horizontalen Winkel dann zu bestimmen, wenn die Stehachse und der Teilkreis absichtlich stark schief gestellt werden, um etwa eine steil abwärts gehende Zielung überhaupt ausführen zu können.  $a$  wird in diesem Falle am schief gestellten Teilkreis gemessen. Am Höhenkreis kann selbst bei Vorhandensein einer Indexlibelle nicht  $h$ , sondern nur  $h'$  gemessen werden, da bei größeren  $\nu$ -Werten diese Libelle nicht einstellbar ist. Die Bestimmung von größeren Stehachsenschiefen kann am einfachsten mit einer Fernrohrlibelle erfolgen: die Ablesung mit dem größten Höhenwinkel gibt den Wert  $\nu$  und die dieser Stellung entsprechende Ablesung am Teilkreis  $a_\nu$ . Der gesuchte Winkel selbst wird dann aus der Differenz der beiden nach Gleichung (5) beziehungsweise (5a) korrigierten Richtungen erhalten. Bei kleinerem Wert der Stehachsenschiefe kann die Reiterlibelle oder Alhidadenlibelle benützt werden, aus deren größter Abweichung die Stehachsenschiefe und deren Richtung zu bestimmen ist.

Die Gleichungen (5) und (5a) gelten aus naheliegenden Gründen auch dann, wenn man bei Vorhandensein einer Lotabweichung den von der Richtung der Lotabweichung gemessenen Winkel  $a$  auf das Bezugsellipsoid umrechnen will. Am Höhenkreis des Theodolits liest man in diesem Falle bei einspielender Indexlibelle den fehlerhaften Höhenwinkel  $h'$ , am Teilkreis die fehlerhafte Richtung ab, und Gleichung (5) gibt dann die geschlossene strenge Formel für die Berechnung der Korrektur. Es kann aber bei den vorkommenden Werten der Lotabweichungen allgemein die Näherungsformel (5a) genommen werden, die inhaltlich der von Baeschlin angegebenen [3; S. 288] Gleichung (54.4) entspricht.

\*

#### *Theodolit mit Höhenkreislibelle*

Wird am Teilkreis der fehlerhafte Winkel  $a$ , am Höhenkreis dagegen der Höhenwinkel  $h$  durch Verwendung einer Indexlibelle richtig erhalten,

dann muß der Einfluß des Stehachsenfehlers anders ermittelt werden. Da in diesem Falle nach Abbildung 1 im sphärischen Dreieck  $Z, IZ, P$  die Größen  $\nu, 100 - h$  und  $\alpha$ , somit zwei Seiten und ein gegenüberliegender Winkel gegeben und nach Gleichung (3)  $(\alpha_\nu - \alpha) = 200 - (\alpha + \Delta\alpha_\nu)$  beziehungsweise  $\Delta\alpha_\nu$  gesucht werden, so müssen wir für die letzteren zwei Lösungen erhalten, doch wird die Lösung meist praktisch eindeutig. Der Beweis, daß dies bei  $\nu < 90^\circ - h$  - also in der Regel - der Fall ist, folgt im Anhang.

Aus der Beziehung:

$$\begin{aligned} -\cos \nu \cos (\alpha) &= \sin \nu \operatorname{tg} h - \sin (\alpha) \operatorname{ctg} \alpha \quad \text{folgt} \\ -\cos \nu \cos (\alpha + \Delta\alpha_\nu) &= \sin \nu \operatorname{tg} h - \sin (\alpha + \Delta\alpha_\nu) \operatorname{ctg} \alpha \end{aligned}$$

und daraus wird:

$$\begin{aligned} \cos \Delta\alpha_\nu (\cos \alpha - \cos \nu \cos \alpha) &= \\ = \sin \nu \operatorname{tg} h + \sin \Delta\alpha_\nu (\cos \alpha \operatorname{ctg} \alpha + \cos \nu \sin \alpha) \end{aligned}$$

Oder:

$$\begin{aligned} (1 - \sin^2 \Delta\alpha_\nu) (\cos \alpha - \cos \nu \cos \alpha)^2 &= \\ = \sin^2 \nu \operatorname{tg}^2 h + 2 \sin \Delta\alpha_\nu (\cos \alpha \operatorname{ctg} \alpha + \cos \nu \sin \alpha) \sin \nu \operatorname{tg} h + \\ + \sin^2 \Delta\alpha_\nu (\cos \alpha \operatorname{ctg} \alpha + \cos \nu \sin \alpha)^2 \end{aligned}$$

Geordnet erhalten wir die quadratische Gleichung für  $\sin \Delta\alpha_\nu$ :

$$\left. \begin{aligned} \sin^2 \Delta\alpha_\nu \{(\cos \alpha \operatorname{ctg} \alpha + \cos \nu \sin \alpha)^2 + (\cos \alpha - \cos \nu \cos \alpha)^2\} - \\ - 2 \sin \Delta\alpha_\nu \sin \nu \operatorname{tg} h (\cos \alpha \operatorname{ctg} \alpha + \cos \nu \sin \alpha) + \sin^2 \nu \operatorname{tg}^2 h - \\ - (\cos \alpha - \cos \nu \cos \alpha)^2 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Daraus wird  $\sin \Delta\alpha_\nu$  in bekannter Weise berechnet.

Bei kleineren Winkeln  $\nu$  kann  $\cos \nu = 1$ ,  $\sin \Delta\alpha_\nu = \Delta\alpha_\nu$  und  $\sin \nu = \nu$  gesetzt werden, und man erhält aus Gleichung (6) in diesem Falle die gute Näherungsformel:

$$\Delta\alpha_\nu = \nu \operatorname{tg} h \sin \alpha \quad (6a)$$

Gleichung (6) gibt zwar zur Berechnung von  $\sin \Delta\alpha_\nu$  eine geschlossene Formel; sie ist aber nicht mehr so einfach wie Gleichung (5). Will man daher bei größeren Stehachsenschiefen die am Teilkreis gemessenen Richtungen auf die Horizontale umrechnen, so ist es grundsätzlich besser, den Höhenwinkel ohne Benützung der Höhenkreislibelle zu bestimmen. Bei größeren Abweichungen kann diese Libelle sowieso nicht gebraucht werden.

\*

*Stehachse schief, Horizontalkreis horizontal*

Anders ist das Problem, wenn die Stehachse um den Winkel  $\nu$  schief steht, während der Teilkreis horizontal liegt. Man mißt in diesem Falle

wohl  $(a_\nu - a)$  und  $h$ , doch kann Gleichung (4) streng genommen nicht verwendet werden, weil sich der dortige Unterschied  $\Delta a_\nu$  auf die Differenz der Ablesungen auf einem horizontalen und auf einem schiefen Teilkreis bezieht. Man braucht daher in diesem Falle den Wert  $\Delta a_{\nu, w}$ , der jetzt durch  $(a_\nu - a)$  und  $h$  ausgedrückt wird.

Aus dem Dreieck  $Z, IZ, P$  wird hier:

$$\operatorname{ctg} y = \frac{\cos h \operatorname{ctg} \nu - \sin h \cos (a_\nu - a)}{\sin (a_\nu - a)} \quad (7)$$

und

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \Delta a_{\nu, w} &= \operatorname{tg} y \sin h = \frac{\sin (a_\nu - a)}{\operatorname{ctg} \nu \operatorname{ctg} h - \cos (a_\nu - a)} = \\ &= \frac{\sin (a_\nu - a) \operatorname{tg} \nu \operatorname{tg} h}{1 - \cos (a_\nu - a) \operatorname{tg} \nu \operatorname{tg} h} \end{aligned} \quad (8)$$

Daraus ergibt sich bei kleinen Werten  $\nu$  und  $\Delta a_{\nu, w}$  mit guter Näherung:

$$\Delta a_{\nu, w} = \nu \sin (a_\nu - a) \operatorname{tg} h \quad (8a)$$

Die Beziehung (8) kann angewendet werden, um den Azimutunterschied zweier konjugierter Normalschnitte zu berechnen, da der Normalschnitt im zweiten Punkt zum ersten Punkt in diesem einen Winkel  $\delta_1$  mit dem Normalschnitt vom ersten Punkt zum zweiten Punkt aufweist. (Vgl. [4; S. 13]). Faßt man  $\delta_1$  als Stehachsenschiefe auf und bedenkt, daß in diesem Falle dem Höhenwinkel  $h$  der Depressionswinkel  $\mu$  entspricht, so kann der Azimutunterschied  $\Delta a$  zweier konjugierter Normalschnitte beim Azimut  $a$  des Normalschnittes vom ersten zum zweiten Punkt nach Gleichung (8) in geschlossener Form sofort angegeben werden:

$$\operatorname{tg} \Delta a = \frac{\sin a \operatorname{tg} \mu \operatorname{tg} \delta_1}{1 + \cos a \operatorname{tg} \mu \operatorname{tg} \delta_1} \quad (9)$$

beziehungsweise bei kleinen Werten  $\delta_1$  ergibt sich als gute Näherung aus Gleichung (8a)

$$\Delta a = \delta_1 \sin a \operatorname{tg} \mu \quad (9a)$$

Setzt man für  $\delta_1$  und  $\mu$  die in der Fachliteratur bekannten Werte ein, so erhalten wir daraus die bekannten Gebrauchsformel für  $\Delta a$ , wie wir dies in (5) gezeigt haben.

### Taumelfehler

Der Taumelfehler der Stehachse kann bewirken, daß der Teilkreis wohl horizontal ist, die augenblickliche Stehachse aber nicht vertikal steht. Da in diesem Falle die Ablesung nicht am schiefen Teilkreis erfolgt, ist nicht wie früher  $\Delta a_\nu = (a) - a$ , sondern der am waagrechten Teilkreis erscheinende Einfluß  $\Delta a_{\nu, w}$  des Vertikalachsenfehlers zu bestimmen.

Wenn wir mit dieser Korrektur den am Teilkreis abgelesenen Wert  $\alpha^\circ$  der Abbildung 1 verbessern, erhalten wir die der vertikalen Stehachse entsprechende Ablesung.

Aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck mit der Seite  $100^g + \nu$  in der Zeichenebene und mit der Seite  $\alpha^\circ$  normal dazu erhalten wir die Beziehung:

$$\sin \alpha = \frac{\sin \alpha^\circ}{\sin (100 + \nu)} = \frac{\sin \alpha^\circ}{\cos \nu} \quad (10)$$

Im Dreieck  $Z, IZ, P$  sind  $\alpha, \nu$  und  $h'$  oder  $h$  bekannt. Wurde  $h'$  gemessen, so rechnen wir:

$$\operatorname{ctg} y = \frac{\cos h' \operatorname{ctg} \nu - \sin h' \cos \alpha}{\sin \alpha} \quad (11)$$

Weiter folgt aus dem unten anschließenden rechtwinkligen sphärischen Dreieck:

$$\sin \Delta_{\alpha, \nu, w} = \sin h' \sin y \quad (12)$$

Da aus Gleichung (11)

$$\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \frac{\cos h' \operatorname{ctg} \nu - \sin h' \cos \alpha}{\sin \alpha} \sin y$$

ist, folgt:

$$\left\{ \left( \frac{\cos h' \operatorname{ctg} \nu - \sin h' \cos \alpha}{\sin \alpha} \right)^2 + 1 \right\} \sin^2 y = 1$$

und:

$$\sin y = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{\sin^2 \alpha + (\cos h' \operatorname{ctg} \nu - \sin h' \cos \alpha)^2}}$$

In Gleichung (12) eingesetzt wird die geschlossene Formel für  $\sin \Delta_{\alpha, \nu, w}$  in diesem Falle:

$$\sin \Delta_{\alpha, \nu, w} = \frac{\sin \alpha \sin h'}{\sqrt{\sin^2 \alpha + (\cos h' \operatorname{ctg} \nu - \sin h' \cos \alpha)^2}} \quad (13)$$

Dieser Ausdruck kann auch wie folgt geschrieben werden:

$$\sin \Delta_{\alpha, \nu, w} = \frac{\operatorname{tg} \nu \sin \alpha \sin h'}{\sqrt{\sin^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \nu + (\cos h' - \sin h' \cos \alpha \operatorname{tg} \nu)^2}}$$

Bei kleinen Winkeln  $\nu$  und  $\Delta_{\alpha, \nu, w}$  wird daraus in guter Näherung:

$$\Delta_{\alpha, \nu, w} = \frac{\nu \sin \alpha \sin h'}{\cos h'} = \nu \sin \alpha \operatorname{tg} h' \quad (13a)$$

Wurde nicht  $h'$ , sondern  $h$  gemessen, so wird

$$\sin y = \frac{\sin \nu \sin \alpha}{\cos h} \quad (14)$$

und:

$$\begin{aligned} \sin \Delta a_{\nu, w} &= \sin h \operatorname{tg} y = \sin h \frac{\frac{\sin y \sin \alpha}{\cos h}}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2 \nu \sin^2 \alpha}{\cos^2 h}}} = \\ &= \frac{\sin \nu \sin h \sin \alpha}{\sqrt{\cos^2 h - \sin^2 \nu \sin^2 \alpha}} \end{aligned} \quad (15)$$

Bei kleinen Werten  $\nu$  gilt hier die Näherung:

$$\Delta a_{\nu, w} = \nu \sin \alpha \operatorname{tg} h \quad (15a)$$

In den Gleichungen (13) und (15) gilt im allgemeinen der positive Wert der Wurzel.

\*

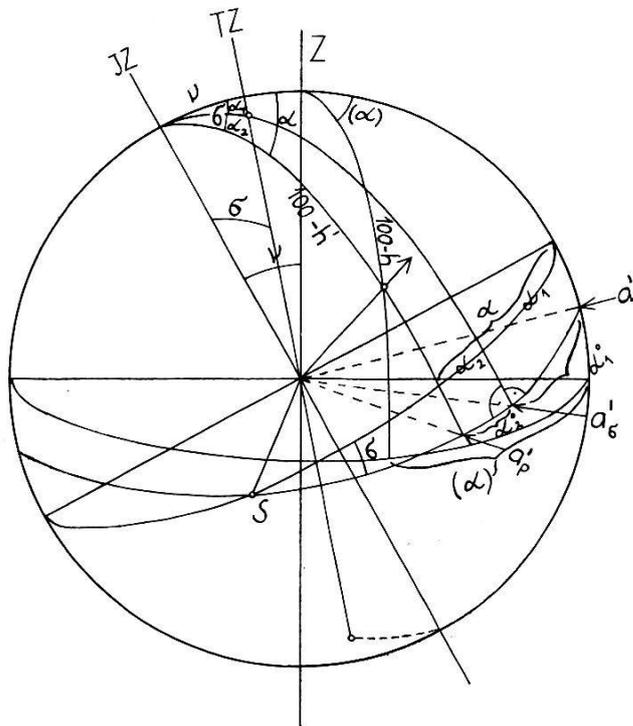


Abb. 2.

Ein anderer Fall entsteht, wenn der Teilkreis infolge fehlerhafter Justierung nicht normal zur Stehachse liegt, sondern davon um den Winkel  $\sigma$  abweicht (Abbildung 2). Der richtige und der fehlerhaft liegende Teilkreis schneiden sich in der Linie  $S$ . Nimmt man zudem einen Steh-

achsenfehler  $\nu$ , wie der in der Zeichenebene, an, so liegt die dem Teilkreis entsprechende Normale  $TZ$  im allgemeinen nicht in der Zeichenebene.

Zur Berechnung des richtigen Winkelwertes  $(\alpha) = 200^g - (a_\nu - a)$  seien die der Richtung des Stehachsenfehlers diametrale Ablesung  $a'_\nu$ , die der Normalen des Teilkreises entsprechende Ablesung  $a'_\sigma$  und die zum angezielten Punkt  $P$  gehörige Ablesung  $a'_P$  am fehlerhaft liegenden Teilkreis gegeben. Dann werden:

$$\alpha_1^\circ = a'_\sigma - a'_\nu \qquad \alpha_2^\circ = a'_P - a'_\sigma$$

und mit Rücksicht auf die rechten Winkel bei  $a'_\sigma$ :

$$\sin \alpha_1 = \frac{\sin \alpha_1^\circ}{\sin (100 + \sigma)} = \frac{\sin \alpha_1^\circ}{\cos \sigma} \qquad \sin \alpha_2 = \frac{\sin \alpha_2^\circ}{\cos \sigma} \qquad (16)$$

Im Dreieck  $IZ$ ,  $Z$ ,  $P$  ist nun der Winkel  $\alpha$  gegeben, und mit  $\nu$ ,  $h'$  oder  $h$  kann die an  $\alpha$  anzufügende Verbesserung  $\Delta a_\nu$  nach Gleichung (5) beziehungsweise (6) berechnet werden.

\*

Alle hier angegebenen Beziehungen – mit Ausnahme der ausdrücklich als Näherungslösungen bezeichneten – sind streng richtig, das heißt, sie gelten bei beliebiger Größe der Fehler beziehungsweise Abweichungen. Auf weitere, sonst interessante Detailfragen können wir hier nicht näher eingehen.

*Anhang. Beweis für die Eindeutigkeit der Lösung nach S.*

Wir gehen von einem allgemeinen sphärischen Dreieck mit den Seiten  $a$ ,  $b$ ,  $c$  und den Winkeln  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  aus. Da alle Seiten und Winkel  $\leq 200^g$  sind, so muß bei der Annahme

$$\operatorname{tg} \frac{c}{2} = x$$

$x$  immer positiv sein. Da

$$\sin c = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{c}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{c}{2}} = \frac{2x}{1+x^2} \qquad \text{und} \qquad \cos c = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{c}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{c}{2}} = \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

ist, so folgt aus der Gleichung

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$$

beziehungsweise:

$$\cos a = \cos b \frac{1-x^2}{1+x^2} + \sin b \frac{2x}{1+x^2} \cos \alpha$$

die quadratische Gleichung

$$x^2 - 2x \frac{\sin b \cos \alpha}{\cos a + \cos b} + \frac{\cos a - \cos b}{\cos a + \cos b} = 0$$

Daraus folgen nach entsprechender Ordnung die zwei Lösungen  $x_1$  und  $x_2$

$$x_1 = \frac{\sin b \cos a + \sqrt{\sin^2 a - \sin^2 b \sin^2 \alpha}}{\cos a + \cos b}$$

$$x_2 = \frac{\sin b \cos a - \sqrt{\sin^2 a - \sin^2 b \sin^2 \alpha}}{\cos a + \cos b}$$

Die imaginären Lösungen, bei denen  $\sin a < \sin b \sin \alpha$  wird, sind bei unseren Untersuchungen a limine auszuschneiden. Aber auch die negativen  $x$ -Werte haben hier mit Rücksicht auf  $\operatorname{tg} \frac{c}{2} = x$  keinen Sinn. Wollen wir praktisch nur eine Lösung haben, so müssen daher  $x_1$ , und  $x_2$  verschiedene Vorzeichen besitzen. Dazu ist erforderlich, daß

$$| \sqrt{\sin^2 a - \sin^2 b \sin^2 \alpha} | > | \sin b \cos a |$$

wird. Daraus folgen

$$\sin^2 a - \sin^2 b \sin^2 \alpha > \sin^2 b \cos^2 \alpha \quad \text{oder:}$$

$$\sin^2 a > \sin^2 b$$

und da bis  $200^\circ$  der Sinuswert immer positiv ist:

$$\sin a > \sin b \quad \text{oder} \quad a > b < 200 - b$$

Im Falle  $a = 200^\circ - b$  geht das Dreieck in ein sphärisches Zweieck über.

Aus  $\sin^2 a > \sin^2 b$  folgt:

$$1 - \cos^2 a > 1 - \cos^2 b \quad \text{beziehungsweise} \quad \cos^2 a < \cos^2 b$$

und:  $|\cos a| < |\cos b|$

das heißt, das Vorzeichen des Nenners wird durch  $\cos b$  bestimmt.

Es sei nun  $b < 100^\circ$ , entsprechend unserem Vertikalachsenfehler  $\nu$ . Dann ist der Nenner immer positiv, und wir erhalten in

$$x_1 \text{ bei } 100^\circ - h = a > b = \nu < 200 - b = 200 - \nu$$

nur eine positive, also praktisch nur eine Lösung.

Es sollen durch diese kurzgefaßten Erörterungen Laskas fehlerhafte Untersuchungen in seinem Lehrbuch der sphärischen Trigonometrie (1890), S. 48/49 (Kleyers Enzyklopädie der gesamten Naturwissenschaften), ersetzt werden.

### Beigezogene Literatur

- [1] Matthias, Zum Einfluß von Zielachsenfehler, Horizontalachsenschiefe und Stehachsenschiefe auf Richtungen. Schweiz. Zeitschr. f. Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie, 1958, S. 134–144, und

- [2] *Baeschlin*, Ableitung einer Formel für den Richtungsfehler eines Theodoliten unter gleichzeitiger Berücksichtigung von Kollimationsfehler und Horizontalachsenschiefe. Schweiz. Zeitschr. f. Vermessungswesen und Kulturtechnik, 1932, S. 274–278, und 1933, S. 2–5.
- [3] *Baeschlin*, Lehrbuch der Geodäsie. Zürich 1948.
- [4] *Jordan-Eggert*, Handbuch der Vermessungskunde, Bd. III/2, Stuttgart 1941.
- [5] Über den Azimutunterschied konjugierter Normalschnitte auf dem Ellipsoid. Acta Technica Akad. Scient. Hung., Bd. VI (1953), S. 189–199.

## Die Bestimmung der Lotkrümmung auf dem TP Rosalienkapelle

Von *K. Ledersteger*, Wien

### 1. Die theoretischen Grundlagen

Ohne Zweifel muß das Endziel jeglicher Großraumvermessung das naturtreue Netz sein, worunter wir eine Pizzetti-Projektion auf das eindeutig gelagerte mittlere Erdellipsoid verstehen wollen. Diese Projektion ist bekanntlich eine Doppelprojektion. Die Oberflächenpunkte werden zuerst mittels ihrer gekrümmten Lotlinie auf das Geoid und von diesem mittels der geraden Ellipsoidnormalen auf das Erdellipsoid projiziert. Der erste Teil der Pizzetti-Projektion besteht also in einer Reduktion aller astronomischen und geodätischen Messungen wegen Lotkrümmung, während der zweite Teil dieser Projektion durch die astronomisch-geodätische Netzausgleichung erzielt wird. Hierin liegt auch einwandfrei die Bevorzugung der Pizzetti-Projektion vor der älteren Helmert-Projektion begründet. Denn nur im Falle der Pizzetti-Projektion ist das Laplacesche Binom theoretisch streng Null, das heißt, nur in diesem Falle treten in der Laplaceschen Gleichung, die zur wichtigsten Bedingung für die Netzausgleichung wird, keine Glieder 2.0. auf, die bei einem Großnetz nicht mehr vernachlässigt werden dürfen.

Die erste Aufgabe, die uns somit bei der geplanten Durchführung der Pizzetti-Projektion entgegentritt, sind die Lotkrümmungsreduktionen. Schon vor drei Jahren habe ich daher versucht, das Problem der Lotkrümmungsreduktionen theoretisch zu lösen<sup>1</sup>. Die Grundaufgabe besteht dabei in der Reduktion der astronomisch beobachteten Breiten und Längen. Für je zwei Punkte,  $P_i$  und  $P_k$ , derselben Niveaufläche kann die Differenz der Meereshöhen ( $H_k - H_i$ ) auf die Differenz der Durchschnittswerte der Schwere in den Lotlinien ( $g_k - g_i$ ) zurückgeführt werden. Denn aus der konstanten Potentialdifferenz zwischen unserer Niveaufläche und dem Geoid

$$\bar{g}_k H_k = \bar{g}_i H_i \quad (1)$$

<sup>1</sup> *K. Ledersteger*, «Die Reduktion der astronomischen Beobachtungen wegen Lotkrümmung», Schweiz. Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie, 1955.

und über Zwangszentrierung und Basislatte. In den Abschnitten über Landesvermessung, wo die Triangulationsaufgaben sehr gründlich behandelt werden, bemerkt der Praktiker mit Genugtuung, daß auch die handwerklichen Fragen der Erkundung der Punktversicherung und des Signalbaus zur Sprache kommen. Von den für die *Detailvermessung* wichtigen Arbeiten nimmt der Polygonzug den ersten Rang ein. Es folgen die Behandlung der Präzisionstachymetrie, der polaren Aufnahmeverfahren und der tachymetrischen Geländeaufnahme. Besonders aktuell sind vier Kapitel über die einfache und die Doppelrechenmaschine und ihre Verwendung für Schnittpunkt-, Flächen- und Teilungsrechnungen. Zum Schluß wird die Absteckung von Geraden und Wegen mit Hilfe einfachster Mittel behandelt.

*Band II* ist eine Erweiterung des ersten Bandes durch Beiträge aus verschiedenen Fachgebieten. Es werden behandelt: Liegenschaftskataster und Grundbuch – Fortführungsmessungen – Neumessungen – Längenmessungen – Einfache Höhenmessungen – Feinnivellement – Koordinatensysteme – Koordinatenumformung – Ergänzung zur trigonometrischen Punktbestimmung – ein Beitrag zum Problem des Rückwärtseinschneidens.

Da das Werk eine Sammlung einzelner Beiträge darstellt, ist eine einheitliche Behandlung aller Themen nicht zu erwarten. Erwähnenswert scheinen mir folgende Merkmale:

Ein breiter Raum ist der optischen Streckenmessung gewidmet. Kurzbeschreibungen über die Längenmessungen mit Lichtinterferenzen und mittels elektrischer Methoden vervollständigen den Abschnitt.

Im Kapitel Koordinatensysteme sind die Berechnungen auf dem Ellipsoid und die Übertragung auf die Ebene von allgemeinem Interesse. Wertvoll sind die Ergänzungen zur trigonometrischen Punktbestimmung mit dem Hinweis auf verschiedene praktische Berechnungsmethoden des Rückwärtseinschnittes.

Leider wird die Photogrammetrie kaum erwähnt. Obwohl eine ausführliche Behandlung den Rahmen dieses Werkes sprengen würde, wäre zu wünschen, daß der Photogrammetrieaufnahmeverfahren, die in der Ingenieurvermessung und im Kataster unentbehrlich geworden ist, in einer Neuauflage der gebührende Raum gewährt wird.

Da der behandelte Stoff naturgemäß auf die Bedürfnisse in der DDR ausgerichtet ist, bieten gewisse Kapitel wenig allgemeines Interesse. So liegen dem schweizerischen Leser die sehr ausführlich behandelten Einzelheiten über das Liegenschaftskataster und das Grundbuch eher fern, wiewohl die Entwicklungsgeschichte vom Steuerkataster zum heutigen Eigentumskataster, im großen gesehen, recht lehrreich und interessant ist. Die gleiche Bemerkung gilt auch für die Einzelheiten der Fortführungsmessung und der Neuvermessung.

Klare und im allgemeinen gut lesbare Illustrationen unterstützen den Text. Dieser selbst hätte verdient, in größerem Druck dargeboten zu werden.

W. Häberlin

## Errata

*Ergänzung und Berichtigung zum Aufsatz «Über den Einfluß der Stehachsenschiefe auf die Messung der horizontalen Richtungen» (diese Zeitschrift, Nr. 10/1958, S. 272–282).*

Ich konnte die Korrektur nicht selbst lesen, und so sind trotz der darauf angewandten großen Sorgfalt einige Druckfehler zurückgeblieben, die teilweise auch im Manuskript unbemerkt geblieben sind.

In den Gleichungen (2a), (3) und (3a) soll  $a$  statt  $a^0$  stehen.

Auf S. 274 soll es in der 4. Zeile von oben Gleichung (3a) statt (3) heißen.

Auf S. 276 ist das Vorzeichen von  $\sin \Delta_{\alpha\nu}$  in den Zeilen 14 und 17 von oben minus, wie in der Endgleichung (6).

Auf der gleichen Seite (3. Zeile von unten) soll die Anschrift mit dem Ausdruck in Klammern (Fehlereinfluß in der Horizontalebene als Funktion der richtigen Horizontal- und Höhenwinkel) ergänzt werden. An Stelle des ersten Satzes darnach ist zu sagen: «Anders ist das Problem, wenn man fragt, wie groß wäre der Fehler in der Horizontalen, falls man der Stehachse einen Fehler  $\nu$  erteilen würde.»

Auf S. 277 soll in der 7. Zeile von unten richtig [5] an Stelle von (5) stehen.

Auf derselben Seite (6. Zeile von unten) soll die Anschrift durch den Ausdruck in Klammern (Fehlereinfluß in der Horizontalebene als Funktion des fehlerhaften Horizontalwinkels) erweitert werden.

Auf S. 280 in der 1. Zeile ist der Ausdruck «wieder» richtig an Stelle von «wie der».

Auf derselben Seite nach der Anschrift «Anhang» lautet der Satz richtig: Beweis für die Eindeutigkeit der Lösung nach Gleichung (6).

A. Tarczy-Hornoch

### Adressen der Autoren:

Dr. H. Härry, Vermessungsdirektor, Eidgenössisches Vermessungsamt, Bern.

Prof. Dr. K. Ledersteger, Wien VI, Theobaldgasse 13/9.

N. Wyss, Dipl.-Ing., Unterseen-Interlaken.

P. Hunsperger, Verifikator, Kantonales Vermessungsamt, Bern.

Benjamin Luyet, géomètre officiel, La Glacière, Sion.

---

### Sommaire:

*H. Härry*: Le décès du conseiller fédéral M. Feldmann. – *H. Härry*: Démission du directeur du service topographie, Prof. S. Bertschmann, Dr. h. c. – *K. Ledersteger*, La détermination de la courbure de la verticale du point de triangulation Rosalienkapelle (Suite et fin). – *N. Wyss*: L'élimination d'une rotation du trépied dans les séries. – *P. Hunsperger*: Etude pratique au sujet de la précision de la mensuration cadastrale 1 : 5000 par la méthode photogrammétrique. – *B. Luyet*: Güterzusammenlegung in Savièse. – Procès-verbal de l'assemblée d'automne du 8 novembre 1958 de la Société suisse de photogrammétrie. – Nécrologues. – Hommage académique. – Communications du groupe patronal: Formation professionnelle; Bulletin. – Revue des livres. – Errata. – Adresses des auteurs. – Sommaire 1958.

---

Redaktion: Vermessungswesen und Photogrammetrie: Prof. Dr. F. Kobold, Geodätisches Institut der ETH, Zürich, Chefredaktor;

Kulturtechnik: Dr. Hans Lüthy, Dipl.-Ing., Wabern bei Bern, Seftigenstraße 345;

Planung und Aktuelles: Dipl.-Ing. E. Bachmann, Paßwangstraße 52, Basel

Redaktionsschluß am 26. jeden Monats

Insertionspreis: 30 Rp. per einspaltige Millimeter-Zeile. Bei Wiederholungen Rabatt. Schluß der Inseratenannahme am 6. jeden Monats. Abonnementspreis: Schweiz Fr. 17.—; Ausland Fr. 22.— jährlich

Expedition, Administration und Inseratenannahme: Buchdruckerei Winterthur AG, Telephon (052) 2 22 52