

**Zeitschrift:** Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie

**Herausgeber:** Schweizerischer Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Société suisse de la mensuration et du génie rural

**Band:** 60 (1962)

**Heft:** 2

**Artikel:** La transformation d'Helmert appliquée en altimétrie

**Autor:** Ansermet, A.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-217677>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 02.04.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# La transformation d'Helmert appliquée en altimétrie

Par A. Ansermet

Les calculs de réseaux altimétriques ont donné lieu déjà à de nombreuses publications; parmi les plus récentes il faut citer celle de la Commission géodésique suisse (voir [1]). Elle fut rédigée de façon magistrale par MM. F. Kobold, Rédacteur en chef de notre Revue, et N. Wunderlin. Le but poursuivi par ces auteurs comprend à la fois des déterminations altimétriques et de déviations de la verticale; les compensations portent sur un réseau libre ou fractionné par blocs. Un calcul d'ensemble, avec des rattachements, fut aussi effectué. Ce mode de faire est justifié quand les visées traversent des couches assez élevées de l'atmosphère; le coefficient de réfraction a une valeur plus stable que dans les couches voisines du sol. Les calculs de compensation se révélèrent assez laborieux.

Le but de ces lignes est de concevoir une méthode simple permettant par exemple de rattacher un réseau comportant des mesures d'angles verticaux avec des repères déterminés par nivellement direct; les altitudes de ces derniers seraient considérées comme exemptes d'erreurs. Il en résulterait des discordances entre les altitudes obtenues par voie trigonométrique et celles fournies par le nivellement de repères. Ce problème n'est pas nouveau; il s'est déjà présenté planimétriquement pour éliminer, partiellement ou totalement, des discordances entre coordonnées puis spatialement (voir [2]). La transformation dite d'Helmert a fourni une solution; on a deux systèmes de points («Punkthaufen») qu'il faut adapter mutuellement le mieux possible.

On distinguera trois cas:

1° Transformation planimétrique:

Le système de points à adapter subit deux translations, une rotation, une modification d'échelle (4 inconnues).

2° Transformation spatiale (cas général) à 7 inconnues. On a recours à trois translations, trois rotations, un changement d'échelle.

3° Transformation altimétrique (envisagée ici). Elle comporte une translation, deux rotations, une correction d'échelle (4 inconnues).

On fait parfois grief à la transformation d'Helmert de ne pas éliminer complètement les discordances; or nous verrons que dans le troisième cas énuméré ci-dessus (altimétrie) on peut en général éliminer complètement les discordances si les points de rattachement sont au nombre de quatre. Pratiquement on fractionnera le territoire en mailles quadrangulaires; le calcul sera rapide.

Rappelons en quoi consiste analytiquement le cas général en désignant par  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  les translations,  $d\xi$ ,  $d\eta$ ,  $d\zeta$  (radians) les rotations,  $dm$  la correction d'échelle.

Initialement les deux systèmes ont comme origines leurs centres de gravité respectifs puis on amènera ces centres à coïncider.

Trois groupes d'équations sont à distinguer:

$$-f_{xi} + v_{xi} = dx + x_i dm + z_i d\eta - y_i d\zeta \quad (1)$$

$$-f_{yi} + v_{yi} = dy + y_i dm - z_i d\xi + x_i d\zeta \quad (2)$$

$$-f_{zi} + v_{zi} = dz + z_i dm + y_i d\xi - x_i d\eta \quad (3)$$

$$(i = 1, 2, 3 \dots)$$

Les termes absolus sont les composantes des discordances, tandis que les  $v_x, v_y, v_z$  sont les composantes qui subsistent après la transformation. Les coefficients des inconnues  $d\xi, d\eta, d\zeta$  pourront être pris graphiquement sur une bonne carte, car les coordonnées des repères de nivellement ne sont en général pas connues; on s'efforcera de réaliser  $[xy] \cong 0$  en orientant les axes en conséquence. Il n'est pas exclu qu'on ait en outre  $[xz] \cong [yz] \cong 0$ ; de plus  $[x] = [y] = [z] = 0$  puisque le centre de gravité est l'origine. Enfin, en formant pour chacun des trois groupes, les équations réduites d'après C. F. Gauss, on élimine les  $dx, dy, dz$ , tandis que la somme des termes absolus est alors nulle pour chaque groupe ( $[v_x] = [v_y] = [v_z] = 0$ ). Par cette réduction on réalise la coïncidence des centres de gravité des deux systèmes. Le principe des moindres carrés est appliqué aux  $v_s$  ( $v_s^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ ).

Dans les applications planimétriques telles qu'elles sont pratiquées depuis fort longtemps, ce sont les deux premiers groupes qui interviennent, et il n'y a pas d'inconnues  $d\xi$  et  $d\eta$ . Ici, par contre, c'est le troisième groupe seul qui intéresse, et il n'y a pas de  $d\zeta$ .

Si la transformation est basée sur 4 points altimétriques, le calcul est particulièrement simple; il y a 4 équations et 4 inconnues. Les équations réduites sont au nombre de 4 avec 3 inconnues, mais les équations ne sont plus indépendantes. C'est ce qui se passe en triangulation avec 3 directions intérieures; il n'y a pas de compensation pour une telle station.

Du reste les 4 inconnues donnent lieu à 4 équations normales sous forme implicite:  $[v_z]_1^4 = 0$ ;  $[zv_z] = 0$ ;  $[yv_z] = 0$ ;  $[xv_z] = 0$ ; elles sont homogènes en  $v_z$  et le déterminant:

$$\begin{vmatrix} 1 & z_1 & y_1 & x_1 \\ 1 & z_2 & y_2 & x_2 \\ 1 & z_3 & y_3 & x_3 \\ 1 & z_4 & y_4 & x_4 \end{vmatrix} \quad \text{(Ces coefficients } z \text{ seront introduits en arrondissant au décimètre; c'est alors le même } z, \text{ dans l'un et l'autre système, pour chaque point.)}$$

est en général différent de zéro. Si le réseau est situé en plaine et que les  $z$  soient très petits, on pourra pratiquement faire abstraction de l'inconnue  $dm$ .

Le cas peut se présenter où les points de rattachement sont au nombre de 5, le 5<sup>e</sup> étant très voisin du centre de gravité des quatre autres. Dans l'équation relative à ce point on fera abstraction des inconnues  $d\xi, d\eta$  et même de  $dm$  si l'altitude du 5<sup>e</sup> point est peu différente de celle du centre de gravité. Ce 5<sup>e</sup> point joue alors un rôle pour le calcul de  $dz$  seulement.

*Applications.* Considérons tout d'abord un exemple de caractère didactique où la matrice des équations normales est diagonale: Le tableau des coefficients pour le système (3) est le suivant:

$i$	$dm$	$d\xi$	$d\eta$	Equations normales:
1	+ 39,8 m	+ 4,23 km	+ 9,06 km	$- [zf'_z] = [z^2] dm$
2	+ 43,6	+ 4,70	+ 1,71	
3	- 39,8	+ 9,06	- 4,23	$- [yf'_z] = [y^2] d\xi$
4	- 43,6	+ 1,71	- 4,70	
5	+ 39,8	- 4,23	- 9,06	$[xf'_z] = [x^2] d\eta$
6	+ 43,6	- 4,70	- 1,71	
7	- 39,8	- 9,06	+ 4,23	les $f'_z$ sont les $f_z$ réduits.
8	- 43,6	- 1,71	+ 4,70	

Ces chiffres sont en général les mêmes avant ou après la mise en coïncidence des centres de gravité des deux systèmes en ce qui concerne les  $z$ . La suite des calculs est un problème courant.

Dans l'exemple qui précède deux des axes principaux d'inertie («Hauptträgheitsachsen») sont dans un même plan horizontal, ce qui est exceptionnel. Le cas ci-après est tiré du réseau de l'Oberland bernois (voir [1]); le nombre des points de rattachement est égal à 5, ce qui exclut l'élimination complète des discordances. Les axes furent choisis sur la carte pour que  $[xy] \simeq 0$ , ce qui est un léger avantage car, en général, on ne peut pas rendre nuls  $[xz]$  et  $[yz]$ . Pour éliminer rigoureusement les discordances il faudrait envisager une transformation déformant le système de points. On aura ici:

Points	$dm$	$d\xi$	$d\eta$	$xy$
Daube	- 336,3 m	+ 23,9 km	+ 42,8 km	+ 1000 km <sup>2</sup>
Männlichen	- 69,4	- 20,1	+ 19,8	- 400
Lauberhorn	+ 60,3	- 42,0	+ 0,2	- 8
Bietenhorn	+ 344,6	+ 1,5	- 49,0	- 74
Sulegg	+ 0,6	+ 36,8	- 13,9	- 510
	+ 405,5	+ 62,2	+ 62,8	+ 1000
	- 405,7	- 62,1	- 62,9	- 992

Equations normales:  $[zv_z] = 0$ ,  $[xv_z] = 0$ ,  $[yv_z] = 0$ , l'inconnue  $dz$  étant éliminée (calcul fait sur canevas 1 : 100 000).

Ces cinq points chevauchent sur trois des quatre blocs ([1], p. 22). Ce choix est assez arbitraire; les points pourraient être groupés autrement. Le but de ces lignes était uniquement d'introduire le problème. Rappelons que, dans le cas général, portant sur les systèmes d'équations (1), (2), (3), les discordances qui subsistent après la transformation, si on les assimile à des forces, constituent un système en équilibre (voir [3]). Il suffit, à cet effet, d'interpréter les équations normales relatives aux 7 inconnues.

Cette propriété fut énoncée par S. Finsterwalder pour la première fois: «Wenn sich zwei Punkthaufen möglichst nahe liegen, bilden die kürzesten Abstände beider, als Kräfte aufgefaßt, ein Gleichgewichtssystem.»

### *Littérature*

- [1] *F. Kobold et M. Wunderlin*, «Die Bestimmung von Lotabweichungen und Meereshöhen ...» (Commission géodésique suisse, 1960).
- [2] *W. Kuny*, «Festpunktlose räumliche Triangulation» (Wittwer, Stuttgart).
- [3] *A. Ansermet*, «Théorème relatif à l'aéromensuration» (Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, N° 9, 1955).

## **Société suisse de Photogrammétrie**

### *Procès-verbal de l'Assemblée d'automne du 4 novembre 1961, à Berne*

En déclarant l'assemblée ouverte à 14 h. 15, M. Broillet, président, salue les 34 membres présents au restaurant «Bürgerhaus» et souhaite une cordiale bienvenue aux hôtes qui nous font l'honneur d'assister à cette séance. MM. Berchtold-Heerbrugg, Bossart, Dr Matthias, Meier et le Professeur Zeller se sont excusés.

L'ordre du jour de cette assemblée, publié dans le numéro d'octobre de notre Revue, est approuvé et ses différents objets traités comme suit:

#### *1° Procès-verbal de la 34<sup>e</sup> Assemblée générale:*

Le procès-verbal de la 34<sup>e</sup> Assemblée générale du 6 mai 1961 à Zurich est approuvé sans discussion.

#### *2° Nomination du rapporteur suisse à la Commission III S. I. P.:*

Lors de la dernière assemblée, le poste du rapporteur suisse à la Commission III (Aérot triangulation) de la Société internationale de Photogrammétrie avait été réservé au futur professeur de photogrammétrie à l'E.P.F. (ETH). Entre-temps, M. le Professeur Kasper a été désigné à cette chaire, et le Comité de la S.S.P. propose donc à l'Assemblée de le nommer comme Rapporteur national à la Commission III. Cette proposition est approuvée sans opposition.

#### *3° Collaboration de la S.S.P. à la Commission de propagande professionnelle de la S.S.M.A.F.:*

Une commission pour la propagande professionnelle a été constituée sur l'initiative de la S.S.M.A.F. (S.V.V.K.). Son programme d'action intéressant toutes les organisations professionnelles, la S.S.P. a été invitée à participer aux travaux qu'elle entreprend en y désignant un délégué.

L'Assemblée approuve sans discussion la collaboration de notre Société à cette commission.

Comme délégué, le Comité propose alors M. le Dr Schlund, qui s'intéresse vivement à ces questions et l'a prouvé par la publication de son intéressante brochure.

Aucune autre proposition n'étant faite, M. le Dr Schlund représentera notre Société au sein de cette commission.

#### *4° Communications du Comité et divers:*

M. le Président Broillet rappelle le décès inattendu de M. Arturo Pastorelli, survenu en mai dernier. La Société suisse de Photogrammétrie perd en lui un collaborateur précieux, toujours dévoué et unanimement