

**Zeitschrift:** Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie

**Herausgeber:** Schweizerischer Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Société suisse de la mensuration et du génie rural

**Band:** 60 (1962)

**Heft:** 5

**Artikel:** Die geodätischen Probleme der künstlichen Satelliten (Satellitengeodäsie) [Fortsetzung]

**Autor:** Ledersteger, K.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-217686>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 01.04.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Die geodätischen Probleme der künstlichen Satelliten (Satellitengeodäsie)

Von K. Ledersteger, Wien

(Fortsetzung)

Die reine Keplerbewegung ist durch 6 Elemente vollständig bestimmt. Die Bahnform ist durch die große Halbachse  $a$  und die numerische Exzentrizität definiert. Die Bahnebene, welche durch den Erdschwerpunkt geht, kann durch zwei Elemente bezüglich des Äquators festgelegt werden, nämlich durch den Abstand  $\Omega$  des aufsteigenden Knotens vom Frühlingspunkt und durch die Neigung  $i$ , den Winkel, welchen die Bahnebene mit der Äquatorebene in der Knotenlinie einschließt. Die

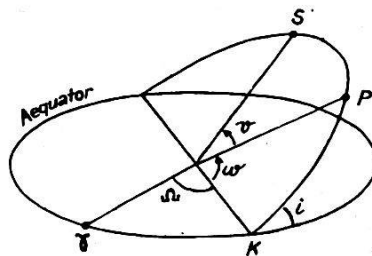


Fig. 3

Lage der Ellipse in der Bahnebene wird durch das Argument  $\omega$  des Perigäums, dem in der Bewegungsrichtung gezählten Winkelabstand des Perigäums vom aufsteigenden Knoten, fixiert, womit die Apsidenlinie festliegt. Schließlich wird die Beziehung zur Zeit durch den augenblicklichen Winkelabstand des Satelliten vom Perigäum, die wahre Anomalie  $v$ , festgestellt (Figur 3). Die Sechszahl der Elemente erklärt sich leicht aus der Notwendigkeit der zweimaligen Integration der drei Bewegungsgleichungen, welche für das System Erde-Satellit lauten:

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} + k^2 E \frac{\xi}{r^3} = 0; \quad \frac{d^2 \eta}{dt^2} + k^2 E \frac{\eta}{r^3} = 0; \quad \frac{d^2 \zeta}{dt^2} + k^2 E \frac{\zeta}{r^3} = 0, \quad (16)$$

wobei  $\xi, \eta, \zeta$  die rechtwinkligen Koordinaten des Satelliten bezüglich des Erdschwerpunktes sind.

Sind Radiusvektor  $r$ , Poldistanz  $\vartheta$  und Rektaszension  $\alpha$  die geozentrischen Polarkoordinaten des Satelliten, so gilt bei Berücksichtigung der Massefunktionen  $J$  die vektorielle Differentialgleichung 2.0.

$$\ddot{\mathbf{r}} = \text{grad } U = \frac{\partial U}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \vartheta} \mathbf{e}_\vartheta + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial U}{\partial \alpha} \mathbf{e}_\alpha \quad (17)$$

mit

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial U}{\partial r} &= \ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2 - r \sin^2 \vartheta \cdot \dot{\alpha}^2 \\
 \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \vartheta} &= 2 \dot{r} \dot{\vartheta} + r \ddot{\vartheta} - r \dot{\alpha}^2 \sin \vartheta \cos \vartheta \\
 \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial U}{\partial \alpha} &= 2 \dot{r} \dot{\alpha} \sin \vartheta + 2 r \dot{\vartheta} \dot{\alpha} \cos \vartheta + r \ddot{\alpha} \sin \vartheta,
 \end{aligned}
 \tag{18}$$

worin noch wegen der angenommenen Rotationssymmetrie  $\partial U/\partial \alpha$  verschwindet. Wiewohl diese drei Differentialgleichungen die Bewegung des Satelliten vollständig beschreiben, sobald aus den Beobachtungen die notwendigen Anfangsbedingungen vorliegen, ist ihre Integration mit sehr großen Schwierigkeiten verbunden. Ähnlich wie beim Mehrkörperproblem der klassischen Himmelsmechanik werden nämlich die Bahnelemente Funktionen der Zeit; das heißt, sie unterliegen säkularen und periodischen Störungen, so daß man mit dem Begriff der «oskulierenden Bahnellipse» operiert. Letztere ist *per definitionem* jene Keplerellipse, welche der Satellit beschreiben würde, wenn der augenblickliche Orts- und Geschwindigkeitsvektor die Ausgangsdaten für eine störungsfreie Bewegung um die im Schwerpunkt vereinigt gedachte gesamte Erdmasse liefern würden. Die Entwicklungen der klassischen Störungstheorie sind aber auf die künstlichen Satelliten wegen der ganz anders gearteten Größenverhältnisse der störenden Kräfte und auch wegen der möglichen großen Bahnneigungen nicht anwendbar. Das Problem der Satellitenbahnen wurde von verschiedenen Astronomen eingehend studiert; die entwickelten Methoden sind keineswegs einheitlich und unterscheiden sich in erster Linie hinsichtlich des Grades der Annäherung.

Sieht man vom Einfluß des Luftwiderstandes und von den Störungen durch Sonne und Mond ab, so sind die Bahnstörungen fast ausschließlich durch die mit den zonalen Kugelfunktionen verknüpften Massefunktionen  $J_i$  verursacht. Es sei gleich an dieser Stelle betont, daß wegen der rapiden Abnahme der  $J_i$  eine Mitnahme der über  $J_4$  hinausgehenden Massefunktionen ziemlich illusorisch erscheint. Aus den wenigen Andeutungen, welche über die Bewegungsgleichungen und ihre Integration gemacht wurden, kann selbstverständlich kein klares Bild über die Wirkungsweise der verschiedenen Massefunktionen gewonnen werden. Daher genüge die Feststellung, daß sie säkulare, langperiodische und kurzperiodische Änderungen der Bahnelemente zur Folge haben. Säkulärer Natur ist die Drehung der Bahnebene oder der Knotenlinie, wie sie ähnlich von der Präzessionsbewegung der Erdachse bekannt ist. Als langperiodisch dürfen wir den Umlauf des Perigäums oder die Drehung der Apsidenlinie bezeichnen, während Änderungen von der Periode des Umlaufs des Satelliten in seiner Bahn als kurzperiodisch gelten. Geodätisch verwertbar sind natürlich nur jene Störungen, die mit einem solchen Genauigkeitsgrad beobachtet werden können, daß sie einen sicheren Rückschluß auf die verursachenden Massefunktionen gestatten.

Die geraden Massefunktionen bewirken nun die Drehung der Bahnebene, also die Änderung der Rektaszension des aufsteigenden Knotens  $d\Omega/dt$  und die Drehung der Apsidenlinie, das heißt die Änderung des Arguments des Perigäums  $d\omega/dt$ . Man kann sie in die einheitliche Form bringen:

$$\begin{aligned}\dot{\Omega} &= c_{21}J_2 + c_{22}J_2^2 + c_{41}J_4 + \dots \\ \dot{\omega} &= d_{21}J_2 + d_{22}J_2^2 + d_{41}J_4 + \dots,\end{aligned}\quad (19)$$

worin die Koeffizienten Funktionen der Bahnelemente  $a$ ,  $e$  und  $i$  sind. Demgegenüber bewirken die zonalen Glieder mit ungeradem Index periodische Störungen der Elemente  $\Omega$ ,  $\omega$ ,  $e$  und  $i$ ; die Periode ist der Apsidenumlauf.

Führt man die aus dem dritten Keplergesetz folgende mittlere Bewegung  $n$  des Satelliten in seiner Bahn ein:

$$n^2 = \frac{k^2 E}{a^3} \quad (7a)$$

und überdies den Halbparameter  $p = a(1 - e^2)$  der Bahnellipse, so erhält man nach Merson<sup>2</sup> und King-Hele<sup>3</sup> folgende bis einschließlich der Glieder 4.0. entwickelten Ausdrücke für die säkularen und langperiodischen Störungen:

$$\left. \begin{aligned}\dot{\Omega} &= -n \left(\frac{R}{p}\right)^2 \cos i \left[ \frac{3}{2} J_2 - \frac{3}{2} J_3 \frac{R}{p} \frac{e \sin \omega}{\sin i} \left(1 - \frac{15}{4} \sin^2 i\right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{9}{4} J_2^2 \left(\frac{R}{p}\right)^2 \left(1 - \frac{19}{12} \sin^2 i\right) - \frac{15}{4} J_4 \left(\frac{R}{p}\right)^2 \left\{ \left(1 + \frac{3}{2} e^2\right) \cdot \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \cdot \left(1 - \frac{7}{4} \sin^2 i\right) + \left(\frac{7}{4} \sin^2 i - \frac{3}{4}\right) e^2 \cos 2\omega \right\} \right]; \\ \dot{\omega} &= n \left(\frac{R}{p}\right)^2 \left[ 3 J_2 \left(1 - \frac{5}{4} \sin^2 i\right) + \frac{3}{2} J_3 \frac{R}{p} \cdot \frac{\sin i \sin \omega}{e} \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot \left\{ 1 - \frac{5}{4} \sin^2 i + e^2 \left(\frac{35}{4} - \frac{35}{4} \sin^2 i - \frac{1}{\sin^2 i}\right) \right\} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{15}{2} J_4 \left(\frac{R}{p}\right)^2 \left\{ 1 - \frac{31}{8} \sin^2 i + \frac{49}{16} \sin^4 i + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sin^2 i \cos 2\omega \left(\frac{3}{8} - \frac{7}{16} \sin^2 i\right) + 0(J_2^2) \right\} \right].\end{aligned}\right\} \quad (20)$$

<sup>2</sup> R.H. Merson, «The Motion of a Satellite in an Axisymmetric Gravitational Field», Geophysical Journal, Vol. 4, London 1961, S. 17-52.

<sup>3</sup> D.G. King-Hele, «The Earth's Gravitational Potential, deduced from the Orbits of Artificial Satellites», Geophysical Journal, Vol. 4, London 1961, S. 3-16.

Die Formeln, welche die Autoren für die Drehung der Bahnebene und der Apsidenlinie geben, sind keineswegs vollständig übereinstimmend, teils wegen der verschiedenen Vernachlässigungen bei der Entwicklung, teils wegen der gänzlich verschiedenen Methoden, auf die wir hier unmöglich eingehen können.

Langperiodische Änderungen erfahren auch die Neigung  $i$  der Bahnebene und die Exzentrizität  $e$  oder die Perigäumsdistanz  $r_P$ , was gleichbedeutend ist, weil die Halbachse  $a$  – immer abgesehen vom Luftwiderstand! – konstant bleibt:

$$\left. \begin{aligned} i &= i_0 + \frac{e J_3}{2 J_2} \cdot \frac{R}{p} \cos i \sin \omega + \frac{15 J_4 e^2}{64 J_2} \left( \frac{R}{p} \right)^2 \cdot \\ &\quad \cdot \frac{1 - \frac{7}{6} \sin^2 i}{1 - \frac{5}{4} \sin^2 i} \sin 2 i (1 - \cos 2 \omega) \\ r_P &= r_{P_0} + \frac{J_3 R}{2 J_2} \sin i \sin \omega + \frac{15 e J_4 R \sin^2 i}{32 J_2} \cdot \\ &\quad \cdot \frac{R}{p} \frac{1 - \frac{7}{6} \sin^2 i}{1 - \frac{5}{4} \sin^2 i} (1 - \cos 2 \omega) \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Hierin beziehen sich  $i_0$  und  $r_{P_0}$  auf  $\omega = 0$ .

Schließlich kann der Wert der Halbachse  $a$  aus der Knotenperiode  $T$  vermöge

$$T = 2 \pi \sqrt{\frac{a^3}{k^2 E}} \left\{ 1 - \frac{3}{8} J_2 \left( \frac{R}{p} \right)^2 (7 \cos^2 i - 1) \right\} \quad (22)$$

abgeleitet werden. In all diesen Gleichungen sind die Bahnelemente  $e$  und  $i$  nicht als oskulierende, sondern als mittlere Elemente zu nehmen.

King-Hele<sup>4</sup> hat auch recht brauchbare Näherungsformeln für die säkularen Störungen im Knoten und im Argument des Perigäums angegeben:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\Omega} &\doteq - \left[ 10,00 \left( \frac{R}{p} \right)^{3,5} \cos i \right] ^\circ/d \\ \dot{\omega} &= + \left[ 5,00 \left( \frac{R}{p} \right)^{3,5} (5 \cos^2 i - 1) \right] ^\circ/d, \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

die aus den Gleichungen (20) unter Beachtung von (7a) leicht abzuleiten sind. Die Drehung der Bahnebene verschwindet also bei der Bahnneigung  $90^\circ$ , was nur natürlich ist, da die zonalen Glieder bei Polbahnen kein Drehmoment erzeugen.  $\dot{\Omega}$  ist ein Maximum für  $i = 0$ , was selbstverständlich nur einen Grenzwert darstellt, weil dann die Definition des Knotens ihren Sinn verliert. Der Knoten bewegt sich rückläufig, also in westlicher Richtung, so-

<sup>4</sup> D.G. King-Hele, «The Effect of the Earth's Oblateness on the Orbit of a Near Satellite», Proc. Roy. Soc. A, 247, S. 49–72, 1958.

lange die Neigung kleiner als  $90^\circ$  ist. Dies war bisher stets der Fall, weil man die Satelliten gerne im Sinne der Erddrehung auf ihre Bahn bringt, um die Rotationsgeschwindigkeit der Erde, rund 460 m/s im Äquator, mit auszunützen. Mit zunehmendem Halbparameter  $p$  oder auch mit wachsender Perigäumshöhe nimmt die Drehung der Bahnebene rasch ab. Es sei aus (23) folgende kleine Tabelle für die Knotenwanderung, ausgedrückt in Graden pro Tag, berechnet:

$i \backslash p-R$	300 km	600 km	900 km
$0^\circ$	— 8,51	— 7,30	— 6,30
$30^\circ$	— 7,37	— 6,32	— 5,46
$60^\circ$	— 4,26	— 3,65	— 3,15
$90^\circ$	0,00	0,00	0,00

Die Änderung des Argumentes  $\omega$  verschwindet für  $\cos^2 i = 1/5$ , das heißt für  $i \doteq 63^\circ 26'$  und  $116^\circ 34'$ . Man hat es also in der Hand, durch geeignete Wahl der Neigung die Drehung der Apsidenlinie zum Verschwinden zu bringen. Analog zur vorhergehenden sei auch für  $\dot{\omega}$  folgende Tabelle gegeben:

$i \backslash p-R$	300 km	600 km	900 km
$0^\circ$	+ 17,00	+ 14,60	+ 12,60
$30^\circ$	+ 11,71	+ 10,04	+ 8,66
$60^\circ$	+ 1,06	+ 0,91	+ 0,79
$90^\circ$	— 4,26	— 3,65	— 3,15

Für den Umlauf der Apsidenlinie ergeben sich also bei einer Perigäumshöhe von 300 km Perioden zwischen 21 Tagen und  $\infty$ .

Abschließend sei noch die Frage der längenabhängigen Glieder gestreift, welche in (15) unterdrückt wurden. Diese bewirken im allgemeinen wegen der Rotation der Erde nur kurzperiodische Störungen, das heißt Störungen von der Periode der Erdrotation und der Satellitenrevolution, die nur schwer erfaßbar sind. In gewissen Resonanzfällen können, wie Cook<sup>5</sup> zeigt, wohl auch säkulare und langperiodische Störungen auftreten; aber auch in diesen Fällen dürften die Absolutbeträge hart an der Grenze, wenn nicht unter der Beobachtungsgenauigkeit liegen.

#### f) Die Bestimmung der Massefunktionen $J_i$

Da wir uns meines Erachtens grundsätzlich auf die Massefunktionen  $J_2$ ,  $J_3$  und  $J_4$  beschränken dürfen, ergibt sich aus der Präzessionsglei-

<sup>5</sup> A.H. Cook, «Resonant Orbits of Artificial Satellites and Longitude Terms in the Earth's External Gravitational Potential», Geophysical Journal, Vol. 4, London 1961, S. 53–72.

chung eines einzigen Satelliten die Massefunktion  $J_2$ , wenn man für  $J_3$  und  $J_2^2$  ausreichende Näherungen einführen kann, während dabei  $J_3$  vernachlässigt werden darf, falls, wie wir es für geodätische Satelliten gefordert haben, die Bahnexzentrizität klein ist. Aus Präzession und Apsidendrehung eines Satelliten erhält man ähnlich  $J_2$  und  $J_4$ , wobei man aber entweder einen recht guten Wert für  $J_3$  benötigt oder sich auf ein Zeitintervall beschränken muß, in welchem  $\sin \omega$  klein ist, damit der Faktor  $(\sin i:e)$  in der zweiten Gleichung (20) nicht zu groß wird. Übrigens ist zu bedenken, daß die Apsidendrehung namentlich bei Bahnen geringer Exzentrizität nur wesentlich ungenauer als  $\dot{\omega}$  aus den Beobachtungen hervorgeht und daß  $\dot{\omega}$  natürlich nur in Verbindung mit  $\dot{\omega}$  bestimmbar ist, weil ja das Argument des Perigäums vom Knoten ab gezählt wird. Hat man die Präzession von  $n$  Satelliten beobachtet, so können im Ausgleichswege  $J_2$  und  $J_4$  bestimmt werden, wenn sich nur die Bahnen hinreichend in der Neigung, eventuell auch im Parameter  $p$  unterscheiden. Bloße Variation von  $a$  und  $e$  bei gleicher Neigung, wie sie etwa durch den Luftwiderstand im Leben eines einzigen Satelliten hervorgerufen wird, genügt nicht. Ist die Zahl der Satelliten groß, so können grundsätzlich neben  $J_2$  und  $J_4$  auch einige höhere Massefunktionen  $J_{2i}$  bestimmt werden, wobei allerdings nur bei sehr hoher Genauigkeit der Elemente verlässliche Resultate zu erwarten sind. Auf diesem Wege dürfte sich in naher Zukunft höchstwahrscheinlich die rapide Abnahme der Massefunktionen  $J_{2i}$  empirisch bestätigen lassen. Die Hauptschwierigkeit für die nötige Genauigkeitssteigerung liegt in der sicheren Erfassung des Luftwiderstandes.

Die starke Konvergenz der geraden Massefunktionen  $J_{2i}$  gegen Null gestattet noch keinen sicheren Schluß auf das Verhalten der ungeraden Massefunktionen, welche allein durch die Abweichungen vom hydrostatischen Gleichgewicht bedingt sind. Es muß daher keineswegs  $J_3$  seiner Größenordnung nach in der Mitte zwischen  $J_2$  und  $J_4$  liegen; viel wahrscheinlicher ist sogar, daß  $J_3$  die Größenordnung von  $J_4$  besitzt. Dennoch darf bei der Bestimmung von  $J_3$  aus (21)  $J_4$  unterdrückt werden, weil es gegenüber  $J_3$  beide Male mit dem Faktor  $e$  multipliziert ist, der zumindest bei den geodätischen Satelliten sehr klein sein wird. Überdies erzeugt  $J_4$  ein Glied mit der Periode  $2\omega$ . Wir können also mit völlig ausreichender Genauigkeit ansetzen:

$$\delta i = \frac{1}{2} \frac{J_3}{J_2} \frac{R}{p} e \cos i \sin \omega; \quad \delta e = -\frac{1}{2} \frac{J_3}{J_2} \frac{R}{a} \sin i \sin \omega. \quad (24)$$

Ungerade Massefunktionen  $J_i$  können nur bei einer Asymmetrie zwischen der Nord- und Südhalbkugel der Erde auftreten. So hat man aus der periodischen Schwankung des Perigäumsabstandes von Vanguard I mit einer Amplitude von etwa 4 km für  $J_3$  den Wert  $-2,4 \cdot 10^{-6}$  berechnet und hieraus geschlossen, daß die nördliche Polarhalbachse der Erde um etwa 16 m größer, die südliche um denselben Betrag kleiner sei als der

Mittelwert. Hier das Wort «Birnenform» zu gebrauchen, scheint reichlich irreführend.

King-Hele<sup>3</sup> hat aus den Satelliten Sputnik 2, Vanguard I und Explorer 7 eine Neuberechnung der geraden Massefunktionen vorgenommen. Ohne auf weitere Einzelheiten einzugehen, sei bemerkt, daß er folgende Zusammenstellung der bisherigen Bestimmungen der Massefunktionen  $J_2$ – $J_6$  gibt:

$$\begin{aligned} J_2 &= (+ 1082,79 \pm 0,15) \cdot 10^{-6} \\ J_3 &= (- 2,4 \pm 0,3) \cdot 10^{-6} \\ J_4 &= (- 1,4 \pm 0,2) \cdot 10^{-6} \\ J_5 &= (- 0,1 \pm 0,1) \cdot 10^{-6} \\ J_6 &= (+ 0,9 \pm 0,8) \cdot 10^{-6} \end{aligned}$$

Sofort fällt auf, daß die mittleren Fehler von  $J_5$  und  $J_6$  gleich groß sind wie die ausgewiesenen Werte. Hinzu kommt, daß King-Hele selbst etwas früher aus einem anderen Satelliten (Explorer 4) für  $J_6$  den Wert  $J_6 = (- 0,1 \pm 1,5) \cdot 10^{-6}$  gefunden hat, während Kozai fast gleichzeitig mit der Neubestimmung von King-Hele für  $J_5 = (- 2,3 \pm 0,2) \cdot 10^{-6}$  berechnet hat. Dies erweckt wohl berechtigte Zweifel, ob die Bestimmungen von  $J_5$  und  $J_6$  überhaupt noch als reell bezeichnet werden dürfen. Unsere späteren theoretischen Betrachtungen werden zeigen, daß  $J_6$  nur von der Größenordnung  $1 \cdot 10^{-8}$  sein kann und sich daher wohl endgültig einer empirischen Bestimmung entzieht.

Aber auch der ausgewiesene Wert für  $J_4$  ist keineswegs so sicher, als man aus dem mittleren Fehler der Bestimmung erwarten dürfte. Es wäre sonst kaum denkbar, daß Schongolowitsch<sup>6</sup>, gleichfalls 1960, aus Sputnik 2, Sputnik 3 und dessen Rakete  $J_4 = (- 4,1 \pm 0,7) \cdot 10^{-6}$  ableiten konnte.

Die obige kleine Tabelle hat übrigens King-Hele zu der Frage angeregt, ob die Massefunktionen  $J_i$  für  $i > 3$  annähernd von derselben Größenordnung sind oder ob sie, wie Jeffreys vermutet, zumindest so rasch wie  $1/i$  abnehmen. Meines Erachtens ist diese Fragestellung nicht einwandfrei. Man muß vielmehr scharf zwischen den geraden und ungeraden Massefunktionen unterscheiden und vorerst die Abnahme der geraden Massefunktionen im Falle des hydrostatischen Gleichgewichtes untersuchen. Die ungeraden Massefunktionen, die, wie schon erwähnt, aus den verhältnismäßig geringen Abweichungen vom hydrostatischen Gleichgewicht resultieren, werden dann vermutlich immer von der Größenordnung der nächstfolgenden geraden Massefunktion sein. Es dürfte somit vollkommen berechtigt sein, die höheren Massefunktionen zu vernachlässigen, und zwar nicht erst ab  $i = 7$ , wie es King-Hele vorschlägt, sondern bereits ab  $i = 5$ .

<sup>6</sup> I. D. Schongolowitsch, «Ein Versuch, bestimmte Parameter des Erdschwerefeldes aus den Beobachtungsergebnissen der Satelliten 1957  $\beta$  2, 1958  $\beta$  1 und 1958  $\beta$  2 abzuleiten», Bull. der Stationen für optische Beobachtung der künstlichen Erdsatelliten, Nr. 2, 1960, S. 1–24.



In diesem Zusammenhang erscheint auch die Deutung etwas irrig, daß die höheren Massenfunktionen eine Auswirkung der regionalen und lokalen Anomalien darstellen. Die geraden Massenfunktionen  $J_{2i}$  beliebiger Ordnung treten auch in der Kugelfunktionsentwicklung der hydrostatischen Gleichgewichtsfiguren auf, also beim Fehlen jeglicher Anomalien. Man müßte dann in der Lage sein, diese Funktionen in einen normalen und einen Störungsanteil zu zerlegen. Es hat somit den Anschein, daß die künstlichen Satelliten derzeit mangels einer ausreichenden theoretischen Kontrollmöglichkeit sozusagen «überfordert» werden. Zur Entscheidung dieser Frage müssen wir zuerst die theoretische Kontrolle entwickeln.

### *g) Die Grundzüge der Theorie der Gleichgewichtsfiguren*

Im folgenden sei in großen Zügen eine Theorie der hydrostatischen Gleichgewichtsfiguren entwickelt, welche im Gegensatz zur klassischen Theorie gänzlich auf dem Außenraumpotential begründet ist. Dies ist möglich, sobald drei Prinzipien nachgewiesen sind. Erstens muß das Dichtegesetz der Gleichgewichtsfiguren streng individuell sein, damit die Unbestimmtheit des Stokesschen Satzes aufgehoben ist. Zu jeder vorgegebenen Figur, die als freie Oberfläche und gleichzeitig Niveaulfläche von unendlich vielen Massenanordnungen denkbar ist, gibt es, wenn überhaupt, so nur eine einzige Massenanordnung im hydrostatischen Gleichgewicht. Dabei kann bekanntlich die Bedingung des Gleichgewichtes so formuliert werden, daß die inneren Niveaulflächen mit den Flächen gleicher Dichte zusammenfallen, wobei lediglich aus Stabilitätsgründen zusätzlich gefordert wird, daß die Dichte nach innen niemals abnimmt. Damit ist gleichzeitig die freie Oberfläche *die* oder *eine* der Flächen der geringsten Dichte. Um ferner vom Außenraum her jede beliebige innere Niveaulfläche mit all ihren geometrischen und physikalischen Daten bestimmen zu können, ist das Prinzip der Entblätterung erforderlich, welches besagt, daß man die Niveaulflächen Schale für Schale abheben kann, wodurch eine Reihe von Gleichgewichtsfiguren mit abnehmenden Dimensionen und abnehmender Masse entsteht. Dies ist jedoch nur möglich, wenn jede zwischen zwei Niveaulflächen einer beliebigen Gleichgewichtsfigur eingeschlossene Masse auf den Innenraum der kleineren der beiden Niveaulflächen keinerlei Anziehungskraft ausübt. Die beiden genannten Prinzipien lassen sich ziemlich leicht aus den Wavreschen Schichtungssätzen beweisen. Schließlich muß es noch möglich sein, die freie Oberfläche aus der Schar der äußeren Niveaulflächen herauszuheben. Dies ist tatsächlich der Fall. Vergleicht man diese Niveaulfläche mit ihren achsengleichen Rotationsellipsoiden, so läßt sich ihre Gestalt durch Achse, Abplattung und einen oder mehrere Formparameter kennzeichnen, welche die Abweichungen vom achsengleichen Ellipsoid beschreiben. Zumindest der erste Formparameter, eine stets negative Größe von der Ordnung des Quadrates der Abplattung, ist nun an der Oberfläche in seinem Absolutbetrag ein Minimum.

Es ist bekanntlich üblich, das Außenraumpotential  $W$  des tatsächlichen Erdkörpers in einen Normal- und einen Störungsteil zu zerlegen:  $W = U + T$ . Wählt man für  $U$  die Kugelfunktionsentwicklung einer schwach abgeplatteten hydrostatischen Gleichgewichtsfigur, welche durch Rotationssymmetrie und Symmetrie zur Äquatorebene ausgezeichnet ist:

$$U_{\infty} = \frac{k^2 E}{r} \left[ 1 - \sum_{i=1}^{\infty} J_{2i} \left( \frac{R}{r} \right)^{2i} P_{2i}(\cos \vartheta) + \frac{\omega^2 R^3}{3 k^2 E} \left( \frac{r}{R} \right)^3 (1 - P_2) \right], \quad (25)$$

so kann man durch «Regularisierung», das heißt durch die Herstellung des hydrostatischen Gleichgewichtes, die Restfunktion  $T$  exakt zum Verschwinden bringen.

Die einfachsten Gleichgewichtsfiguren sind die  $\infty^2$  homogenen MacLaurinschen Ellipsoide. Sie haben keinen Formparameter und können daher auch als «nullparametrische» Gleichgewichtsfiguren bezeichnet werden. Jedes homogene Ellipsoid ist für einen bestimmten Wert der Rotationsgeschwindigkeit im Gleichgewicht; dann gehört die Oberfläche der Schar der inneren Niveaulächen an, welche stets homothetische Ellipsoide sind, und es ist die MacLaurinsche Gleichgewichtsbedingung erfüllt:

$$\bar{\epsilon} = \frac{\omega^2 R^3}{k^2 E} = \frac{4}{5} \alpha + \frac{22}{35} \alpha^2 + \dots \quad (26)$$

Es folgen die  $\infty^3$  einparametrischen, heterogenen Gleichgewichtsfiguren, deren Oberflächen durch Äquatorachse, Abplattung  $\alpha$  und den ersten und einzigen Formparameter  $f_4$  gegeben ist, wobei der Index andeutet, daß es sich um eine Größe 4.0. handelt. Jede dieser Figuren ist, was übrigens auch ganz allgemein gilt, durch die Masse und die Gestalt der Oberfläche, also durch  $[E, R, \alpha, f_4]$ , bestimmt. Selbstverständlich lassen sich die drei geometrischen Bestimmungsstücke auch ganz oder teilweise durch physikalische Parameter ersetzen. Im Hinblick auf (25) empfiehlt sich besonders die Definition der einparametrischen Gleichgewichtsfiguren durch  $[E, R, \omega, J_2]$ . Grundsätzlich ist auch die Festlegung durch die drei Konstanten des streng individuellen, stetigen und differenzierbaren Dichtegesetzes

$$\rho = \rho_{\max} \left[ 1 - \nu \left( \frac{x}{R} \right)^2 \right]^2, \quad (27)$$

also durch  $[E, R, \rho_{\max}, \nu]$  möglich. In (26) ist  $\rho_{\max}$  die Dichte im Schwerpunkt und  $x$  der Äquatorradius der laufenden inneren Niveauläche.

Hält man je zwei Parameter fest, zum Beispiel  $(\omega, R)$ , so entstehen lineare Reihen von Gleichgewichtsfiguren, die stets mit einem homogenen Ellipsoid beginnen und bei fortgesetzt zunehmender Massenkonzentration schließlich in einem «Sphäroid der größten Massenkonzentration» enden. Bei diesen Grenzfiguren erfüllt die Oberflächendichte gerade die Poincarésche Gleichung:

$$\omega^2 = 2 \pi k^2 \rho_{\min}. \quad (28)$$

Speziell für die Rotationsgeschwindigkeit der Erde ist  $\rho_{\min} = 0,013$ . Der Koeffizient  $\nu$  des Dichtegesetzes ist für die homogenen Ellipsoide Null, während er für die Sphäroide der größten Massenkonzentration knapp unter 1 liegt. Um auch einen Einblick in die Zunahme der Maximaldichte zu gewinnen, führen wir das Verhältnis  $n = (\rho_{\max} : \rho_m)$  ein, unter  $\rho_m$  die mittlere Dichte der Figur verstanden. Demnach ist  $n = 1$  für die MacLaurinschen Ellipsoide, während für die Sphäroide der größten Massenkonzentration  $n$  über 4 liegt. Setzt man ferner  $f_4 = -\kappa\alpha^2$ , so erreicht  $\kappa$  bei den Grenzfiguren den Maximalbetrag 1,5.

Setzt man in Verallgemeinerung der MacLaurinschen Bedingung

$$\bar{\varepsilon} = x\alpha + y\alpha^2, \quad (29)$$

so wächst in jeder einparametrischen Figurenreihe  $x$  von 0,8 bis auf 1,4583 an, während  $y$  in Funktion von  $x$  durch die Gleichung

$$22 y \left( 1 - \frac{5}{2} x \right) = \frac{29}{35} x - \frac{95}{2} x^2 + \frac{435}{14} x^3 \quad (30)$$

gegeben ist. Damit nimmt zum Beispiel für die Sphäroide der größten Massenkonzentration die Gleichgewichtsbedingung die Gestalt an:

$$\bar{\varepsilon} = 1,4583 \alpha + 0,0592 \alpha^2. \quad (31)$$

Im allgemeinen Falle, das heißt im Falle der mehrparametrischen Gleichgewichtsfiguren, bei denen höhere Formparameter ( $f_6, f_8 \dots$ ) auftreten, muß die fehlende Gleichgewichtsbedingung dank unserem dritten Prinzip durch die charakteristische Eigenschaft  $df/da = 0$  an der Oberfläche ersetzt werden.

Beschränkt man das Problem der Gleichgewichtsfiguren auf die Näherung 4.0., vernachlässigt also die Glieder 6.0., was sich wegen deren Geringfügigkeit als einzig sinnvoll erweist, so treten neben der Gesamtmasse  $E$  folgende Parameter auf:

- a) die Bestimmungsstücke der geometrischen Gestalt: Äquatorradius  $R$ , Abplattung  $\alpha$  und der erste Formparameter  $f_4$ ;
- b) die Bestimmungsstücke der theoretischen Schwere: Äquatorschwere  $\gamma_0$ , Schwereabplattung  $\beta$  und der Koeffizient  $\beta_4$  von 4.0.;
- c) die Massegrößen: mittlere Dichte  $\rho_m$  und die beiden Massefunktionen  $J_2$  und  $J_4$ ;
- d) die Rotationsgeschwindigkeit  $\omega$ , der Potentialwert  $W_0$  der freien Oberfläche und das Verhältnis  $\varepsilon$  von Fliehkraft zur Schwere am Äquator oder die Größe  $\bar{\varepsilon}$ .

Die genannten Parameter lassen sich durch 9 Gleichungen verbinden, so daß, wie es für die Näherung 4.0. sein muß, drei Bestimmungsstücke bedingt frei gewählt werden können; mit dem Worte «bedingt» ist dabei ausgedrückt, daß die Wahl der freien Parameter weder in ihrer Kombination noch in ihren Zahlwerten gänzlich willkürlich ist. Man findet folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
1. \gamma_0 &= \frac{k}{R^2} \left[ 1 + \alpha - \frac{3}{2} \bar{\varepsilon} + \alpha^2 - \frac{8}{7} \bar{\varepsilon} \alpha + \frac{25}{28} \bar{\varepsilon}^2 \right] \\
2. \beta &= \frac{5}{2} \bar{\varepsilon} - \alpha - \frac{57}{14} \alpha \bar{\varepsilon} + \frac{235}{56} \bar{\varepsilon}^2 \\
3. \beta_4 &= \frac{75}{16} \bar{\varepsilon}^2 - \frac{5}{4} \alpha \bar{\varepsilon} - \frac{1}{2} \alpha^2 \\
4. \rho_m &= \frac{3E}{4\pi} \frac{1}{R^3 (1 - \alpha)} \\
5. J_2 &= \frac{1}{3} \left[ 2\alpha - \bar{\varepsilon} - \alpha^2 + \frac{13}{14} \alpha \bar{\varepsilon} + \frac{25}{56} \bar{\varepsilon}^2 \right] \\
6. J_4 &= -\frac{4}{5} \alpha^2 + \frac{6}{7} \alpha \bar{\varepsilon} - \frac{5}{14} \bar{\varepsilon}^2 \\
7. W_0 &= \frac{kE}{R} \left[ 1 + \frac{\bar{\varepsilon}}{3} + \frac{\alpha}{3} + \frac{2}{15} \alpha^2 - \frac{1}{6} \alpha \bar{\varepsilon} + \frac{5}{24} \bar{\varepsilon}^2 \right] \\
8. \varepsilon &= \frac{\omega^2 R}{\gamma_0} \quad \text{oder} \quad \bar{\varepsilon} = \frac{\omega^2 R^3}{k^\infty E} = \varepsilon \left( 1 + \alpha - \frac{3}{2} \varepsilon \right) \\
9. f_4 &= \frac{5}{4} \bar{\varepsilon} \left( \alpha - \frac{5}{4} \bar{\varepsilon} \right)
\end{aligned} \tag{32}$$

Diese Gleichungen sind also Näherung 4.0. sowohl für die einparametrischen wie auch für alle mehrparametrischen Gleichgewichtsfiguren.

Verschwindet die zu  $U_\infty$  gehörige Restfunktion  $T$ , so stellt der Potentialausdruck

$$U_4 = \frac{k^2 E}{r} \left[ 1 - J_2 \left( \frac{R}{r} \right)^2 P_2 - J_4 \left( \frac{R}{r} \right)^4 P_4 + \frac{\omega^2 R^3}{3k^2 E} \left( \frac{r}{R} \right)^3 (1 - P_2) \right] \tag{25a}$$

sämtliche denkbare Gleichgewichtsfiguren und deren äußere Niveauflächen in Annäherung 4.0. dar. Jede der  $\infty^3$  Flächen  $S(R, \alpha, f_4)$  ist überdies für einen bestimmten Wert der Rotationsgeschwindigkeit in aller Strenge eine einparametrische Gleichgewichtsfigur; das heißt, alle höheren Formparameter sind exakt Null. Damit verschwinden aber natürlich nicht auch die höheren Massenfunktionen  $J_6, J_8, \dots$ . Weil aber das Dichtegesetz (27) der einparametrischen Figuren bekannt ist, können bei entsprechender Weiterentwicklung über  $U_4$  hinaus die höheren Massenfunktionen eindeutig berechnet werden. Ist aber dieselbe Figur bloß Näherung 4.0. irgendeiner mehrparametrischen Gleichgewichtsfigur, so müßten die höheren Massenfunktionen empirisch ermittelt werden, was mit Hilfe der künstlichen Satelliten wohl theoretisch, kaum aber praktisch möglich ist. Mithin lassen sich mehrparametrische Figuren offen-

sichtlich nur mit Hilfe der Konstanten ihres streng individuellen Dichtegesetzes berechnen.

Wir definieren daher die mehrparametrischen Gleichgewichtsfiguren am besten folgendermaßen:

1. Die mehrparametrischen Gleichgewichtsfiguren bestehen aus verschiedenen Teilen, die gegeneinander durch Niveauflächen begrenzt sind.

2. Jeder Teil ist entweder homogen oder hat ein Dichtegesetz der Gestalt (27), jedoch eine andere Abplattungsfunktion als die entsprechende einparametrische Figur.

3. An den Trennungsflächen der aufeinanderfolgenden Teile tritt ein Wechsel des Dichtegesetzes ein, wobei ein Dichtesprung nicht ausgeschlossen ist (Diskontinuitätsflächen der Dichte).

4. Bei Entblätterung bis zur innersten Trennungsfläche resultiert ein null- oder einparametrischer Kern.

5. Aus Stabilitätsgründen kann die Dichte nach innen niemals abnehmen.

Damit ist der Stufenaufbau der komplizierteren Gleichgewichtsfiguren bereits vorgezeichnet. Die  $\infty^4$  zweiparametrischen Figuren mit den Oberflächen  $S(R, \alpha, f_4, f_6)$  haben ein Dichtegesetz mit 4 Konstanten. Es handelt sich also um die sogenannten Wiechertschen Modelle, bestehend aus einem homogenen Kern und einem ebensolchen Mantel. Die  $\infty^5$  dreiparametrischen Figuren  $S(R, \alpha, f_4, f_6, f_8)$  haben ein Dichtegesetz mit 5 Konstanten; das heißt, sie können wegen  $5 = 2 + 3$  nur aus einem homogenen Mantel und einem heterogenen Kern oder umgekehrt bestehen. Das allgemeinste zweiteilige Modell ist somit vierparametrisch ( $6 = 3 + 3$ ), usw.

#### *h) Das Normalsphäroid der Erde*

Ohne Zweifel wird die Normalfigur der Erde am besten als hydrostatische Gleichgewichtsfigur definiert und in Näherung 4.0. aus  $[E, \omega, R, J_2]$  bestimmt, wie es gemäß (32) am natürlichsten erscheint. Die Potentialentwicklung der tatsächlichen Erde weist nun eine Restfunktion  $T$  auf, welche durch die sichtbaren und unsichtbaren Massenunregelmäßigkeiten bedingt ist, von denen gewöhnlich angenommen wird, daß sie auf die Kruste beschränkt sind. Heben wir daher die gesamte Kruste ab, so haben wir sie zwecks «Regularisierung» zweiteilig aus einer homogenen Wasserhülle und einer heterogenen festen Kruste aufzubauen, und zwar über der Oberfläche des Mantels, die wir als idealisierte Mohorovicic-Fläche betrachten dürfen. Für diesen Aufbau ist also ein Dichtegesetz mit 5 Konstanten erforderlich, von denen aber nur drei, nämlich der Äquatorradius  $R$  der Gesamtfigur, die Dicke der Wasserhülle, welche identisch ist mit der mittleren Tiefe der Lithosphäre, und die Dichte des Wassers ( $\rho = 1,028$ ), empirisch vorgegeben sind. Mithin können die zwei spezifischen Konstanten des Dichtegesetzes der festen Kruste so gewählt werden, daß die Anteile der gesamten Kruste an den Trägheitsmomenten

der Erde, genauer gesagt am Hauptträgheitsmoment  $C$  um die Rotationsachse und am mittleren äquatorialen Trägheitsmoment  $(A + B)/2$ , bei der Regularisierung nicht geändert werden. Nebenbei bemerkt, ermöglicht dies eine Verfeinerung der isostatischen Reduktion. Unsere Forderung ist nicht nur möglich, sondern offenbar auch die beste, weil ja der Drehimpuls  $\omega C$  des in sich geschlossenen Massesystems der Erde unverändert bleiben muß.

Mithin gibt es eine Gleichgewichtsfigur, welche mit der wirklichen Erde alle vier obigen Bestimmungsstücke gemeinsam hat, was besonders für die «statische Abplattung»

$$J_2 = \frac{C - A}{ER^2} = \frac{1}{R^2} K_2 \quad (33)$$

wichtig ist. Das «Massenmoment  $K_2$ » 2.0. ist die durch die Erdmasse dividierte Differenz der Trägheitsmomente. Erst seit wir die statische Abplattung mit der nötigen Genauigkeit aus den künstlichen Satelliten ableiten können, ist eine Berechnung des Normalsphäroides in Näherung 4.0. ohne eine Voraussetzung über die Parameterzahl oder über das Dichtegesetz möglich. Nur müssen wir die primär unbekannte Erdmasse durch die empirisch gut bekannte Äquatorschwere  $\gamma_0$  ersetzen. Mit den Ausgangsdaten

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= 978,037 \text{ gal}; \quad \omega^2 = 5,317496 \cdot 10^{-9} \text{ sec}^{-2}; \\ R &= 6\,378\,290 \text{ m}; \quad J_2 = 10\,8310 \cdot 10^{-8} \end{aligned} \quad (34)$$

finden wir aus (32) das Normalsphäroid:

$$\left. \begin{aligned} E &= 5976,32 \cdot 10^{24} \text{ g}; \quad \alpha = 335289 \cdot 10^{-8} = 1:298,25; \\ f_4 &= -426 \cdot 10^{-8}; \quad \beta = 530379 \cdot 10^{-8}; \quad \beta_4 = +3613 \cdot 10^{-8}; \\ \varepsilon &= 346782 \cdot 10^{-8}; \quad \bar{\varepsilon} = 346147 \cdot 10^{-8}; \quad \rho_m = 5,5168 \\ K_2 &= 44063,3 \cdot 10^{10} \text{ cm}^2; \quad J_4 = -332 \cdot 10^{-8} \\ W_0 &= 62638,5 \cdot 10^7 \text{ cm}^2 \text{ sec}^{-2} \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Aus dieser hydrostatischen Gleichgewichtsfigur ergibt sich sofort ein wichtiger Schluß für die Massefunktion  $J_4$ . Bei der Regularisierung der Erdkruste kann sich wohl  $J_4$  geringfügig ändern. Jedoch ist es ziemlich evident, daß die Änderung kaum mehr als 3%  $\sim 1 \cdot 10^{-7}$  betragen kann. Mithin stellt das theoretische Ergebnis eine sehr gute Kontrolle der empirischen Bestimmung dar. Tatsächlich liegen die empirischen Bestimmungen zwischen  $-1,4$  und  $-4,1 \cdot 10^{-6}$ ; es hat demnach den Anschein, daß das Ergebnis von Schongolowitsch der Wahrheit am nächsten kommt.

Für einparametrische Gleichgewichtsfiguren gilt die Identität der Reihen

$$(\omega, K_2) \equiv (\omega, C) \equiv (\omega, H), \quad (36)$$

wenn wir unter  $H$  die dynamische Abplattung verstehen:

$$H = (C - A) : C \quad (37)$$

Wäre also unser Normalsphäroid (35) eine einparametrische Gleichgewichtsfigur, so könnten wir am homogenen Ausgangsellipsoid der zugehörigen Reihe  $(\omega, K_2)$ :

$$a_h = 5\,812\,413 \text{ m}; \quad \alpha_h = 32\,6598 \cdot 10^{-8}, \quad (38)$$

trotzdem dessen Achse um rund 566 km kleiner ist, die Trägheitsmomente der wahren Erde ablesen:

$$\begin{aligned} C &= \frac{2}{5} E a_h^2 = 80\,762 \cdot 10^{40} \text{ g cm}^2; \quad H = 32\,6065 \cdot 10^{-8} \\ C - A &= 263,34 \cdot 10^{40} \text{ g cm}^2. \end{aligned} \quad (39)$$

Dieses Ergebnis steht nun in krassem Widerspruch zu der aus der Präzessionskonstante empirisch abgeleiteten dynamischen Abplattung:

$$H = 32\,7237 \cdot 10^{-8}, \quad (40)$$

welcher numerische Wert von Bullard<sup>7</sup> im Jahre 1948 ermittelt wurde. Statt aber hieraus den Schluß zu ziehen, daß die Erde nicht einparametrisch sein kann, hat man wiederholt erklärt, diese auffallende Diskrepanz zwischen der statischen und dynamischen Abplattung beweise, daß die wirkliche Erde stärker vom hydrostatischen Gleichgewicht abweiche, als man früher vermutet hat, und daß es daher nicht zweckentsprechend wäre, dem Problem des Geoides ein hydrostatisches Normalsphäroid als Vergleichsfläche zugrunde zu legen.

Diese Diskrepanz hat aber noch einen verhängnisvolleren Fehlschluß gezeitigt. Vor den künstlichen Satelliten konnte die statische Abplattung nur mit sehr mäßiger Genauigkeit aus den Ungleichheiten der Mondbewegung abgeleitet werden, weshalb man es stets vorzog, lieber von der dynamischen Abplattung auszugehen. Mit den Ausgangsdaten  $[\gamma_0, \omega, R, H]$  findet man in indirekter Rechnung über das homogene Ausgangsellipsoid der zugehörigen Reihe  $(\omega, H)$  die einparametrische Gleichgewichtsfigur:

$$\left. \begin{aligned} E &= 5976,26 \cdot 10^{24} \text{ g}; \quad a = 6\,378\,290 \text{ m}; \quad \alpha = 33\,6267 \cdot 10^{-8} = \\ &= 1:297,38; \quad J_2 = 108960 \cdot 10^{-8}; \quad K_2 = 44327,6 \cdot 10^{10} \text{ cm}^2; \\ C &= 80955 \cdot 10^{40} \text{ g cm}^2; \quad (C - A) = 264,91 \cdot 10^{40} \text{ g cm}^2. \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

<sup>7</sup> *E.C. Bullard*, «The Figure of the Earth», Monthly Not. Roy. Astr. Soc., Suppl. Vol. V, N. 6, 1948.

Durch die gleichzeitige empirische Bestimmung der statischen und dynamischen Abplattung sind schließlich beide Trägheitsmomente der tatsächlichen Erde gegeben, falls man die Masse  $E$  bereits kennt. Mit den Werten (35) für  $E$  und  $K_2$  und mit der dynamischen Abplattung (40) findet man:

$$\begin{aligned} K_2 E &= (C - A) = 263,34 \cdot 10^{40} \text{ g cm}^2; \\ C &= (C - A) : H = 80473 \cdot 10^{40} \text{ g cm}^2. \end{aligned} \quad (42)$$

Mit diesem Trägheitsmoment kann man das homogene Ellipsoid [ $E$ ,  $\omega$ ,  $C$ ] berechnen und findet in der zugehörigen Reihe ( $\omega$ ,  $C$ ) folgende Figur mit der Achse  $a = 6\,378\,290$  m:

$$\begin{aligned} K_2 &= 43663,3 \cdot 10^{10} \text{ cm}^2; \quad J_2 = 10\,7327 \cdot 10^{-8}; \\ H &= 32\,4267 \cdot 10^{-8}; \quad \alpha = 33\,3681 \cdot 10^{-8} = 1:299,69. \end{aligned} \quad (43)$$

Diese Rechnung ist sicherlich exakter als die Verwendung einer klassischen Näherungsformel für  $C$ , mit welcher Henriksen<sup>8</sup> und J. O'Keefe<sup>9</sup> die Abplattung 1:300 beziehungsweise 1:299,8 gefunden haben.

Es geht jedoch nicht an, hieraus den Schluß zu ziehen, diese Abplattung wäre die richtige «hydrostatische» Abplattung, und im Gegensatz dazu den Wert (35) :  $\alpha = 1 : 298,25$  als «tatsächliche» Abplattung des Erdkörpers zu bezeichnen. Vielmehr sind alle drei Lösungen (35), (41) und (43) hydrostatische Gleichgewichtsfiguren, jedoch mit dem Unterschied, daß nur die erste allgemein gilt, während die beiden letzten an die Voraussetzung einer einparametrischen Figur gebunden sind. Wäre das Normalsphäroid der Erde einparametrisch, so würden die drei Lösungen zusammenfallen. Die Diskrepanz beweist also bloß, daß die Normalfigur der Erde mehrparametrisch ist.

Wir wollen noch die Frage des Unterschiedes zwischen der tatsächlichen und der hydrostatischen Abplattung prüfen. Hierzu benötigen wir aber noch die Massefunktion  $J_4$ , für welche die empirischen Werte zwischen  $-4,1 \cdot 10^{-6} \leq J_4 \leq -1,1 \cdot 10^{-6}$  schwanken. Mit den Daten [ $E$ ,  $\omega$ ,  $R$ ,  $J_2$ ,  $J_4$ ] kann das von Helmert für die allgemeinen Niveausphäroide aufgestellte Gleichungssystem aufgelöst werden, und man findet ohne die Voraussetzung des Gleichgewichtes für das zum Geoid gehörige Niveausphäroid die «tatsächliche» Abplattung zwischen den Grenzen:

$$298,29 \geq \alpha^{-1} \geq 298,12, \quad (44)$$

womit gezeigt ist, daß die tatsächliche und die hydrostatische Abplattung (35) innerhalb der Unsicherheit ihrer Bestimmung völlig zusammenfallen.

<sup>8</sup> S.W. Henriksen, «The Hydrostatic Flattening of the Earth», *Annals of IGY 12*, S. 197–198, 1960.

<sup>9</sup> J.A. O'Keefe, A. Eckels, R.K. Squires, «The Gravitational Field of the Earth», *Astr. Journal 64*, 1959; «Discussion of a Paper by W. A. Heiskanen», *Journal of Geophysical Research 66*, 1992/3, 1961.



Oben wurde bereits festgestellt, daß der theoretische Wert von  $J_4$  höchstens um wenige Prozente vom tatsächlichen Wert verschieden sein kann und sich daher recht gut zur Überprüfung der empirischen Bestimmung von  $J_4$  aus den künstlichen Satelliten eignet. Ähnlich ist es von Interesse, die Größenordnung von  $J_6$  zu untersuchen und damit die Frage zu klären, ob überhaupt eine empirische Bestimmung noch möglich ist. Hierzu ist natürlich eine Entwicklung bis einschließlich der Glieder 6.0. notwendig. Ein derartiges System kann derzeit nur für die einparametrischen Gleichgewichtsfiguren aufgestellt werden. Bedenkt man jedoch die geringen Unterschiede, wie sie zum Beispiel in (44) für die Abplattung in Erscheinung getreten sind, so ist klar, daß die Beschränkung auf den einparametrischen Fall die Größenordnung nicht mehr berührt. Man findet für die einparametrischen Gleichgewichtsfiguren das erweiterte Gleichungssystem:

$$\left. \begin{aligned}
 3J_2 &= \left[ 2\alpha - \bar{\varepsilon} - \alpha^2 + \frac{13}{14} \alpha \bar{\varepsilon} + \frac{25}{56} \bar{\varepsilon}^2 \right] - \frac{1621}{2156} \alpha^2 \bar{\varepsilon} - \\
 &\quad - \frac{1745}{2156} \alpha \bar{\varepsilon}^2 + \frac{2050}{2156} \bar{\varepsilon}^3; \\
 J_4 &= \left[ \frac{6}{7} \alpha \bar{\varepsilon} - \frac{4}{5} \alpha^2 - \frac{5}{14} \bar{\varepsilon}^2 \right] + \frac{4}{5} \alpha^3 - \frac{3909}{2695} \alpha^2 \bar{\varepsilon} + \\
 &\quad + \frac{524}{539} \alpha \bar{\varepsilon}^2 - \frac{415}{2156} \bar{\varepsilon}^3; \\
 J_6 &= \frac{8}{7} \alpha^3 - \frac{340}{231} \alpha^2 \bar{\varepsilon} + \frac{200}{231} \alpha \bar{\varepsilon}^2 - \frac{125}{462} \bar{\varepsilon}^3; \\
 f_4 &= \left[ \frac{5}{4} \alpha \bar{\varepsilon} - \frac{25}{16} \bar{\varepsilon}^2 \right] - \frac{29}{616} \alpha^2 \bar{\varepsilon} + \frac{475}{176} \alpha \bar{\varepsilon}^2 - \frac{2175}{1232} \bar{\varepsilon}^3.
 \end{aligned} \right\} (45)$$

Für unseren Zweck genügt es vollkommen, mit den Näherungen 4.0. aus (35) die Zusatzglieder 6.0. zu berechnen. Es ändern sich  $J_4$  um  $-0,5 \cdot 10^{-8}$  und  $f_4$  um  $+3,3 \cdot 10^{-8}$ , während sich  $J_6 = +0,9 \cdot 10^{-8}$  ergibt. Damit ist eindeutig die rapide Abnahme der Massefunktionen  $J_{2i}$  erwiesen: im Absolutbetrag ist  $J_2 = 326 J_4$  und  $J_4 = 353 J_6$ . Also ist es tatsächlich völlig hoffnungslos, wenn man aus den künstlichen Satelliten noch  $J_5$  und  $J_6$  bestimmen will; dies würde eine empirische Genauigkeit von  $1 \cdot 10^{-8}$  erfordern.

Somit dürfte zur Genüge gezeigt sein, daß erst die neue Theorie der Gleichgewichtsfiguren ein Mittel in die Hand gibt, die Ableitungen der verschiedenen Massefunktionen aus den Bahnstörungen der künstlichen

Satelliten kritisch zu prüfen. Hinsichtlich weiterer Angaben darf auf den Artikel von Hergenbahn<sup>10</sup> verwiesen werden, der bis auf einige von anderen Autoren übernommene irrige Deutungen ganz vorzüglich ist.

(Fortsetzung folgt.)

## Kommission für Berufswerbung

### *Beschäftigung von Schülern als Ferienpraktikanten*

Wie der gemeinsamen Kommission für Berufspropaganda des SVVK, der Fachgruppe Kulturingenieure SIA und der beiden Konferenzen bekannt ist, beschäftigen verschiedene unserer Ingenieur- und Vermessungsbüros während der Ferien Sekundar- oder Mittelschüler als Volontäre. Es scheint uns diese Maßnahme ein geeignetes Mittel der Berufswerbung zu sein. Die jungen Leute bekommen dadurch Einblick in die Tätigkeit der Meßgehilfen, Zeichner, Techniker und Ingenieure, und aus dieser Kontaktnahme kann der Entschluß zur Ergreifung eines solchen Berufes resultieren.

Wir empfehlen daher unsern Büroinhabern, in den kommenden Sommerferien vermehrt Sekundar- oder Mittelschüler als Praktikanten zu beschäftigen. Dabei kann auch der Austausch zwischen verschiedenen Landesgegenden erwogen werden.

## Rapport annuel du Comité central de la S. S. M. A. F. pour l'année 1961

### *1. Généralités*

L'activité de la Société depuis l'assemblée générale du 2 juin 1961 à Locarno a été, une fois encore, marquée par le souci que cause la question de la formation professionnelle, question qui n'est pas encore résolue à notre satisfaction.

Le travail de la Commission de propagande a été récompensé par un très beau recrutement à la section VIII de l'Ecole polytechnique fédérale.

Sur le plan international la Société a organisé la session du Comité permanent de la F. I. G., session qui s'est tenue à Berne du 8 au 14 juin 1961. De plus, le Comité s'est occupé très activement du Congrès de Vienne, qui aura lieu du 24 août au 1<sup>er</sup> septembre prochains.

La Société a été représentée officiellement à plusieurs manifestations.

### *2. Mutations*

Au cours de l'année sont décédés: 1 membre honoraire: M. le professeur Dr F. Baeschlin Zollikon; 1 membre actif: M. Pastorelli Arturo à Lugano; 7 membres vétérans: MM. Amrein Hermann, Breganzona; Grossmann Albert, Muri; Hartmann Julius, Lenzburg; Kormann Ernst, Langenthal; Marcoli Emilio, Biogno-Beride; Raschle Hans, Bülach; Savary Henri, Montlingen. Honneur à leur mémoire!

Huit membres sont nommés membres vétérans. Ce sont: Büchi Hermann, Winterthur; Hohloch Wilhelm, Wabern; Lattmann Hermann,

<sup>10</sup> G. Hergenbahn, «Die Bestimmung der Erdgestalt mit Hilfe künstlicher Satelliten», Zeitschrift für Vermessungswesen, Stuttgart 1960, S. 342–371.