

**Zeitschrift:** Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie

**Herausgeber:** Schweizerischer Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Société suisse de la mensuration et du génie rural

**Band:** 64 (1966)

**Heft:** 2

**Artikel:** Die Ausgleichung trigonometrischer Punkte im Lichte der Mittelbildungseigenschaft der Methode der kleinsten Quadrate

**Autor:** Gleinsvik, Paul

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-220742>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 15.03.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Photogrammetrie und Kulturtechnik

Revue technique Suisse des Mensurations, de Photogrammétrie et du Génie rural

Herausgeber: Schweiz. Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik; Schweiz. Gesellschaft für Photogrammetrie; Fachgruppe der Kulturingenieure des SIA

Editeurs: Société suisse des Mensurations et Améliorations foncières; Société suisse de Photogrammétrie; Groupe professionnel des Ingénieurs du Génie rural de la SIA

Nr. 2 • LXIV. Jahrgang

Erscheint monatlich

15. Februar 1966

## Die Ausgleichung trigonometrischer Punkte im Lichte der Mittelbildungseigenschaft der Methode der kleinsten Quadrate

Von Prof. Dr. techn. Paul Gleinsvik, Vollebakk (Norwegen)

### Zusammenfassung

In dem vorliegenden Aufsatz werden verschiedene Fragen hinsichtlich der Bestimmung sowie der Genauigkeit trigonometrischer Punkte behandelt, und zwar unter dem Gesichtswinkel des in [2] nachgewiesenen mittelbildenden Mechanismus der Methode der kleinsten Quadrate.

Es wird festgestellt, daß für die einzelnen Neupunkte sowohl die ausgeglichenen Werte der Koordinaten als auch der sich aus der Ausgleichung ergebende Wert des mittleren Punktfehlers, der Radiusvektor der Fußpunktkurve und die Orientierung der Fehlerellipse bei ihrem Entstehen derselben Gesetzmäßigkeit folgen: Alle diese Größen ergeben sich als allgemeine arithmetische Mittel aller möglicher Partialwerte, die sich aus dem Beobachtungsmaterial ohne Ausgleichung ableiten lassen.

### Résumé

Dans le présent article quelques questions concernant la détermination des points trigonométriques et la précision qui s'y rattache font l'objet d'une analyse au point de vue du mécanisme de la méthode des moindres carrés démontré dans [2]. Il se trouve en effet que pour chacun des points inconnus les valeurs compensées des coordonnées, l'erreur moyenne des points compensés, le rayon recteur de la « Fusspunktkurve » (courbe des sommets du rayon vecteur représentant l'erreur moyenne dans une direction quelconque) et l'orientation de l'ellipse d'erreur sont en ce qui concerne leur origine soumises aux mêmes lois: toutes ces grandeurs coïncident avec les moyennes arithmétiques générales de toutes les valeurs correspondantes possibles, non compensées.

## 1. Einleitung

In einer früheren Arbeit [2] wurde generell nachgewiesen, daß der «Mechanismus» der Methode der kleinsten Quadrate in einer Mittelbildung nach Gewicht besteht. Die Ergebnisse einer strengen Ausgleichung entstehen durch gewogene Mittelbildung aus allen möglichen korrespondierenden Partialwerten. Dies trifft sowohl für die Zahlenwerte der verschiedenen Größen als auch für die Genauigkeit derselben zu. Es bestehen also ganz allgemein folgende Relationen (das Zeichen ' indiziert unausgeglichene Partialwerte):

$$m = \frac{[p' m']}{[p']} \text{ und } Q_{mm} = \frac{1}{\ddot{u} + 1} \frac{[p' Q'_{mm}]}{[p']}$$

Hierbei ist  $m$  eine beliebige Größe, welche direkt (als Unbekannte) oder indirekt (als Funktion der Unbekannten) durch die Ausgleichung bestimmt wird, und  $\ddot{u}$  die Anzahl der Überbestimmungen. Die Gewichte  $p'$  sind gegeben durch ( $u$  ist die Anzahl der Unbekannten):

$$p' = p_i p_j \dots p_u \cdot D^2_{ij \dots u}$$

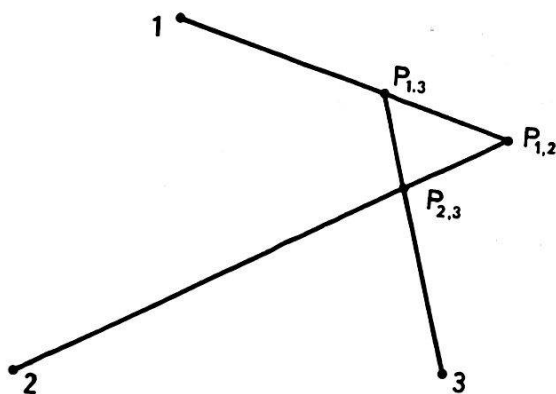
Dabei sind  $p_i, p_j, \dots, p_u$  die Gewichte der einzelnen Fehlergleichungen einer beliebigen der im ganzen  $\binom{n}{u}$  möglichen Kombinationen der  $n$  Fehlergleichungen, von denen jede einzelne gerade ausreicht, die Unbekannten zu bestimmen, und  $D_{ij \dots u}$  sind die dazugehörigen Determinanten.

In welcher Weise diese Mittelbildungseigenschaft der Methode der kleinsten Quadrate die trigonometrische Punktbestimmung «beeinflusst», soll hier etwas eingehender untersucht werden.

## 2. Die ausgeglichenen Werte der Koordinaten

Bei der Behandlung dieses Problems beschränken wir uns auf das überbestimmte Vorwärts- und Rückwärtseinschneiden und die Einzelpunktbestimmung durch Trilateration.

### 2.1. Das überbestimmte Vorwärtseinschneiden



Figur 1

In der Figur 1 wird ein Neupunkt  $P$  durch die drei Visuren von den Festpunkten 1, 2 und 3 bestimmt. Die Punkte  $P_{1,2}$ ,  $P_{1,3}$  und  $P_{2,3}$  sind die Schnittpunkte zwischen jeweils zwei Strahlen und bilden somit die sogenannte fehlerzeigende Figur. Infolge des Mechanismus der Methode der kleinsten Quadrate ergibt sich die ausgeglichene Punktlage als allgemeines arithmetisches Mittel von  $P_{ij}$ .

Dies bedeutet  $x = \frac{[p_{ij} \cdot x_{ij}]}{[p_{ij}]}$  und  $y = \frac{[p_{ij} \cdot y_{ij}]}{[p_{ij}]}$ ,

unter der Voraussetzung, daß die Gewichte auf  $p_{ij} = p_i p_j D^2_{ij}$  fixiert werden, wobei  $p_i$  und  $p_j$  die Gewichte der einzelnen Strahlen (Fehlergleichungen) einer unausgeglichenen Bestimmung von  $P$  und  $D_{ij}$  die dazugehörige Determinante sind. Für letztere ergibt sich aus der Kombination von zwei beliebigen Fehlergleichungen:

$$\begin{aligned} v_i &= a_i x + b_i y + f_i \\ v_j &= a_j x + b_j y + f_j \end{aligned} \quad \left( a = -\frac{\varrho}{S} \sin \varphi \text{ und } b = \frac{\varrho}{S} \cos \varphi \right)$$

$$D = a_i b_j - a_j b_i = -\frac{\sin \varphi_i \cos \varphi_j}{S_i S_j} \varrho^2 + \frac{\sin \varphi_j \cos \varphi_i}{S_i S_j} \varrho^2 = -\frac{\varrho^2}{S_i S_j} \sin \gamma_{ij}.$$

Hierbei ist  $\gamma_{ij}$  der Schnittwinkel im Neupunkt zwischen den Strahlen  $i$  und  $j$ . Die bei der Mittelbildung zu verwendenden Gewichte werden folglich zu:

$$p_{1,2} = p_1 p_2 \frac{\sin^2 \gamma_{1,2}}{S_1^2 S_2^2}, \quad p_{1,3} = p_1 p_3 \frac{\sin^2 \gamma_{1,3}}{S_1^2 S_3^2} \quad \text{und} \quad p_{2,3} = p_2 p_3 \frac{\sin^2 \gamma_{2,3}}{S_2^2 S_3^2}$$

oder anders geschrieben

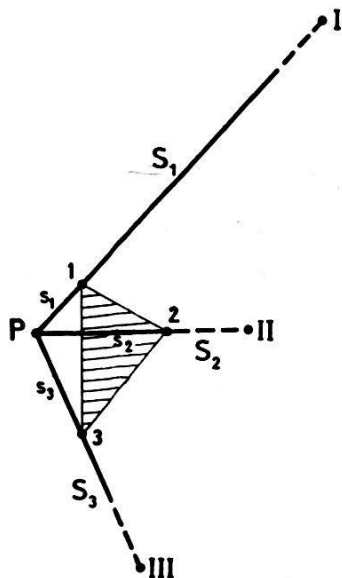
$$p_{1,2} = p_1 p_2 S_3^2 \sin^2 \gamma_{1,2}, \quad p_{1,3} = p_1 p_3 S_2^2 \sin^2 \gamma_{1,3} \quad \text{und} \quad p_{2,3} = p_2 p_3 S_1^2 \sin^2 \gamma_{2,3}$$

## 2.2 Das überbestimmte Rückwärtseinschneiden

Genauso wie beim Vorwärtseinschneiden ergibt sich auch hier eine fehlerzeigende Figur, auf Grund welcher sich der ausgeglichene Punkt als gewogenes Mittel der Eckpunkte derselben ableiten läßt (bei nur einer überschüssigen Richtung wird diese Figur aus 4 Punkten bestehen, entsprechend den  $\binom{4}{3}$  Kombinationsmöglichkeiten).

Aus dem Fehlergleichungssystem des einfachen Rückwärtseinschneidens (siehe Figur 2, wo der Neupunkt  $P$  von den drei Festpunkten I, II und III aus bestimmt wird)

$$\begin{aligned} v_1 &= -z + a_1 x + b_1 y + f_1 \\ v_2 &= -z + a_2 x + b_2 y + f_2 \\ v_3 &= -z + a_3 x + b_3 y + f_3 \end{aligned} \quad \left( a = \frac{\varrho}{S} \sin \varphi \text{ und } b = -\frac{\varrho}{S} \cos \varphi \right)$$



Figur 2

ergibt sich für die Determinante

$$D = (a_2 b_1 - a_1 b_2) + (a_3 b_1 - a_1 b_3) + (a_3 b_2 - a_2 b_3)$$

Dieser Ausdruck ist bekanntlich gleich der doppelten Fläche des reziproken Dreiecks (in Figur 2 ist 1, 2, 3 das reziproke Dreieck), das heißt:

*Auch beim überbestimmten Rückwärtseinschneiden ist die ausgeglichene Punktlage identisch mit dem gewogenen Mittel der Eckpunkte der fehlerzeigenden Figur. Hierbei sind die Gewichte auf*

$$p_{ijk} = p_i p_j p_k \cdot F_{ijk}^2$$

*zu fixieren, wobei F die Fläche des reziproken Dreiecks der Kombination i, j, k und  $p_i$ ,  $p_j$  und  $p_k$  die dazugehörigen Einzelgewichte darstellen.*

### 2.3 Die Einzelpunktbestimmung durch Trilateration

Das Fehlergleichungssystem, auf welchem eine beliebige unausgeglichene Bestimmung des Neupunktes beruht, lautet (die  $\varphi$  beziehen sich auf den Neupunkt):

$$v_i = -\cos \varphi_i x - \sin \varphi_i y + f_i$$

$$v_j = -\cos \varphi_j x - \sin \varphi_j y + f_j$$

mit der Determinanten

$$D = \sin \varphi_j \cos \varphi_i - \sin \varphi_i \cos \varphi_j = \sin \gamma_{ij},$$

wobei  $\gamma_{ij}$  der Schnittwinkel im Neupunkt zwischen den Seiten  $i$  und  $j$  ist.

Die Mittelbildungseigenschaft der Methode der kleinsten Quadrate führt somit diesmal zum folgenden Schluß: *Bei der Einzelpunktbestimmung durch Trilateration ergibt sich die ausgeglichene Punktlage als gewogenes Mittel der Eckpunkte der fehlerzeigenden Figur, wobei die Gewichte auf*

$$p_{ij} = p_i p_j \sin^2 \gamma_{ij}$$

*zu fixieren sind ( $p_i$  und  $p_j$  sind die Gewichte der Seiten  $i$  und  $j$ ).*

## 3. Der Zusammenhang zwischen der Genauigkeit der Ausgleichs- und der Partialergebnisse

### 3.1. Der mittlere Punktfehler

Der Gewichtungskoeffizient des mittleren Punktfehlers ist bekanntlich gegeben durch:

$$Q_{MM} = Q_{xx} + Q_{yy}$$

Bei Berücksichtigung der Entstehung von  $Q_{xx}$  und  $Q_{yy}$  aus den Partialwerten ergibt sich (das Zeichen ' indiziert auch hier Partialergebnisse):

$$Q_{MM} = \frac{1}{\ddot{u} + 1} \left( \frac{[p' Q'_{xx}]}{[p']} + \frac{[p' Q'_{yy}]}{[p']} \right) = \frac{1}{\ddot{u} + 1} \frac{1}{[p']} \sum p' \underbrace{(Q'_{xx} + Q'_{yy})}_{Q'_{MM}}$$

$$= \frac{1}{\ddot{u} + 1} \frac{[p' Q'_{MM}]}{[p']}$$

oder beim Übergang zum mittleren Punktfehler

$$M^2 = \frac{1}{\ddot{u} + 1} \frac{[p' M'^2]}{[p']}$$

Für den allgemeinen Fall –  $n$  Fehlergleichungen und  $u$  Unbekannte – läßt sich die aufgezeigte Gesetzmäßigkeit, wie folgt, formulieren:

*Aus jeder der  $\binom{n}{u}$  möglichen unausgeglichenen Bestimmungen der Unbekannten resultieren partielle mittlere Punktfehler der Neupunkte. Der ausgeglichene quadratische Wert des mittleren Punktfehlers eines beliebigen Neupunktes entsteht als gewogenes Mittel aller möglichen partiellen Werte desselben, dividiert durch  $\ddot{u} + 1$ .*

### 3.2 Das Entstehen der Fehlerellipse

Die Genauigkeit einer Punktbestimmung in beliebiger Richtung kommt bekanntlich durch die Fußpunktkurve der mittleren Fehlerellipse zum Ausdruck. Ihre Gleichung lautet:

$$Q_{rr} = \cos^2 \varphi Q_{xx} + \sin^2 \varphi Q_{yy} + \sin 2\varphi Q_{xy}$$

Der mittlere Fehler in der Richtung  $\varphi$  ergibt sich unmittelbar als Radiusvektor dieser Fußpunktkurve, das heißt:

$$r_\varphi = m_o \sqrt{Q_{rr}}$$

Bei Berücksichtigung der Gesetzmäßigkeit hinsichtlich des Entstehens der Gewichtskoeffizienten erhalten wir für  $Q_{rr}$ :

$$Q_{rr} = \frac{1}{\ddot{u} + 1} \left\{ \cos^2 \varphi \frac{[p' Q'_{xx}]}{[p']} + \sin^2 \varphi \frac{[p' Q'_{yy}]}{[p']} + \sin 2\varphi \frac{[p' Q'_{xy}]}{[p']} \right\}$$

$$= \frac{1}{\ddot{u} + 1} \frac{1}{[p']} \sum p' \underbrace{(\cos^2 \varphi Q'_{xx} + \sin^2 \varphi Q'_{yy} + \sin 2\varphi Q'_{xy})}_{Q'_{rr}}$$

das heißt:

$$Q_{rr} = \frac{1}{\ddot{u} + 1} \frac{[p' Q'_{rr}]}{[p']}$$

oder beim Übergang zum mittleren Fehler

$$M^2_{\varphi} = \frac{1}{\ddot{u} + 1} \frac{[p' M'^2_{\varphi}]}{[p']}$$

Zusammenfassend haben wir also gefunden:

*Aus jeder der  $\binom{n}{u}$  möglichen unausgeglichenen Bestimmungen der Koordinatenunbekannten resultiert für jeden der beteiligten Neupunkte eine partielle Fehlerellipse. Diese partiellen Fehlerellipsen setzen sich zu den ausgeglichenen Fehlerellipsen zusammen, wobei das Bildungsgesetz der letzteren folgendes ist: Der quadratische Wert des Radiusvektors der Fußpunktkurve der ausgeglichenen Fehlerellipse ist das gewogene Mittel der quadratischen Werte der Radiusvektoren der Fußpunktkurven der partiellen Fehlerellipsen, dividiert durch  $\ddot{u} + 1$ . (Man könnte sich vielleicht vorstellen, daß die Achsenlängen der Fehlerellipsen in analoger Weise entstehen, also als gewogene Mittel der entsprechenden Werte der unausgeglichenen Fehlerellipsen. Das aber trifft doch nicht zu!)*

### 3.3. Die Orientierung der Fehlerellipse

Bekanntlich ist die Orientierung der Fehlerellipse gegeben durch

$$\operatorname{tg} 2 \theta = \frac{2 Q_{xy}}{Q_{xx} - Q_{yy}},$$

wobei  $\theta$  die Richtung der großen Halbachse ist.

Wie oben gezeigt, resultiert aus jeder der  $\binom{n}{u}$  möglichen unausgeglichenen Bestimmungen der Koordinatenunbekannten für jeden der beteiligten Neupunkte eine Fehlerellipse mit einer gewissen Orientierung. Aus diesen partiellen Fehlerellipsen entsteht so die ausgeglichene Fehlerellipse.

*Behauptung:* Der ausgeglichene Wert von  $\operatorname{tg} 2 \theta$  ist gleich dem allgemeinen arithmetischen Mittel der korrespondierenden unausgeglichenen

Partialwerte desselben  $\left( \operatorname{tg} 2 \theta' = \frac{2 Q'_{xy}}{Q'_{xx} - Q'_{yy}} \right)$ , das heißt:

$$\operatorname{tg} 2 \theta = \frac{[p'' \operatorname{tg} 2 \theta']}{[p'']},$$

wenn  $p''$  auf

$$p'' = p' (Q'_{xx} - Q'_{yy}) \text{ fixiert wird.}$$

Um das zu zeigen, bilden wir

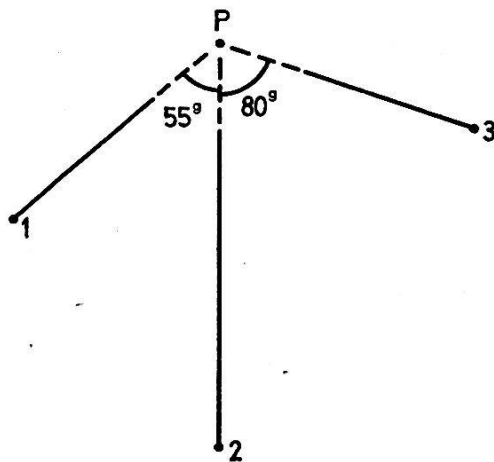
$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2 \theta &= \frac{[p'' \operatorname{tg} 2 \theta']}{[p'']} = \frac{2 [p' Q'_{xy}]}{[p' Q'_{xx}] - [p' Q'_{yy}]} = \frac{\frac{2 [p' Q'_{xy}]}{[p']}}{\frac{[p' Q'_{xx}]}{[p']} - \frac{[p' Q'_{yy}]}{[p']}} \\ &= \frac{2 Q_{xy}}{Q_{xx} - Q_{yy}}, \end{aligned}$$

womit die Behauptung bewiesen ist. Die nachgewiesene Gesetzmäßigkeit läßt sich wie folgt formulieren:

*Die Orientierung der ausgeglichenen Fehlerellipse eines beliebigen Neupunktes ergibt sich aus der Orientierung der korrespondierenden unausgeglichenen Fehlerellipsen in der Weise, daß der zu der ausgeglichenen Fehlerellipse gehörige Wert von  $\operatorname{tg} 2 \theta$  gleich dem gewogenen Mittel der entsprechenden Werte der unausgeglichenen Fehlerellipsen wird.*

#### 4. Zahlenbeispiel

Abschließend wollen wir die diskutierten Genauigkeitszusammenhänge bei der trigonometrischen Punktbestimmung an einem Beispiel näher erläutern. In Figur 3 wird ein Neupunkt  $P$  durch Vorwärtseinschneiden von den drei Festpunkten 1, 2 und 3 aus bestimmt.



Figur 3

In einem Achsensystem mit der  $x$ -Achse parallel zur Seite  $S_{2p}$  und bei Vernachlässigung der Konstanten  $\varrho$  und  $S$  ergeben sich die folgenden drei Fehlergleichungen zur Bestimmung von  $P$ :

$$v_1 = -0,760 x + 0,649 y + f_1$$

$$v_2 = \quad \quad \quad + 0,667 y + f_2$$

$$v_3 = +0,951 x + 0,309 y + f_3,$$

welche als gleichgewichtig vorausgesetzt werden. Durch Kombination von je zwei Gleichungen ergeben sich drei unausgeglichene Bestimmungen

von  $P$ . Schließlich wird  $P$  durch eine Gesamtausgleichung ermittelt. Die Ergebnisse dieser Berechnungen sind in der nachstehenden Tabelle zusammengestellt, wobei die letzte Zeile die Ergebnisse der strengen Ausgleichung enthält.



Kombi- nation	$Q_{xx}$	$Q_{yy}$	$Q_{xy}$	$A$	$B$	$\text{tg } 2\theta$	Max.- richt.	$Q_{MM}$	$D$	$p' =$ $D^2$	$p'' =$ $D^2(Q_{xx}$ $- Q_{yy})$
1, 2	3,363	2,245	+1,915	2,19	0,90	+3,424	41,0°	5,608	-0,507	0,257	+0,288
1, 3	0,712	2,040	+0,274	1,45	0,81	-0,412	87,6	2,752	-0,852	0,726	-0,965
2, 3	1,344	2,250	-0,732	1,63	0,97	+1,615	132,4	3,594	-0,634	0,402	-0,364
1, 2, 3	3,0694	1,069	+0,144	1,06	0,80	-0,765	79,2	1,763			

Eine Kontrolle der Formeln

$$Q_{MM} = \frac{1}{\ddot{u} + 1} \frac{[p' Q'_{MM}]}{[p']} \quad \text{und} \quad \text{tg } 2\theta = \frac{[p'' \text{tg } 2\theta']}{[p'']}:$$

$$Q_{MM} = \frac{1}{2} \cdot \frac{0,257 \cdot 5,608 + 0,726 \cdot 2,752 + 0,402 \cdot 3,594}{0,257 + 0,726 + 0,402} = 1,763$$

$$\text{tg } 2\theta = \frac{(+0,288)(+3,424) + (-0,965)(-0,412) + (-0,364)(+1,615)}{+0,288 - 0,965 - 0,364} \\ = -0,765$$

bestätigt deren Richtigkeit.

Figur 4 gibt eine geometrische Veranschaulichung von der Entstehung der ausgeglichenen Fehlerellipse aus den partiellen Fehlerellipsen. Hier sind nämlich die Fußpunktkurven der verschiedenen Fehlerellipsen, sowohl die partiellen als auch die ausgeglichene, graphisch dargestellt.

##### 5. Tangierung der partiellen Fußpunktkurven mit der ausgeglichenen

Aus Figur 4 gewinnt man den Eindruck, daß jede der unausgeglichenen Fußpunktkurven die ausgeglichene Fußpunktkurve tangiert, und zwar in zwei diametralen Punkten. Das wäre ja an und für sich eine ziemlich überraschende Feststellung, weil es nämlich bedeuten würde, daß für die betreffenden Richtungen *die Ausgleichung keine Genauigkeitssteigerung mit sich geführt hat*.

Nachstehend wird die Frage, ob es sich hier um eine allgemeingültige Erscheinung bei der trigonometrischen Punktbestimmung handelt, zum Gegenstand einer näheren Untersuchung gemacht.

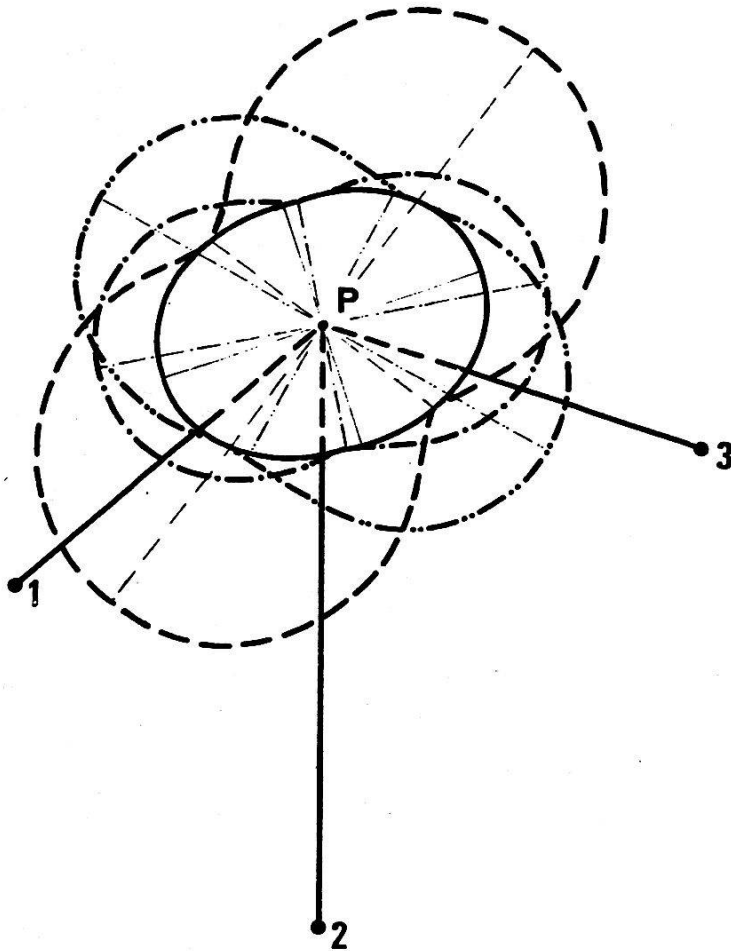
Die generelle Bedingung dafür, daß zwei Fußpunktkurven gemeinsame Punkte haben, ist gegeben durch:

$$Q_{xx} \cos^2 \varphi + Q_{yy} \sin^2 \varphi + Q_{xy} \sin 2\varphi = Q'_{xx} \cos^2 \varphi + Q'_{yy} \sin^2 \varphi + Q'_{xy} \sin 2\varphi$$

wobei  $Q_{xx}$ ,  $Q_{yy}$  und  $Q_{xy}$  beziehungsweise  $Q'_{xx}$ ,  $Q'_{yy}$  und  $Q'_{xy}$  die Gewichtskoeffizienten sind, welche als gegebene Größen in den Gleichungen der zwei Fußpunktkurven auftreten. Das heißt:

$$(Q_{xx} - Q'_{xx}) \cos^2 \varphi + (Q_{yy} - Q'_{yy}) \sin^2 \varphi + (Q_{xy} - Q'_{xy}) \sin 2\varphi = 0$$

$$\text{oder } (Q_{xx} - Q'_{xx}) + (Q_{yy} - Q'_{yy}) \text{tg}^2 \varphi + 2(Q_{xy} - Q'_{xy}) \text{tg} \varphi = 0$$



Figur 4

- Die Fußpunktkurve der Fehlerellipse der Kombination 1,2
- .-.-.- Die Fußpunktkurve der Fehlerellipse der Kombination 1,3
- ...-... Die Fußpunktkurve der Fehlerellipse der Kombination 2,3
- Die Fußpunktkurve der ausgeglichenen Fehlerellipse

Aus der letzten Gleichung resultiert

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{-(Q_{xy} - Q'_{xy}) \pm \sqrt{(Q_{xy} - Q'_{xy})^2 - (Q_{yy} - Q'_{yy})(Q_{xx} - Q'_{xx})}}{(Q_{yy} - Q'_{yy})}$$

Hieraus folgt, daß die allgemeine Bedingung für Tangierung in zwei diametralen Punkten – was der Fall sein wird, wenn die obige Gleichung nur einen einzigen Wert für  $\operatorname{tg} \varphi$  liefert – gegeben ist durch:

$$(Q_{xy} - Q'_{xy})^2 = (Q_{yy} - Q'_{yy})(Q_{xx} - Q'_{xx})$$

Für die Richtung des «Tangierungsdiameters» ergibt sich

$$\operatorname{tg} \varphi = - \frac{(Q_{xy} - Q'_{xy})}{(Q_{yy} - Q'_{yy})}$$

Es fragt sich nun, ob die allgemeine Bedingung der Tangierung bei der trigonometrischen Einzelpunktbestimmung erfüllt ist. Um diese Frage zu beantworten, wird mit Ausgangspunkt in folgendem Fehlergleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} v_1 = a_1 x + b_1 y + f_1 & \text{Gewicht} & p_1 \\ v_2 = a_2 x + b_2 y + f_2 & & p_2 \\ v_3 = a_3 x + b_3 y + f_3 & & p_3 \end{array}$$

der Ausdruck gebildet:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{-p_1 a_1 b_1 - p_2 a_2 b_2 - p_3 a_3 b_3}{D_{123}} + \frac{p_1 a_1 b_1 + p_2 a_2 b_2}{D_{12}} \right)^2 = \left( \frac{p_1 a_1^2 + p_2 a_2^2 + p_3 a_3^2}{D_{123}} \right. \\ & \left. - \frac{p_1 a_1^2 + p_2 a_2^2}{D_{12}} \right) \left( \frac{p_1 b_1^2 + p_2 b_2^2 + p_3 b_3^2}{D_{123}} - \frac{p_1 b_1^2 + p_2 b_2^2}{D_{12}} \right) \\ & \left( \text{bekanntlich ist ja } Q_{yy} = \frac{[paa]}{D}, Q_{xx} = \frac{[pbb]}{D} \text{ und } Q_{xy} = -\frac{[pab]}{D} \right) \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck stellt die Bedingung für die Tangierung der Fußpunktkurve 1, 2 mit der ausgeglichenen Fußpunktkurve dar. Durch Ausmultiplizieren stellt sich heraus, daß die Gleichung für die oben genannte Bedingung erfüllt ist, und dies ist auch für die unausgeglichenen Fußpunktkurven 1, 3 und 2, 3 der Fall. *Dagegen ist die Gleichung nicht erfüllt, wenn die Anzahl der Fehlergleichungen 3 überschreitet.*

Es hat sich folglich herausgestellt, daß eine Tangierung in zwei diametralen Punkten immer dann besteht, wenn nur eine überschüssige Messung vorhanden ist, ganz gleich, ob die Bestimmung durch innere oder äußere Richtungen, durch Trilateration oder auf andere Weise geschieht.

(In der Tat ist die hier aufgezeigte Gesetzmäßigkeit nur eine Auswirkung eines viel allgemeineren Gesetzes, welches darauf hinausläuft, daß jede Fußpunktkurve, entstanden aus  $n - 1$  Fehlergleichungen, in zwei diametralen Punkten die Fußpunktkurve tangiert, die aus sämtlichen  $n$  Fehlergleichungen resultiert.)

## 6. Nachtrag

Nach der Ausarbeitung des vorliegenden Aufsatzes ist es dem Verfasser gelungen, nachzuweisen, daß die Mittelbildungseigenschaft der Methode der kleinsten Quadrate viel weiter geht, als in [1] dargestellt.

Wir nehmen an, daß zur Bestimmung der  $u$  Unbekannten  $x_1, x_2, \dots, x_u$  folgendes Fehlergleichungssystem vorliegt:

	<i>Gewicht</i>
$v_1 = \alpha_{1\ 1} x_1 + \alpha_{1\ 2} x_2 + \dots + \alpha_{1\ u} x_u + f_1$	$p_1$
$v_2 = \alpha_{2\ 1} x_1 + \alpha_{2\ 2} x_2 + \dots + \alpha_{2\ u} x_u + f_2$	$p_2$
$v_n = \alpha_{n\ 1} x_1 + \alpha_{n\ 2} x_2 + \dots + \alpha_{n\ u} x_u + f_n$	$p_n$

Wir denken uns nun, daß die Unbekannten durch «partielle» Ausgleichungen nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt werden, und zwar stets auf Grund  $n'$  Fehlergleichungen ( $n' < n$ ). Das Ergebnis einer Gesamtausgleichung ist dann gegeben durch (das Zeichen ' weist auf ausgeglichene Partialwerte hin):

$$x_i = \frac{\sum p_i' x_i'}{\sum p_i'} \quad \text{und} \quad Q_{ij} = \frac{\ddot{u}' + 1}{\ddot{u} + 1} \frac{\sum p' Q_{ij}'}{\sum p'} \quad \left\| \begin{array}{l} i = j \\ \text{oder} \\ i \neq j \end{array} \right.$$

Hierbei sind die Gewichte  $p' = D'$  die Determinanten der Normalgleichungssysteme der «amputierten» Ausgleichungen und  $\ddot{u}'$  die entsprechende Anzahl der Überbestimmungen, während  $\ddot{u}$  sich auf die Gesamtausgleichung bezieht. In die Ausdrücke für  $x_i$  und  $Q_{ij}$  müssen alle nur möglichen Kombinationen, bestehend aus  $n'$  Gleichungen, welche sich aus dem Gesamtsystem bilden lassen, eingehen. Das heißt:

*Die Ergebnisse einer strengen Ausgleichung sind sowohl zahlen- als auch genauigkeitsmäßig identisch mit den gewogenen Mitteln aller möglichen Werte, die sich aus den «partiellen» Ausgleichungen ergeben, wobei die Gewichte als Determinanten der Normalgleichungen der letzteren zu fixieren sind.*

Es ist einleuchtend, daß die Gesetzmäßigkeit, die in dem sogenannten Satz von Jacobi enthalten ist, nur ein Spezialfall dieser allgemeineren Gesetzmäßigkeit darstellt, welcher eintritt, wenn  $\ddot{u}'$  gleich Null ist.

Die in dem vorliegenden Aufsatz gezogenen Folgerungen lassen sich ohne weiteres durch entsprechende «Ausweitungen» in die erweiterte Perspektive der Methode der kleinsten Quadrate einpassen.

#### *Literatur*

- [1] Czuber, E.: Theorie der Beobachtungsfehler, Leipzig 1891.
- [2] Gleinsvik, P.: Zum Mechanismus der Methode der kleinsten Quadrate. Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie, 1965.
- [3] Jung, I.: Strenge graphische Ausgleichung beim Rückwärtseinschneiden. Zeitschrift für Vermessungswesen, 1928.
- [4] Werksmeister, P.: Über die Genauigkeit trigonometrischer Punktbestimmungen. Zeitschrift für Vermessungswesen, 1920.
- [5] Wolf, H.: Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate, Hamburg.