

Zeitschrift: Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie

Herausgeber: Schweizerischer Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Société suisse de la mensuration et du génie rural

Band: 66 (1968)

Heft: 5

Artikel: Vers de nouvelles applications de la méthode des moindres carrés

Autor: Ansermet, A.

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-222295>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 20.02.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Photogrammetrie und Kulturtechnik

Revue technique Suisse des Mensurations, de Photogrammétrie et du Génie rural

Herausgeber: Schweiz. Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik; Schweiz. Gesellschaft für Photogrammetrie; Fachgruppe der Kulturingenieure des SIA

Editeurs: Société suisse des Mensurations et Améliorations foncières; Société suisse de Photogrammétrie; Groupe professionnel des Ingénieurs du Génie rural de la SIA

Nr. 5 • LXVI. Jahrgang

Erscheint monatlich

15. Mai 1968

DK 528.14:531.2

Vers de nouvelles applications de la méthode des moindres carrés

A. Ansermet, La Tour-de-Peilz

Résumé

Le but des lignes qui suivent est de montrer que les géodésiens peuvent collaborer utilement lors du calcul de certaines structures hyperstatiques («Stabfachwerke»); ils rendront familières les notions d'ellipses et ellipsoïdes de déformations. Le choix des poids est facile et la condition $[pvv]$ minimum n'est plus une hypothèse.

Zusammenfassung

In den folgenden Zeilen wird gezeigt, daß die Geodäten in zweckmäßiger Weise bei der Berechnung gewisser Stabfachwerke mitarbeiten können. Der Artikel macht mit den Begriffen der Deformationsellipsen und -ellipsoide vertraut. Die Wahl der Gewichte ist leicht, und die Bedingung $[pvv] = \text{Minimum}$ ist nicht nur eine Hypothese.

Généralités

Dans le numéro d'avril 1966 de cette Revue, quelques lignes furent consacrées à un problème de statique susceptible de présenter de l'intérêt pour les ingénieurs-géomètres. Ces derniers, en effet, sont familiarisés avec le calcul de réseaux télémétriques («Streckennetze»); un problème analogue se présente en hyperstatique des systèmes articulés («Stabfachwerke»). C'est donc un jeu pour les géomètres d'apporter leur collaboration car les staticiens ont moins de routine dans ce domaine. A la base du problème on a la condition:

$$[pvv] = \text{minimum}, \quad (1)$$

Les poids p des barres étant proportionnels aux coefficients E d'élasticité, aux sections transversales F des barres et aux inverses des longueurs l de celles-ci, donc proportionnels à EF/l , tandis qu'on a:

$$v = \frac{Sl}{EF} (S \text{ est l'effort axial [«Stabkraft»]), \quad (2)$$

forme générale bien connue pour exprimer les variations de longueurs des barres.

L'état initial à partir duquel on fait varier les coordonnées des nœuds est, en général, déterminé par le staticien; cette étape du calcul est, par hypothèse, réalisée. Il en sera question lors des applications; la forme générale de l'équation dite aux déformations est, pour un seul nœud libre:

$$v_i = a_i dx + b_i dy + c_i dz + f_i \quad (\text{poids } p_i) \quad i = 1, 2, 3 \dots \quad (3)$$

Le terme absolu f_i est donc fourni par le staticien; la tâche de celui-ci est terminée (variations de coordonnées: dx, dy, dz). $a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 = 1$.

De (3) on déduit les équations normales, calcul connu:

$$[pav] = 0; [pbv] = 0; [pcv] = 0 \quad (4)$$

Pour les staticiens on a formé les dérivées partielles de l'énergie (travail de déformation). En général l'équation (3) comprendra 6 variations de coordonnées, car les deux extrémités de la barre sont libres; l'étape des calculs incombant à l'ingénieur-géomètre est, à certains égards, prépondérante. Des applications le font mieux comprendre; elles seront au nombre de deux (coupole et pylône).

Coupole Schwedler (cet exemple est plutôt de caractère didactique):

| Nœuds | x | y | z | Nœuds | x | y | z |
|-------|----|----|----|-------|----|----|---|
| 1 | +1 | 0 | +1 | 5 | +2 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | -1 | +1 | 6 | 0 | -2 | 0 |
| 3 | -1 | 0 | +1 | 7 | -2 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | +1 | +1 | 8 | 0 | +2 | 0 |

Unité de mesure arbitraire. Les nœuds 1, 2, 3, 4 sont libres. Inconnues: $dx, dy, dz \dots dz_4$, soit 12 inconnues.

| | | Nœuds 1-8 | | | | | | | | |
|-------|-----|-----------|------|------|------|------|------|------|------|--|
| Nœuds | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | |
| 1 | | | 0,80 | 0,70 | | 1,27 | 1,00 | 1,00 | 1,00 | Tableau des poids des 22 barres |
| 2 | | | | 0,80 | 0,70 | 1,00 | 1,27 | 1,00 | 1,00 | |
| 3 | | | | | 0,80 | 1,00 | 1,00 | 1,27 | 1,00 | |
| 4 | 0,8 | | | | | 1,00 | 1,00 | 1,00 | 1,27 | |

| | | |
|-------------------|--|---|
| Barre 1-5 = 1,414 | | longueurs; calcul analogue pour les autres barres |
| Barre 1-6 = 2,450 | | |
| Barre 1-7 = 3,162 | | |
| Barre 1-8 = 2,450 | | |

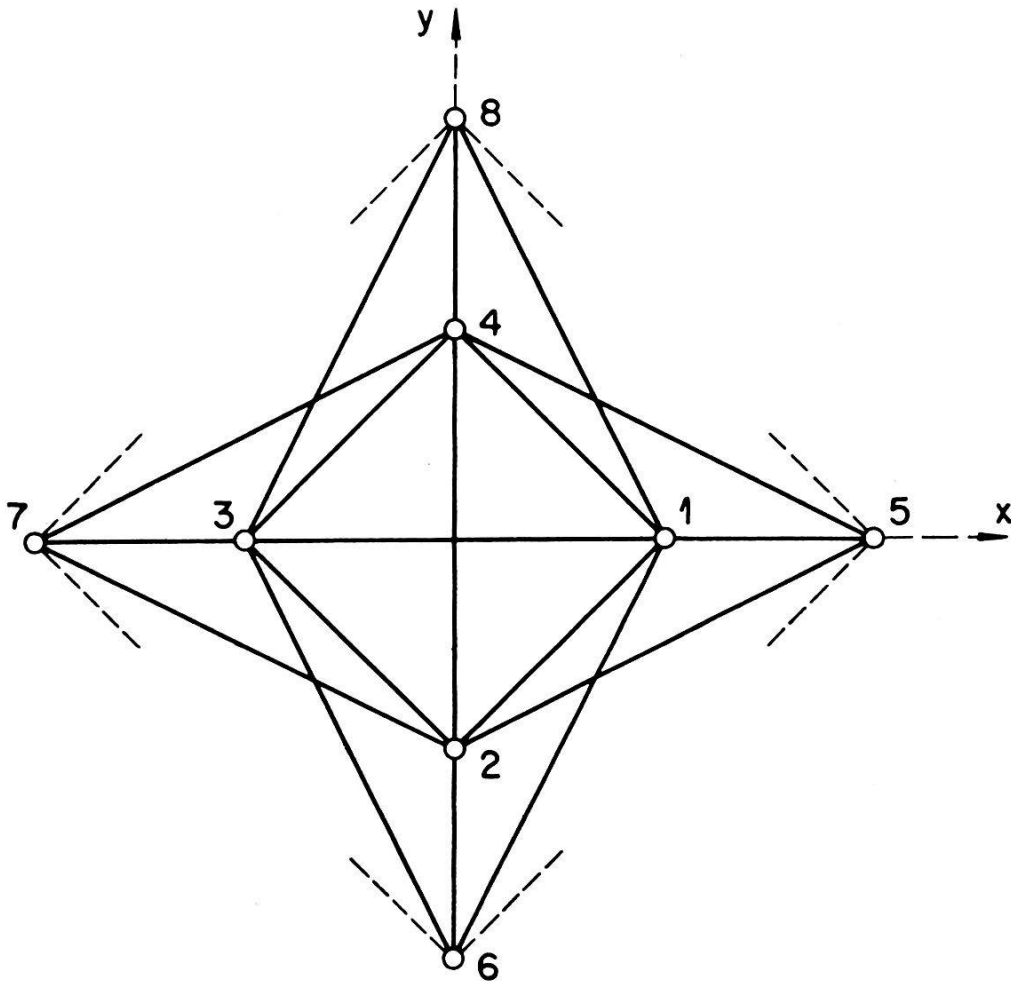
| | Barres | a | b | c | p_i | $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ |
|-----------------|--------|--------|--------|--------|-------|---------------------------------------|
| <i>Exemple:</i> | 1-5 | -0,707 | 0,00 | +0,707 | 1,27 | Le calcul peut être semi-graphique |
| | 1-6 | +0,408 | +0,815 | +0,408 | 1,00 | |
| | 1-7 | +0,949 | 0,00 | +0,316 | 1,00 | |
| | 1-8 | +0,408 | -0,815 | +0,408 | 1,00 | |

Les équations aux erreurs deviennent en statique des équations aux déformations, et les équations normales sont les dérivées partielles de l'énergie ou du travail.

Il y a donc 10 barres surabondantes à couper, le choix revenant au staticien. On en déduit le système dit parfois fondamental («Grundsystem») qui fournit les f_i . La formation des équations normales est une étape si connue des calculs, avec sa matrice symétrique aux coefficients des inconnues, qu'on se bornera à développer la matrice inverse aux coefficients de poids des inconnues. Ce calcul fut effectué en 45 secondes par le Centre de calcul électronique de l'EPUL.

| | | | | | | | | | | | |
|-------|-------|-------|--------|--------|-------|--------|--------|-------|--------|--------|-------|
| 0,339 | 0 | 0 | +0,079 | +0,025 | 0 | +0,083 | 0 | 0 | +0,079 | -0,025 | 0 |
| | 0,535 | 0 | +0,102 | +0,079 | 0 | 0 | -0,008 | 0 | -0,102 | +0,079 | 0 |
| | | 0,935 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | | | 0,535 | 0 | 0 | +0,079 | -0,102 | 0 | -0,008 | 0 | 0 |
| | | | | 0,339 | 0 | -0,025 | +0,079 | 0 | 0 | +0,08 | 0 |
| | | | | | 0,935 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | | | | | | 0,339 | 0 | 0 | +0,079 | +0,025 | 0 |
| | | | | | | | 0,535 | 0 | +0,102 | +0,079 | 0 |
| | | | | | | | | 0,935 | 0 | 0 | 0 |
| | | | | | | | | | 0,535 | 0 | 0 |
| | | | | | | | | | | 0,339 | 0 |
| | | | | | | | | | | | 0,935 |

4 groupes de 3 éléments diagonaux par nœud



On déduit des éléments diagonaux et voisins de la diagonale les ellipsoïdes de déformation; les longueurs des axes principaux sont proportionnelles à $\sqrt{0,339} = 0,582$; $\sqrt{0,535} = 0,731$; $\sqrt{0,935} = 0,967$ pour les nœuds 1 et 3 par exemple.

Poids des barres a posteriori P_i , on trouve sans peine:

| | p_i | $p_i:P_i$ | |
|--|-------|-----------|---------------------------------------|
| Arêtes supérieures (1-2, 2-3, 3-4, 4-1) | 0,8 | 0,472 | $\times 4 = 1,89$ |
| Diagonales face supérieure (1-3, 2-4) | 0,7 | 0,358 | $\times 2 = 0,716$ |
| Arêtes 1-5, 2-6, 3-7, 4-8 | 1,27 | 0,81 | $\times 4 = 3,24$ |
| Diagonales faces latérales (1-6, 2-5 ... 4-5, 8-1) | 1,0 | 0,572 | $\times 8 = 4,576$ |
| Barres 1-7, 2-8, 3-5, 4-6 | 1,0 | 0,398 | $\times 4 = 1,59$ |
| | | | $[p_i:P_i] = 12,01$ (12 inconnues) |

Une fois de plus, les poids faibles sont amplifiés dans une plus forte proportion.

D'autres éléments seraient encore à calculer, notamment la déformation quadratique moyenne relative à l'unité de poids par $m^2 \cong [p_{vv}] : 10$; mais, pour les géodésiens, il n'y a rien là de nouveau, sauf la terminologie.

2^e application: Pylône à 22 barres, 5 nœuds libres (15 inconnues). L'unité de mesure étant de nouveau arbitraire, on a:

| Nœuds | x | y | z | Nœuds fixes | x | y | z |
|-------|-----|-----|-----|-------------|-----|-----|-----|
| 1 | 0 | 0 | +8 | 6 | +6 | 0 | 0 |
| 2 | +3 | 0 | +4 | 7 | 0 | +6 | 0 |
| 3 | 0 | +3 | +4 | 8 | -6 | 0 | 0 |
| 4 | -3 | 0 | +4 | 9 | 0 | -6 | 0 |
| 5 | 0 | -3 | +4 | | | | |

Le nœud 1 est le sommet du pylône

Tableau des poids des barres

| Nœuds | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|-------|---|---|---|-----|-----|---|---|---|---|
| 1 | | 1 | 1 | 1 | 1 | | | | |
| 2 | | | 1 | 0,8 | | 1 | 1 | | 1 |
| 3 | | | | 1 | 0,8 | 1 | 1 | 1 | |
| 4 | | | | | 1 | | 1 | 1 | 1 |
| 5 | | 1 | | | | 1 | | 1 | 1 |

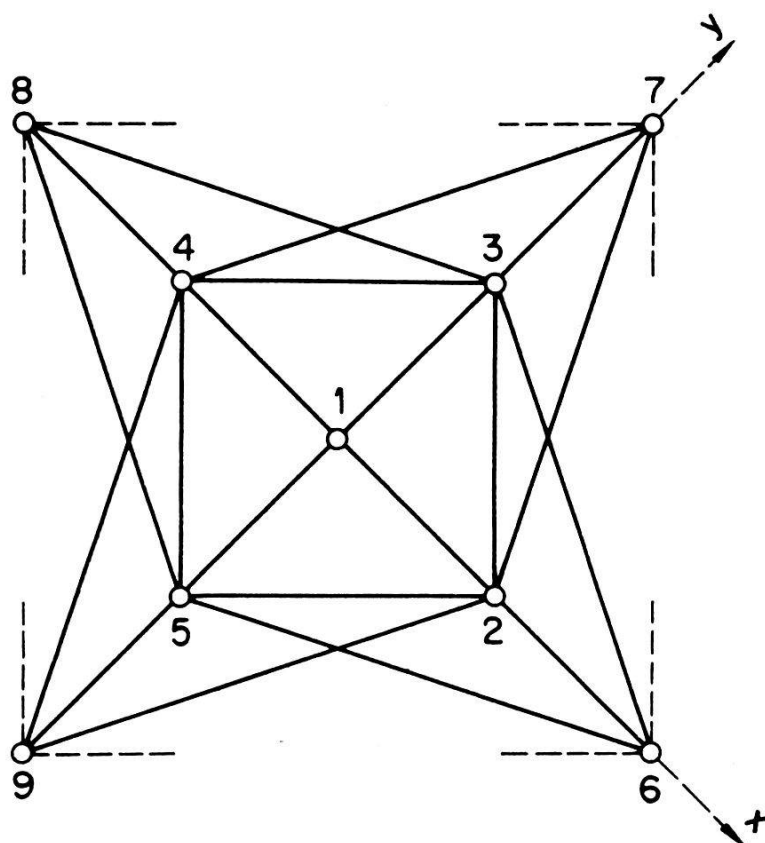
Poids 0,8 pour les diagonales 2-4, 3-5
15 inconnues: $dx_1, dy_1, dz_1 \dots dy_5, dz_5$

Il y a 7 barres à couper, et pour la diagonale 2-7, par exemple, on a:

$$+ 0,384 dx_2 - 0,768 dy_2 + 0,512 dz_2 = v_{2-7} - f_{2-7}$$

Matrice des coefficients des équations normales (partielle)

| Nœud 1 | | | Nœud 2 | | | | |
|--------|------|------|--------|------|-------|-------|-----|
| 0,72 | 0 | 0 | -0,36 | 0 | +0,48 | 0 | ... |
| | 0,72 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | ... |
| | | 2,56 | +0,48 | 0 | -0,64 | 0 | ... |
| | | | 2,81 | 0 | -0,57 | -0,50 | ... |
| | | | | 2,18 | 0 | +0,50 | ... |
| | | | | | 1,80 | 0 | ... |
| | | | | | | 2,18 | ... |
| | | | | | | | ... |



$$m^2 \cong [p v v]: 7$$

Avant d'inverser la matrice, on pressent que pour le nœud 1 l'ellipsoïde sera aplati. Le calcul est le même que pour la coupole. Des éléments fournis par calcul électronique on déduit que les longueurs des axes principaux des ellipsoïdes de déformation sont proportionnelles à:

$$1,57:1,57:0,80 \text{ (nœud 1); } 0,73:0,78:0,89 \text{ (nœuds 2, 3, 4, 5)}$$

Pour ce nœud 1 la forme n'est pas très favorable; on a parfois les mêmes difficultés avec les ellipsoïdes d'erreur. La structure et les poids jouent un rôle.

Une évolution se manifeste en hyperstatique; il y a une solution sans coupures de barres surabondantes (voir [1, 2]). Mais les équations aux déformations n'ont pas de termes absolus ce qui confère à la théorie un tout autre caractère.

Littérature

- [1] *Shu-T'ien, Li*: Matrix Analysis of Indeterminate Space Trusses (Mémoires Association internationale Ponts et Charpentes, Zurich 1962).
- [2] *Ansermet, A.*: Calcul de coupoles hyperstatiques au point de vue des déformations (Bulletin Technique Suisse romande, 1967, N° 24).
- [3] *Ansermet, A.*: Neue Methode zur Berechnung statisch unbestimmter Fachwerk-kuppeln (traduction par la chaire de statique ETH). Publication subsidiée par le Fonds national de recherche.