

Zeitschrift: Mensuration, photogrammétrie, génie rural
Herausgeber: Schweizerischer Verein für Vermessung und Kulturtechnik (SVVK) =
Société suisse des mensurations et améliorations foncières (SSMAF))
Band: 71-F (1973)
Heft: 1

Artikel: Sur le problème relatif au calcul de certains systèmes hyperstatiques et
réseaux télémétriques
Autor: Ansermet, A.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-226177>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 02.04.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Sur le problème relatif au calcul de certains systèmes hyperstatiques et réseaux télémétriques

A. Ansermet

Résumé

Dans la présente Revue ce problème fut déjà traité mais de façon assez sommaire; l'analogie entre certains réseaux et systèmes est connue (l'analogie entre les réseaux télémétriques et certains systèmes hyperstatiques fut bientôt remarquée); il y a une solution classique applicable dans les deux cas. Grâce à certains progrès réalisés le problème est plus complexe; les staticiens peuvent aussi s'affranchir de la formation de dérivées de l'énergie. Un choix n'est pas toujours facile.

Zusammenfassung

In dieser Zeitschrift wurde dieses Problem bereits behandelt, wenn auch nur summarisch; die Analogie zwischen Stabfachwerken und Streckennetzen wurde bald erkannt. Für beide Fälle existiert eine klassische Lösung. Dank gewisser Fortschritte ist das Problem komplexer geworden. So können sich die Statiker von der Bildung der Ableitung der Energie freimachen. Eine Wahl ist nicht immer leicht.

Généralités

Le calcul de structures articulées est à certains égards plus simple que celui de réseaux télémétriques; la fixation des poids donne lieu à moins de controverses car ces poids sont proportionnels aux coefficients d'élasticité, aux sections transversales des barres et aux inverses des longueurs de celles-ci.

En outre une certaine symétrie est parfois réalisée ce qui permet mieux d'éliminer partiellement ou totalement des éléments non diagonaux des matrices de rigidité. Le choix des axes joue un rôle.

Le choix des inconnues n'est plus guère sujet à des controverses; la supériorité de la méthode aux déformations (Verformungsgrößenverfahren) sur celle aux forces (Kraftgrößenverfahren) n'est plus discutée. Enfin pour le calcul des termes absolus des équations aux déformations on rend le système déterminé (Grundsystem). Cette étape des calculs est trop connue pour donner lieu à des commentaires. On procédera souvent par voie semi-graphique. Le calcul électronique a contribué à l'évolution qui s'est manifesté pour ces calculs (voir [4]); mais tous les éléments du problème ne s'y prêtent pas également bien (ellipsoïdes de déformation, poids des barres a posteriori, déformation quadratique moyenne relative à l'unité de poids, etc).

C'est la chaire de statique de Lausanne qui présenta à l'Académie des sciences (voir [1]) la solution sans formation des dérivées de l'énergie avec représentation plane. Divers périodiques, notamment le «Zeitschrift für Mathematik und Physik» et le «Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik» méconnaissent cette priorité.

Avant de poursuivre développons les notations essentielles sous forme générale donc sans indices:

l, s	Longueurs des barres et sections transversales de celles-ci
E	Coefficients d'élasticité des barres
A	Travail de déformation du système (Energieaufwand)
v	Variations de longueurs des barres ($v = mT$)
a, b, c	Coefficients directeurs des côtés du réseau et des barres du système
Dx, Dy, Dz	Variations de coordonnées des nœuds (solution sans coupures)
dx, dy, dz	Variations de coordonnées des nœuds (solution avec coupures)
p, P	Poids des barres respectivement a priori et posteriori
T, m	Efforts axiaux (Stabkräfte) et modules des barres ($mT = v$)
Mr, Mi	Matrices de rigidité et leurs inverses

Théoriquement les coefficients $a, b, c \dots$ n'ont pas rigoureusement la même valeur selon que l'on fait des coupures ou pas de coupures mais bien pratiquement.

Un cas concret, très simple, rendra tout le problème plus clair.

Considérons un double-pylône (9 barres, 3 surabondantes), 6 inconnues (variations de coordonnées des nœuds). Faisons application de la solution classique tant en ce qui concerne les réseaux télémétriques et les systèmes articulés, surdéterminés. On pourrait réaliser la forme sphérique pour les ellipsoïdes de déformation des nœuds en modifiant un peu les poids des barres et éventuellement la structure.

L'ellipsoïde dit moyen est obtenu en fonction de la déformation quadratique moyenne relative à l'unité de poids. Les poids a posteriori des barres présentent de l'intérêt et donnent lieu à un contrôle bienvenu la somme des p/P .

Double pylône à 3 barres surabondantes

(9 équations et 6 inconnues car il y a 2 nœuds libres)

Le tableau des coefficients des équations aux déformations est:

Barres	a	b	c	a'	b'	c'	p
1-2	+0,557	+0,575	+0,60				1
1-3	+0,557	-0,575	+0,60				1
1-4	-0,557	-0,575	+0,60				1
1-5	-0,557	+0,575	+0,60				1
1-6	+1,00	0	0	-1,00	0	0	0,6
6-7				+0,557	+0,575	+0,60	1
6-8				+0,557	-0,575	+0,60	1
6-9				-0,557	-0,575	+0,60	1
6-10				-0,557	+0,575	+0,60	1

Ces chiffres permettent de se rendre compte de la structure. Les poids p interviennent toujours par leurs valeurs relatives. Les coefficients de poids des inconnues sont Q_{11} , $Q_{22} \dots Q_{66}$ pour les quadratiques et Q_{12} , $Q_{13} \dots Q_{56}$ pour les non quadratiques. (Calcul par centre électronique EPFL.) La formation des matrices est immédiate

$$Mr \equiv \begin{bmatrix} 1,84 & 0 & 0 & -0,60 & 0 & 0 \\ & 1,32 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1,44 & 0 & 0 & 0 \\ \text{symétrique} & & & 1,84 & 0 & 0 \\ & & & & 1,32 & 0 \\ & & & & & 1,44 \end{bmatrix}$$

$$Mi \equiv \begin{bmatrix} 0,610 & 0 & 0 & +0,20 & 0 & 0 \\ & 0,758 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0,694 & 0 & 0 & 0 \\ \text{symétrique} & & & 0,610 & 0 & 0 \\ & & & & 0,758 & 0 \\ & & & & & 0,694 \end{bmatrix}$$

La première des 36 équations aux coefficients de poids, par exemple est:
 $1,84 \times Q_{11} - 0,60 Q_{14} = 1,84 \times 0,610 - 0,60 \times 0,20 = 1$
 et la quatrième:
 $-0,60 Q_{11} + 1,84 Q_{14} = -0,60 \times 0,61 + 1,84 \times 0,20 = 0$
 (calcul faits à la règle)

Poids a posteriori P : De suite on voit que pour 8 barres on obtient la même valeur de P :

$$\frac{1}{P} = \frac{1}{0,557^2} \times 0,610 + \frac{1}{0,575^2} \times 0,758 + \frac{1}{0,60^2} \times 0,694 = 0,69$$

et pour la barre 1-6:

$$\frac{1}{P} = 0,610 + 0,610 - 2 \times 0,20 = 0,82$$

(somme $p/P = 6$)

Les longueurs des axes principaux des ellipsoïdes de déformation sont proportionnelles à:

$$\sqrt{0,610} : \sqrt{0,758} : \sqrt{0,694} = 0,78 : 0,87 : 0,83$$

pour les deux nœuds 1 et 6, valeurs favorables.

Le problème peut revêtir une forme plus générale si, par exemple, certains nœuds sont astreints à se déplacer sur des surfaces. A la condition du minium s'ajoutent des équations

liant les inconnues. Une solution usuelle (voir [3]) consiste à fractionner le calcul (zweistufige); admettons des poids $p = 1$ pour simplifier

$[v v] = \text{minimum} = [v' v'] + [v'' v'']$ le terme non quadratique $[v' v'']$ étant nul. Cette solution permet de mieux réaliser le rôle joué par les équations ce qui ne serait pas le cas si on avait procédé par voie d'élimination préalable d'inconnues.

Solution sans coupure de barres ni formation de dérivées de l'énergie

A certains égards elle est remarquable mais était peu utilisée par les praticiens car elle donnait lieu, en général, à un nombre élevé d'inconnues et d'équations. Grâce aux calculatrices électroniques elle est devenue moderne. Aux 6 variations de coordonnées (Dx , Dy ...) des nœuds viennent s'ajouter les 9 efforts axiaux T dans les barres. En tout 15 inconnues déterminées grâce aux 9 équations aux déformations des barres et aux 6 équations d'équilibre (3 par nœud libre) qui sont linéaires.

Dans le calcul classique on avait $v = a dx + b dy + c dz + f$ le terme absolu f étant obtenu après coupure de barres surabondantes. En admettant les a , b , $c \dots$ pratiquement les mêmes l'équation devient:

$$mT = a Dx + b Dy + c Dz$$

Dans son mémoire présenté à l'Académie des sciences B. Mayor a encore ajouté les équations relatives aux nœuds fixes et celles exprimant que certains nœuds sont astreints à se déplacer sur des surfaces.

En outre cette solution se prête bien à une représentation plane de la structure spatiale: au point de vue des mathématiques pures cela revient à changer les variables. Pour chaque nœud au lieu de 3 variations de coordonnées on n'en a plus que deux et une rotation comme 3^e inconnue. Une telle représentation plane fut appliquée notamment au calcul de la coupole du Reichstag (thèse Yung). Pour une valeur déterminée de la rotation on a, dans le plan, une ellipse de déformation. L'épure de statique graphique fournit les déformations; si le calcul graphique est spatial c'est moins simple.

En conclusion on peut dire que l'analogie existant entre les réseaux télémétriques et certains systèmes hyperstatiques a permis de réaliser de grands progrès.

Littérature

[1] Mayor B., Statique des systèmes spatiaux (Cours EPUL, épuisé).
 [2] Stüssi F., Baustatik I, II (Birkhäuser).
 [3] Wolf H., Ausgleichsrechnung ... (Dümmler-Verlag).
 [4] Dupuis G., L'électronique au service de l'ingénieur (Publication EPUL, No 104).

[5] Friedrich K., Richtigkeit der Methode der kleinsten Quadrate aus den Grundsätzen der Mechanik abgeleitet (Zeitschr. f. Vermessungsw. 1943).
 [6] Ansermet A., Berechnung überstimmter Fachwerkkuppeln (Trad. chaire statique ETH) (Publication subsidiée par le Fonds national).
 [7] Linkwitz, Diverses publications de l'Institut Geodäsie-Bauwesen Stuttgart.