

**Zeitschrift:** Mensuration, photogrammétrie, génie rural  
**Herausgeber:** Schweizerischer Verein für Vermessung und Kulturtechnik (SVVK) =  
Société suisse des mensurations et améliorations foncières (SSMAF))  
**Band:** 73-F (1975)  
**Heft:** 3-4: Prof. Dr. F. Kobold zum 70. Geburtstag

**Artikel:** Direkte Bestimmung totaler Kreisteilungsfehler mit Hilfe eines  
Spiegelpolygons  
**Autor:** Ramsayer, Karl  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-227538>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 17.03.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Direkte Bestimmung totaler Kreisteilungsfehler mit Hilfe eines Spiegelpolygons

Karl Ramsayer, Stuttgart

## 1. Einleitung

Für die direkte Ermittlung von totalen Teilungsfehlern eines Teilkreises wurde von Schreiber bereits 1886 ein Verfahren veröffentlicht [1]. Dieses Verfahren hat jedoch die schwerwiegenden Nachteile, dass der Teilkreis für sich allein in einem besonderen Gerät untersucht werden muss und dass sehr viele Mikroskopablesungen erforderlich sind. Das Schreibersche Verfahren hat sich deshalb für die praktische Anwendung nicht durchsetzen können. Wirtschaftlicher ist das Prüfverfahren von Heuvelink [2], [3], das die Untersuchung des im Theodolit eingebauten Teilkreises erlaubt. Es liefert jedoch nicht die tatsächlichen Teilungsfehler, sondern auf indirektem Wege nur die regelmässigen und den mittleren zufälligen Teilungsfehler. Ausserdem werden die Koeffizienten der Fourierreihe mit unterschiedlicher Genauigkeit bestimmt, sofern nicht mehrere Prüfwinkel verschiedener Grösse verwendet werden.

Nachstehend wird ein Verfahren beschrieben, wie mit Hilfe eines Spiegelpolygons direkt totale und regelmässige Kreisteilungsfehler eines im Theodolit eingebauten Teilkreises mit gleicher Genauigkeit bestimmt werden können. Da bei Präzisionstheodoliten stets an zwei diametralen Stellen abgelesen wird, werden nur Durchmesserfehler untersucht. Die Vorzeichen werden im Sinne von Verbesserungen definiert. Die «Fehler» werden deshalb im folgenden auch als Verbesserungen bezeichnet.

## 2. Prinzip

Zur Ermittlung der Durchmesserfehler des Horizontalkreises eines Präzisionstheodolits an  $N$  gleichmässig über den Kreis verteilten Stellen werden die Richtungen nach einer geraden Anzahl von gleichmässig über den Horizont verteilten Zielen in  $N$  Sätzen, die sich jeweils aus  $n$  Teilsätzen mit unveränderter Kreislage zusammensetzen, gemessen. Nach jedem Satz wird der Kreis um  $360^\circ/N$  gedreht. Das Mittel aus allen Sätzen ist dann bei genügend grossem  $N$  weitgehend frei vom Einfluss der regelmässigen Teilungsfehler. Auch der Einfluss der zufälligen Fehler (Zielfehler, Ablesefehler, zufällige Teilungsfehler) ist bei einem guten Instrument und gut einstellbaren Zielen gering, da er proportional zu  $1/\sqrt{N}$  zurückgeht. Die aus  $N$  Sätzen abgeleiteten Richtungen zu den Zielen können deshalb weitgehend als «wahre Richtungen» betrachtet werden.

Reduzieren wir die Richtungen eines Satzes auf den Mittelwert der wahren Richtungen, so entsprechen die Abweichungen der reduzierten Richtungen von den wahren Richtungen den Durchmesserfehler, die allerdings noch von den Messfehlern überlagert sind. Der Einfluss der Messfehler kann jedoch durch entsprechende Ausbildung der Ziele für die Bezugsrichtungen und eine

ausreichende Anzahl von Wiederholungen in erträglichen Grenzen gehalten werden.



Bild 1 Spiegelpolygon

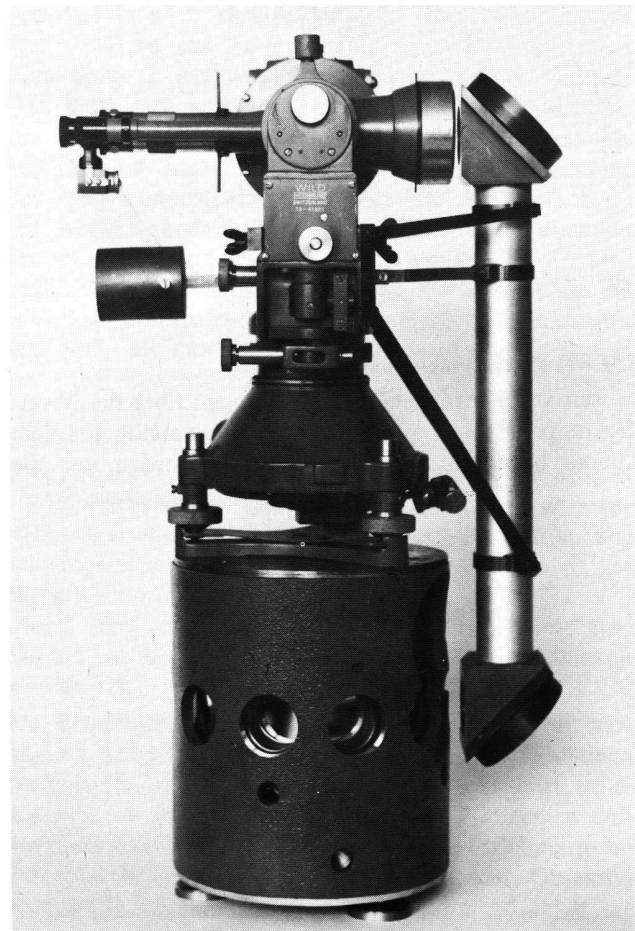


Bild 2 Vorrichtung zur Bestimmung totaler Kreisteilungsfehler des Theodolits Wild T3 mit Hilfe eines Spiegelpolygons

### 3. Versuchsaufbau

Für die Darstellung der Bezugsrichtungen ist ein Spiegelpolygon, wie es für die Prüfung optischer Teilköpfe von Werkzeugmaschinen verwendet wird [4], gut geeignet. Bild 1 zeigt das für die Untersuchungen verwendete, von der Firma Leitz hergestellte Spiegelpolygon. Es besteht aus einem Glasblock mit zehn angeschliffenen Spiegeln, deren Normalen zehn Richtungen mit einem gegenseitigen Winkelabstand von ungefähr  $36^\circ$  festlegen. Das Polygon ist zum Schutz gegen Beschädigungen in ein Gehäuse mit kreisrunden Öffnungen eingebaut. Das unter dem Gehäuse angebrachte Rohr mit Klemm- und Justierschrauben dient zum Befestigen und Ausrichten des Polygons.

Bild 2 zeigt den vom Geodätischen Institut der Universität Stuttgart hergestellten Versuchsaufbau für die Untersuchung des Horizontalkreises eines Theodolits Wild T3. Das Spiegelpolygon ist in einem gusseisernen Topf untergebracht. Darüber ist der Theodolit festgeschraubt, dessen normales Okular durch ein Autokollimationsokular ersetzt wurde. Die Zielachse des Fernrohrs wird durch eine am Fernrohrträger befestigte Umlenkvorrichtung, die aus einem Rohr und zwei Spiegeln zusammengesetzt ist, um  $180^\circ$  umgelenkt und nach unten parallel versetzt. Zum Anzielen der Spiegel wird das Fadenkreuz mit seinem reflektierten Bild zur Deckung gebracht. Da das Fernrohr zu diesem Zweck auf Unendlich fokussiert werden muss, haben Zentrierfehler des Polygons keinen Einfluss. Ebensovienig können sich eine kleine Neigung und die Taumelfehler der Stehachse und kleine Neigungen der Spiegelebenen auswirken, da die Höhenwinkel der Zielungen nahezu null sind.

Eine andere Möglichkeit besteht darin, das Spiegelpolygon auf dem Fernrohrträger des Theodolits zu be-

festigen, es mit Hilfe des zu prüfenden Kreises um definierte Winkel zu drehen und die Richtungen der Spiegegnormalen mit Hilfe eines Autokollimationsfernrohrs mit Okularmikrometer gegen eine feste Bezugsrichtung einzumessen. Auch diese Anordnung wurde im Geodätischen Institut der Universität Stuttgart zur Untersuchung des Horizontalkreises eines Theodolits Wild T4 mit gutem Erfolg erprobt.

### 4. Anordnung und Ergebnisse der Versuchsmessungen

Zur Ermittlung der Durchmessererbesserungen an den 40 Kreisstellen  $0^\circ, 9^\circ, 18^\circ \dots 351^\circ$  wurden 40 Richtungssätze nach den zehn Spiegeln beobachtet. Jeder Satz bestand aus vier Teilsätzen, die bei unveränderter Kreislage jeweils in derselben Fernrohrlage beobachtet wurden. Nach jedem Richtungssatz wurde der Kreis um  $9^\circ$  gedreht. Bei dieser Anordnung der Messungen wurde jede ausgewählte Kreisstelle an jedem Spiegel, also insgesamt zehnmal in je vier Teilsätzen beobachtet. Ausserdem wurde jede Durchmessererbesserung von «beiden Seiten» (zum Beispiel für die Kreisstellen  $9^\circ$  und  $189^\circ$ ) bestimmt. Diese grosse Zahl von überschüssigen Beobachtungen wurde absichtlich gewählt, um die Richtungen der Spiegegnormalen sehr genau zu bestimmen und einen zuverlässigen Einblick in die Genauigkeit des Verfahrens zu erhalten. Bei der praktischen Anwendung lässt sich die Anzahl der Beobachtungen beträchtlich reduzieren, insbesondere dann, wenn die Spiegelrichtungen bereits bekannt sind.

Die aus den Messungen abgeleiteten Abweichungen  $\Delta_k$  der Spiegegnormalen vom Nennwert  $k \cdot 36^\circ$  und ihre aus den Streuungen der je 40 Einzelwerte abgeleiteten mittleren Fehler  $m_k$  sind in Tabelle 1 zusammengestellt.

Tabelle 1 Abweichungen der Spiegegnormalen von Nennwert  $k \cdot 36^\circ$ .

| Spiegel k  | 0            | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     |
|------------|--------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $\Delta_k$ | +0.15"       | +0.03 | -0.23 | +0.11 | +0.13 | -0.06 | +0.44 | -0.82 | -0.17 | +0.42 |
| $m_k$      | $\pm 0.06''$ | 0.07  | 0.06  | 0.06  | 0.06  | 0.07  | 0.07  | 0.06  | 0.06  | 0.06  |

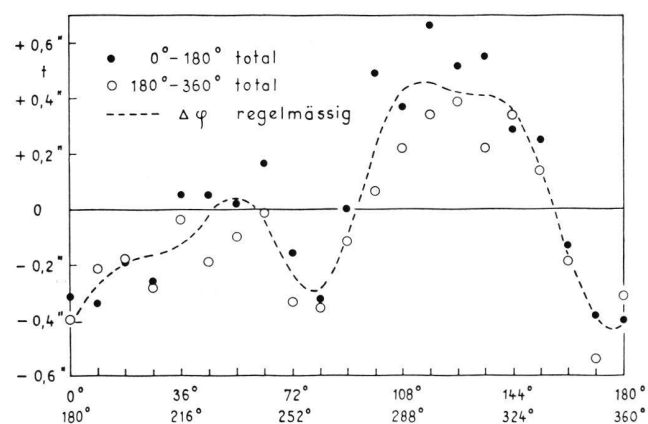


Bild 3 Totale und regelmässige Durchmessererbesserungen des Horizontalkreises des Wild-Theodolits T3 Nr. 41 321

Die Durchmessererbesserungen sind in Bild 3 dargestellt. Auffallend sind die systematischen Differenzen an den Kreisstellen  $\varphi$  und  $\varphi + 180^\circ$ , die, wenn wir von den Messfehlern absehen, null sein sollten. Die systematische Abweichung rührt vermutlich davon her, dass bei Ableseung an der Kreisstelle  $\varphi$  der Teilstrich  $\varphi$  unten und der Teilstrich  $\varphi + 180^\circ$  oben abgebildet wird, während bei Ableseung an der Stelle  $\varphi + 180^\circ$  der Teilstrich  $\varphi + 180^\circ$  unten und der Teilstrich  $\varphi$  oben liegt. Dies kann dazu führen, dass wegen kleiner Unregelmässigkeiten der Strichenden in den beiden Kreislagen etwas verschieden koinzidiert wird. Die dargestellten totalen Durchmessererbesserungen  $t$  sind Mittelwerte aus den an den zehn Spiegeln beobachteten Einzelwerten. Aus den Streuungen dieser Einzelwerte wurde der mittlere Fehler des Mittels berechnet zu

$$m_t = \pm 0,09'' \quad (1)$$

## 5. Fehleranalyse

Wir führen folgende Bezeichnungen ein:

|                                    |  |
|------------------------------------|--|
| S                                  | = Anzahl der Spiegel (geradzahlig),  |
| N                                  | = Anzahl der zu untersuchenden,<br>gleichmässig verteilten Kreisstellen<br>= Anzahl der zu messenden Rich-<br>tungssätze (geradzahlig),                            |
| i                                  | = 0, 1, 2 . . . (N-1) = Nummer der<br>Kreislage = Nummer des Satzes,   |
| k                                  | = 0, 1, 2 . . . (S-1) = Nummer des<br>Spiegels,  |
| $\varphi'_{ik}$                    | = $i \cdot (360^\circ/N) + k \cdot (360^\circ/S)$ = voller<br>Gradwert der verwendeten Kreis-<br>stelle bei Anzielung von Spiegel k<br>im Satz i = Bezugsrichtung, |
| l                                  | = 1, 2 . . . n = Nummer des Teilsatzes<br>von Satz i,  |
| $\varphi''_{ikl}$                  | = $i \cdot (360^\circ/N) + k \cdot (360^\circ/S) + x''_{ik}$<br>= im Teilsatz l abgelesene Rich-<br>tung,  |
| $x''_{ikl}$                        | = Sekundenwert von $\varphi''_{ikl}$ ,   |
| $\bar{\varphi}_i^*$                | = mittlere Bezugsrichtung von Satz i,  |
| $\varphi'_{ik}$                    | = Mittel aus allen auf $\bar{\varphi}_i^*$ reduzierten<br>Teilsätzen $\varphi'_{ikl}$ ,  |
| $t_{ik}$                           | = $\Delta\varphi_{ik} + \mu_{ik}$ = totale Kreisteilungs-<br>verbesserung an der Stelle $\varphi_{ik}$ ,   |
| $\Delta\varphi_{ik}$               | = regelmässige Kreisteilungsverbesserung,  |
| $\mu_{ik}$                         | = zufällige Kreisteilungsverbesserung,   |
| $k \cdot (360^\circ/S) + \Delta_k$ | = Richtung der Normalen des<br>Spiegels k (Mittelwert),  |
| $d_k$                              | = Verbesserung von $\Delta_k$ .  |

Zunächst wird jeder Teilsatz l des bei unveränderter Kreislage gemessenen Satzes i auf die mittlere Bezugsrichtung  $\bar{\varphi}_i^*$

$$\bar{\varphi}_i^* = \frac{1}{S} \sum_{k=0}^{S-1} (i \cdot (360^\circ/N) + k \cdot (360^\circ/S)), (i = \text{const}) \quad (2)$$

reduziert mit Hilfe der Gleichung

$$\varphi'_{ikl} = i \cdot (360^\circ/N) + k \cdot (360^\circ/S) + x''_{ikl} - \frac{1}{S} \sum_{k=0}^{S-1} x''_{ikl}. \quad (3)$$

Durch Mittelbildung der n reduzierten Teilsätze il erhalten wir

$$\varphi'_{ik} = i \cdot (360^\circ/N) + k \cdot (360^\circ/S) + x'_{ik} - \frac{1}{S} \sum_{k=0}^{S-1} x'_{ik} \quad (4)$$

$$\text{mit } x'_{ik} = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n x''_{ikl}. \quad (4a)$$

Aus den Abweichungen der reduzierten Richtungen  $\varphi'_{ikl}$  von ihren Mittelwerten  $\varphi'_{ik}$  ergab sich der mittlere Fehler einer in  $n = 4$  Teilsätzen gemessenen Richtung zu

$$m_\delta = \pm 0,16''. \quad (5)$$

Dieser, wie später noch ausgeführt wird, vermutlich zu kleine Wert rührt im wesentlichen nur von Ziel- und Ablesefehlern her. Teilungsfehler sind darin nicht enthalten, da die Kreislage nicht geändert wurde.

Die Abweichung  $\Delta_k$  der Richtung des Spiegels k von k ( $360^\circ/S$ ) ergibt sich aus

$$\begin{aligned} \Delta_k &= \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} (\varphi'_{ik} - i \cdot (360^\circ/N)) - k \cdot (360^\circ/S) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} (x'_{ik} - \frac{1}{S} \sum_{k=0}^{S-1} x'_{ik}). \end{aligned} \quad (6)$$

Berücksichtigen wir die Verbesserungen  $\Delta\varphi_{ik}$ ,  $\mu_{ik}$  und  $\delta_{ik}$  wegen der regelmässigen und zufälligen Teilungsfehler und wegen der Ziel- und Ablesefehler, so ergibt sich die Verbesserung  $d_k$  von  $\Delta_k$  aus

$$d_k = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} (\Delta\varphi_{ik} + \mu_{ik} + \delta_{ik}) - \frac{1}{S} \sum_{k=0}^{S-1} (\Delta\varphi_{ik} + \mu_{ik} + \delta_{ik}). \quad (7)$$

$\Delta\varphi_{ik}$  kann für die Kreisstelle  $\varphi_{ik}$  beschrieben werden durch die Fourierreihe

$$\Delta\varphi_{ik} = \sum_m \alpha_m \cdot \sin(2m \cdot i \cdot (360^\circ/N) + 2m \cdot k \cdot (360^\circ/S) + A_m), m = 1, 2, 3 \dots \quad (8)$$

Nach Anwendung des Additionstheorems und Summation über alle i-Werte ergibt sich

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{N-1} \Delta\varphi_{ik} &= \sum_{i=0}^{N-1} \sum_m \alpha_m \cdot \cos(2m \cdot i \cdot (360^\circ/N)) \\ &\quad \cdot \sin(2m \cdot k \cdot (360^\circ/S) + A_m) \\ &\quad + \sum_{i=0}^{N-1} \sum_m \alpha_m \cdot \sin(2m \cdot i \cdot (360^\circ/N)) \\ &\quad \cdot \cos(2m \cdot k \cdot (360^\circ/S) + A_m). \end{aligned} \quad (9)$$

Hieraus folgt wegen der symmetrischen Verteilung der Kreisstellen

$$\sum_{i=0}^{N-1} \Delta\varphi_{ik} = N \cdot \sum_P \alpha_{P \cdot N/2} \cdot \sin(P \cdot N \cdot k \cdot (360^\circ/S) + A_{P \cdot N/2}), P = 1, 2, 3 \dots \quad (10)$$

Auf ähnliche Weise erhalten wir

$$\sum_{k=0}^{S-1} \Delta\varphi_{ik} = S \cdot \sum_Q \alpha_{Q \cdot S/2} \cdot \sin(Q \cdot S \cdot i \cdot (360^\circ/N) + A_{Q \cdot S/2}), Q = 1, 2, 3 \dots \quad (11)$$

Setzen wir (10) und (11) in (7) ein, so ergibt sich nach einigen Umformungen

$$\begin{aligned} d_k &= \sum_P \alpha_{P \cdot N/2} \cdot \sin(P \cdot N \cdot k \cdot (360^\circ/S) + A_{P \cdot N/2}) \\ &\quad - \sum_R \alpha_{R \cdot N/2} \cdot \sin A_{R \cdot N/2} \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} (\mu_{ik} + \delta_{ik}) - \frac{1}{S} \sum_{k=0}^{S-1} (\mu_{ik} + \delta_{ik}), \quad (12)$$

$P = 1, 2, 3 \dots; R = 1, 2, 3 \dots$

Hieraus folgt, dass für

$$N = T \cdot S, \quad T = 1, 2, 3 \dots \quad (13)$$

der Einfluss der regelmässigen Teilungsfehler Null wird. Es gilt also für diesen Fall und somit auch für den vorliegenden Fall mit  $S = 10, N = 40$

$$d_k = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} (\mu_{ik} + \delta_{ik}) - \frac{1}{S} \sum_{k=0}^{S-1} (\mu_{ik} + \delta_{ik}). \quad (14)$$

Hieraus folgt nach Übergang auf mittlere Fehler

$$m_k = \pm \sqrt{(S-1)(m_\mu^2 + m_\delta^2)/S \cdot N}. \quad (14a)$$

Nehmen wir die nachfolgend ermittelten Werte  $m_\delta = \pm 0,30''$  und  $m_\mu = \pm 0,10''$  vorweg, so wird für  $S = 10$  und  $N = 40$

$$m_k = \pm (3/20) \sqrt{m_\mu^2 + m_\delta^2} = \pm 0,05''. \quad (14b)$$

Nach Tabelle 1 ist  $m_k = \pm 0,06''$ .

Der Vergleich der Richtung  $\varphi'_{ik}$  des Satzes  $i$  zum Spiegel  $k$  mit der Richtung  $\varphi^\circ_{ik} + \Delta_k$  liefert die Teilungsverbesserung

$$t'_{ik} = \varphi_{ik}^\circ + \Delta_k - \varphi'_{ik} = \Delta_k - x'_{ik} + \frac{1}{S} \sum_{k=0}^{S-1} x'_{ik}. \quad (15)$$

Dieser Wert ist zu verbessern um

$$dt_{ik} = -\delta_{ik} + \frac{1}{S} \sum_{k=0}^{S-1} (\Delta\varphi_{ik} + \mu_{ik} + \delta_{ik}) + d_k \quad (16)$$

oder mit (11)

$$dt_{ik} = -\delta_{ik} + \frac{1}{S} \sum_{k=0}^{S-1} (\mu_{ik} + \delta_{ik}) + \sum_Q \alpha_{Q \cdot S/2} \cdot \sin(Q \cdot S \cdot i (360^\circ/N) + A_{Q \cdot S/2}) + d_k. \quad (17)$$

Nun wird  $t'_{ik}$  bei der gewählten Messanordnung an jedem der  $S$  Spiegel bestimmt. Beim Übergang vom Spiegel  $k$  auf Spiegel  $k+1$  ändert sich  $i$  jeweils um den Wert  $N/S$ , also der Winkel  $Q \cdot S \cdot i (360^\circ/N)$  jeweils um  $Q \cdot 360^\circ$ . Die Grösse

$$\sum_Q \alpha_{Q \cdot S/2} \cdot \sin(Q \cdot S \cdot i (360^\circ/N) + A_{Q \cdot S/2}) = C_{S, N, i} \quad (18)$$

hat also für alle  $i$ -Werte, die zur Bestimmung des Mittelwerts  $t_i$  beitragen, denselben Wert. Demnach sind die ermittelten totalen Teilungsverbesserungen  $t'_{ik}$  und ihr Mittelwert  $t_i$  an der Kreisstelle  $\varphi_i = i (360^\circ/N)$  bei  $S$  Spiegeln systematisch verfälscht durch die regelmässigen Teilungsverbesserungen mit den Perioden  $360^\circ/S$ ,

$360^\circ/2S, 360^\circ/3S \dots$  Diese Fehler lassen sich aus den Messungen nicht ermitteln. Für  $S = 10$  und  $N = 40$  wird

$$C_{10, 40, i} = \alpha_5 \cdot \sin(i \cdot 90^\circ + A_5) + \alpha_{10} \cdot \sin(i \cdot 180^\circ + A_{10}) + \dots \quad (19)$$

Gehen wir auf mittlere Fehler über, vernachlässigen die sehr kleine Auswirkung von  $d_k$  und beachten, dass  $C$  die Berechnung des mittleren Fehlers von  $t'_{ik}$  aus der Streuung dieser Werte nicht beeinflusst, so erhalten wir für den mittleren Fehler des Mittels  $t_i$  aus allen  $S$  Werten  $t'_{ik}$

$$m_t = \pm (1/S) \sqrt{(S-1) m_\delta^2 + m_\mu^2}. \quad (20)$$

Hiermit kann  $m_\delta$  überprüft werden. Zu diesem Zweck setzen wir nach (1)  $m_t = \pm 0,09''$  und nach Abschnitt 6  $m_\mu = \pm 0,10''$ . Damit wird mit  $S = 10$

$$m_\delta = \pm 0,30''. \quad (21)$$

Dieser Wert ist doppelt so gross wie der unmittelbar aus der Streuung der Teilsätze berechnete Wert  $m_\delta = \pm 0,16''$ . Der grössere Wert dürfte realistischer sein. Die Diskrepanz lässt sich vermutlich dadurch erklären, dass bei der Koinzidenz der Teilstriche subjektive systematische Fehler auftreten, die bei kurzfristiger Wiederholung konstant, bei Wiederholung nach grösseren Zeiträumen jedoch variabel sind. Die Berechtigung dieser Vermutung muss jedoch durch weitere Untersuchungen nachgewiesen werden.

## 6. Regelmässige Teilungsverbesserungen

Um den üblichen Ansatz für die regelmässigen Durchmesserverbesserungen

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_i &= \sum_m \alpha_m \cdot \sin(2m\varphi_i + A_m) \\ &= \sum_m (\alpha_m \cdot \cos A_m \cdot \sin 2m\varphi_i + \alpha_m \cdot \sin A_m \cdot \cos 2m\varphi_i) \\ &= \sum_m (x_m \cdot \sin 2m\varphi_i + y_m \cdot \cos 2m\varphi_i), \quad m = 1, 2, 3 \dots \end{aligned} \quad (22)$$

anwenden zu können, werden die totalen Durchmesserverbesserungen an den Stellen  $\varphi_i$  und  $\varphi_i + 180^\circ$  zu Mittelwerten  $\bar{t}_i$  zusammengefasst. Jeder Wert  $\bar{t}_i$  liefert eine Verbesserungsgleichung von der Form

$$v_i = \sum_m (x_m \cdot \sin 2m\varphi_i + y_m \cdot \cos 2m\varphi_i) - \bar{t}_i. \quad (23)$$

Hieraus ergibt sich, sofern die  $N/2$  Kreisstellen gleichmässig über den Halbkreis verteilt sind, das zerfallende Normalgleichungssystem

$$x_m = \frac{4}{N} \sum_{i=0}^{N/2-1} \bar{t}_i \cdot \cos 2m\varphi_i, \quad y_m = \frac{4}{N} \sum_{i=0}^{N/2-1} \bar{t}_i \cdot \sin 2m\varphi_i. \quad (24)$$

Die Amplituden  $\alpha_m$  und die Phasen  $A_m$  ergeben sich dann aus

$$\alpha_m = \sqrt{x_m^2 + y_m^2}, \quad \text{tg } A_m = y_m/x_m. \quad (25)$$

Für den untersuchten Kreis ergab sich für  $m = 1 \dots 5$

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= 0,293'' \cdot \sin(2\varphi - 145,5^\circ) \\ &+ 0,245'' \cdot \sin(4\varphi - 64,6^\circ) \\ &+ 0,029'' \cdot \sin(6\varphi + 156,3^\circ) \\ &+ 0,098'' \cdot \sin(8\varphi - 18,2^\circ). \end{aligned} \quad (26)$$

Für die Amplitude  $\alpha_5$  ergab sich erwartungsgemäss der Wert Null. Die Kurve für  $\Delta\varphi$  ist in Bild 3 dargestellt.

Aus den Verbesserungen  $v_i$  wurden die mittleren Abweichungen

$$\bar{M} = \pm \sqrt{[v_i v_i]/(N/2 - u)} \quad \text{und} \quad M = \bar{M} \cdot \sqrt{2} \quad (27)$$

zwischen  $\bar{t}_i$  und  $\Delta\varphi_i$  beziehungsweise  $t_i$  und  $\Delta\varphi_i$  berechnet, wobei  $u$  der Anzahl der Unbekannten  $x_m$  und  $y_m$  entspricht.  $M$  setzt sich zusammen aus dem mittleren zufälligen Teilungsfehler  $m_\mu$  und dem mittleren Messfehler  $m_\delta/\sqrt{S}$  von  $t_i$ .  $m_\mu$  ergibt sich demnach aus

$$m_\mu = \pm \sqrt{M^2 - m_\delta^2/S}. \quad (28)$$

Für den vorliegenden Fall ergab sich mit  $m_\delta = \pm 0,30''$

$$m_\mu = \pm 0,10''. \quad (29)$$

Hierbei ist zu beachten, dass  $m_\mu$  bei Hinzunahme weiterer Glieder der Fourierreihe kleiner wird und den Wert Null annimmt, wenn die Anzahl der zu bestimmenden Parameter gleich der Anzahl der über den Halbkreis verteilten Stützstellen wird.

## 7. Zusammenfassung

Zur Bestimmung der Fehler des Teilkreises eines Präzisionstheodolits an  $N$  gleichmässig über den Kreis ver-

teilten Stellen werden mit Hilfe eines Autokollimationsokulars und einer Vorrichtung zur Umlenkung der Zielachse des Fernrohrs die Richtungen der Normalen eines Spiegelpolygons mit  $S$  Spiegeln in  $N$  Sätzen gemessen. Nach jedem Satz, der sich aus mehreren Teilsätzen bei unveränderter Kreislage zusammensetzt, wird der Kreis um  $360^\circ/N$  verdreht. Die Mittelwerte aus allen Sätzen liefern sehr genaue Spiegelrichtungen, die weitgehend frei von Teilungsfehlern sind. Die Teilungsverbesserungen ergeben sich durch Vergleich der Richtungen der einzelnen Sätze mit den Spiegelrichtungen. Das Verfahren wurde praktisch erprobt und auf seine Genauigkeit untersucht. Ferner wurde gezeigt, wie aus den totalen Durchmesser Verbesserungen die regelmässigen Durchmesser Verbesserungen, mit Ausnahme der Perioden  $360^\circ/S$ ,  $360^\circ/2S \dots$ , abgeleitet werden können. Zum Schluss möchte der Verfasser Herrn cand. geod. Roland Mayer für die sorgfältige Ausführung der Messungen und eines Teils der Berechnungen vielmals danken.

## Literatur

- [1] *Schreiber, O.*: Untersuchungen von Kreisteilungen mit zwei und vier Mikroskopen. Zeitschrift für Instrumentenkunde 1886, S. 1-5, 47-55, 93-104.
- [2] *Heuvelink*: Bestimmung des regelmässigen und des mittleren zufälligen Durchmesser-Teilungsfehlers bei Kreisen von Theodoliten und Universalinstrumenten. ZfV 1913, S. 441 bis 452.
- [3] *Heuvelink*: Die Prüfungen der Kreisteilungen von Theodoliten und Universalinstrumenten. Zeitschrift f. Instrumentenkunde 1925, S. 70-84.
- [4] *Peglow, M.*: Optischer Teilkopf und Spiegelpolygon — zwei Winkelmessgeräte steigern sich wechselseitig. Leitz Mitteilungen, Wiss. u. Techn. Bd. II, Nr. 7, S. 198-206, 1964.

Adresse des Verfassers

Prof. Dr.-Ing. Karl Ramsayer, Universität Stuttgart,  
Geodätisches Institut, Postfach 560, D-7 Stuttgart 1