

Zeitschrift: Vermessung, Photogrammetrie, Kulturtechnik : VPK = Mensuration, photogrammétrie, génie rural

Herausgeber: Schweizerischer Verein für Vermessung und Kulturtechnik (SVVK) = Société suisse des mensurations et améliorations foncières (SSMAF)

Band: 80 (1982)

Heft: 4

Artikel: Das Dynamische Nivellement

Autor: Embacher, W.

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-231156>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 01.04.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Das Dynamische Nivellement

W. Embacher

Die Arbeit über das «Dynamische Nivellement» oder die Höhenbestimmung aus Schweremessungen hat der Verfasser in folgende Abschnitte gegliedert:

1. Einleitung

2. Ergänzung zur Arbeit: Die Bestimmung der orthometrischen Korrektur des geometrischen Nivellements aus Lotabweichungen und aus dem Störpotential T mit den Untertiteln:

Der theoretische Schleifenschlussfehler

Die rohe Lattenhöhe

Die dreigliedrige orthometrische Korrektur

3. Definition der Gradienten

4. Bestimmung der Höhe über dem Niveausphäroid mit dem Bezugsgradienten

4. Bestimmung des Bezugsgradienten aus örtlichen Gravimetermessungen

6. Schlussfolgerung.

Es wird gezeigt, dass im allgemeinen für Punkte der physischen Erdoberfläche durch zwei Schwere- und zwei relative Lagemessungen bei bekanntem γ_0 -Wert die Höhe, bezogen auf die gewählte Ausgangsfläche, bestimmt werden kann. Ein durchgerechnetes Beispiel soll dem besseren Verständnis der neuen Gedankengänge dienen.

L'auteur a subdivisé son travail concernant le (nivellement dynamique) ou la détermination de l'altitude à l'aide de mesures gravimétriques, de la manière suivante:

1. Introduction

2. En complément à son travail: la détermination de corrections orthométriques pour le nivellement géométrique à partir des déclinaisons de la verticale et de la perturbation potentielle T , sous-titrée de la façon suivante:

L'écart de fermeture théorique des boucles de nivellement

L'altitude brute mesurée au moyens de lattes

Les trois corrections orthométriques

3. Définition des gradients

4. La détermination de l'altitude au-dessus du sphéroïde de niveau à l'aide du gradient de référence.

5. La détermination du gradient de référence à l'aide de mesures gravimétriques locales

6. Conclusions finales.

L'auteur montre qu'en général il est possible de déterminer l'altitude d'un point de la surface terrestre, se rapportant à une surface de référence choisie au préalable, à l'aide de deux mesures gravimétriques et de deux mesures relatives de la position du point connaissant la valeur de γ_0 . Afin de mieux faire comprendre le sens des idées nouvelles, l'auteur y a ajouté un exemple numérique.

1. Einleitung

Nach dem Prinzip der Einfachheit der Natur und dem Prinzip der pragmatischen Ordnung [E] ist es sinnvoll, komplizierte Vorgänge oder Gebilde auf einfachere zu beziehen oder in bezug auf einfachere zu messen. Danach scheint sich der Weg abzuzeichnen, Punkte der gestörten Niveauflächen der physischen Erdoberfläche, die verschiedenen analytischen Flächen angehören, auf eine gemeinsame ungestörte Fläche zu beziehen, welche mathematisch und physikalisch eindeutig definiert ist. Die im Oberflächenpunkt gemessene Schwerkraft, verglichen mit der normalen Schwere auf der Bezugsfläche, und die Gradienten im Oberflächenpunkt bieten sich als Referenzgrößen an. In jahrzehntelanger Arbeit hat der Verfasser versucht, zunächst rein empirisch, dann durch Modellrechnungen

und schliesslich mathematisch-physikalisch Zusammenhänge zwischen den genannten Parametern und dem Abstand zwischen Oberflächenpunkt und Bezugsfläche zu finden. In vorliegender Arbeit sollen diese Erkenntnisse veröffentlicht werden, um eine breitere Basis für weitere Forschungen zu schaffen.

2. Ergänzung zur Arbeit: Die Bestimmung der orthometrischen Korrektur des geometrischen Nivellements aus Lotabweichungen und aus dem Störpotential T .

Der theoretische Schleifenschlussfehler

Abb.1 zeigt Ausschnitte des österreichischen Präzisionsnivellements mit dem Stand des Jahres 1965. Die jeweils drei Angaben in den einzelnen Schleifen bedeuten in mm:

1. $\Sigma\Delta h$

2. Theoretischer Schleifenschlussfehler

$$\langle TS \rangle = -\frac{\bar{g} - g_m}{g_m} \cdot \Delta h$$

(wobei \bar{g} den Mittelwert der Schwere aus den beiden Standpunkten mit dem Höhenunterschied Δh und g_m einen mittleren Schwerewert bedeutet).

3. Der sogenannte Messfehler $\langle Mf \rangle = \Sigma\Delta h - TS$. Betrachten wir z. B. die Schleifen Nr.8 und Nr.9, so sehen wir, dass die $\Sigma\Delta h$ bei der einen $-6,45$ mm und bei der zweiten $+7,22$ mm beträgt, Werte, die bei einer nivellierten Strecke von ca. 250 km sehr gut und durchaus möglich sind.

Der theoretische Schleifenschlussfehler beträgt bei der Schleife Nr.8 $+12,23$ mm und bei der Schleife Nr.9 $-27,58$ mm. Diese Werte sind unwahrscheinlich, da die nivellierten Wege bei beiden Schleifen etwa die gleiche Topographie aufweisen.

Fasst man alle Schleifen des oben angeführten Nivellements in mehrere Gruppen zusammen und berechnet den mittleren Kilometerfehler dieser Gruppen einmal aus $\Sigma\Delta h$ (in Tabelle 1 mit x bezeichnet) und das zweitemal aus dem Messfehler (xx), so erkennt man, dass die Einführung des theoretischen Schleifenschlussfehlers fehlertheoretisch keine Verbesserung bringt. Vielmehr sieht man aus der Zerlegung von $TS = -\frac{\bar{g}}{g_m} \Delta h$, dass der theoretische Schleifenschlussfehler mit den Höhenunterschieden Δh korreliert ist. Die $\Sigma g\Delta h$ ist bei gleichem Anfangs- und Endpunkt des Nivellements Null, da in diesem Fall kein Potentialunterschied vorhanden ist. Die Summe der Lattenlesungen $\Sigma\Delta h$ bei einer Schleife bzw. der mittlere Kilometerfehler ist das Kriterium für die Güte des Nivellements.

Die rohe Lattenhöhe

Bringt man an die Summe aller Lattenabschnitte die Normal- (oder Bessel-) Reduktion an (z. B. nach Gleichung 3,2 [2]), so gibt diese den Abstand der ungestörten Niveauflächen durch den Anfangs- und Endpunkt des Nivellements.

Die dreigliedrige orthometrische Korrektur

Es sei noch einmal darauf hingewiesen, dass die dreigliedrige orthometrische Korrektur (d. h. die dynamische Wegkorrektur und die vertikale dynamische Korrektur im Anfangs- und im Endpunkt eines Nivellements) nicht Höhen über dem Geoid, sondern die orthome-

trische Korrektur mit Annahme einer hypothetischen Dichte in bezug auf eine ungestörte Niveaulfläche ergibt ([1] Seite 21 ff.).

3. Definition der Gradienten

Unter Gradienten bezeichnen wir in der Schwermessung die Änderung der Schwerkraft in einer bestimmten Richtung. Wir unterscheiden im speziellen den Horizontal- (H) und Vertikalgradienten (V). Je nachdem, ob wir von einer Änderung der Schwerkraft in einem Medium mit der Dichte Null oder einer Dichte grösser als Null sprechen, unterscheiden wir zwischen «Äusserem» und «Innerem» Gradienten (H_i , H_a , V_i , V_a). Unter der normalen Änderung der Schwerkraft in vertikaler Richtung verstehen wir den «Normalgradienten» ($\frac{\partial \gamma}{\partial h} = N$) mit $308,56 \text{ mgal } 10^{-3}$.

Für den Gradienten, welchen wir aus gemessenen Schwere- und Lagedifferenzen ableiten können, hat der Verfasser die Bezeichnung «Trennflächengradient» (H_T , V_T) eingeführt ([3] Seite 10 und [4] Seite 745). Aus diesen Arbeiten übernehmen wir folgende Gleichungen:

$$H_T = \frac{H_i + H_a}{2}, \quad V_T = \frac{V_i + V_a}{2}$$

$$\frac{\Delta g}{\Delta h} + V_T - \frac{\Delta s}{\Delta h} \cdot H_{Tx} \cdot \cos \alpha - \frac{\Delta s}{\Delta h} \cdot H_{Ty} \cdot \sin \alpha = 0 \quad 1,0$$

Wir legen die x-Achse in Richtung RT (Abb. 2), dadurch erhalten wir aus Glg. 1,0 die Gleichung

$$\frac{\Delta g}{\Delta h} + V_T - \frac{\Delta s}{\Delta h} \cdot H_T = 0 \quad 1,1$$

Wenn $H_i = -H_a$ wird $H_T = 0$ und wir erhalten

$$V_T = \frac{V_i + V_a}{2} = -\frac{\Delta g}{\Delta h} \quad 1,11$$

das heisst, dass dort, wo der horizontale Trennflächengradient Null ist oder wo sich seine Wirkung durch geeignete Messungsanordnung aufhebt, der vertikale Trennflächengradient das Mittel aus äusserem und innerem Vertikalgradienten ist.

Dazu ein empirisches Beispiel:

In den Messpunkten Planötzenhof und Peerhof ist der Horizontalgradient sehr klein. Die Summe aus dem gemessenen äusseren Vertikalgradienten und dem mit bekannter Dichte berechneten inneren Vertikalgradienten ist dort etwa doppelt so gross wie der nach ([2] Seite 252) gemessene horizontale Trennflächengradient und wie die Messungsdifferenz $\frac{\Delta g}{\Delta h}$. Schliesslich wurde vom Verfasser noch der Begriff «Bezugsgradient» eingeführt:

Aus der Arbeit [1] des Verfassers entnehmen wir die Gleichungen:

$$h = \frac{g - \gamma_0 + \frac{\partial \gamma}{\partial h} \cdot \xi}{\frac{\partial g}{\partial h} - 2 \frac{\partial \gamma}{\partial h}} \quad 4,10$$

und

$$\frac{\partial g}{\partial h} = \frac{g - \gamma_0 + \frac{\partial \gamma}{\partial h} \cdot \xi}{h} + 2 \frac{\partial \gamma}{\partial h} \quad 4,11$$

Den so definierten Gradienten $\frac{\partial g}{\partial h}$ nennen wir Bezugsgradient, weil er, wenn wir ihn kennen, die Höhe über dem Bezugsniveausphäroid angibt. Den Term von Bruns $\frac{\partial \gamma}{\partial h} \cdot \xi$ wollen wir als kleine Grösse zunächst vernachlässigen. Der Bezugsgradient ist die auf einen Höhenmeter bezogene Differenz zwischen der Schwerkraft im Messpunkt und der zugehörigen theoretischen Schwere im Fusspunkt der Lotlinie auf dem (selbstverständlich ungestörten) Bezugsniveausphäroid, vermehrt um den doppelten Normalgradienten. Er liefert daher Höhen, die sich auf das Niveausphäroid beziehen, für welches die γ_0 -Werte berechnet wurden. Der Bezugsgradient ist definitionsgemäss eine konstante Grösse für die jeweilige Lotlinie zwischen Null und der Höhe h.

Nachdem die Zunahme der Normal Schwere $\frac{\partial \gamma}{\partial h}$ auch als konstant anzusehen ist, kann man bei der Integration über h den anomalen Schweregradienten, d. h. die Differenz aus dem Bezugsgradienten und dem normalen Schweregradienten ($\frac{\partial g}{\partial h} - \frac{\partial \gamma}{\partial h}$) als Konstante vor das Integralzeichen setzen. Der Ordnung halber soll hier erwähnt werden, dass in der Arbeit [2] des Verfassers der Bezugsgradient noch als «Innerer Trennflächengradient» angeführt wurde.

Abb. 2 zeigt den Querschnitt eines 45°-Modells, welches in der y-Richtung eine wesentlich grössere Ausdehnung hat als in der x- und z-Richtung. Seine Höhe beträgt 1000 m, und es wurden für eine Höhe von 500 m die Vertikalanziehungen in den 4 Punkten A, B, C, D für die Dichte 1 berechnet ([3] Seite 8ff.). Die sich daraus ergebenden Gradienten

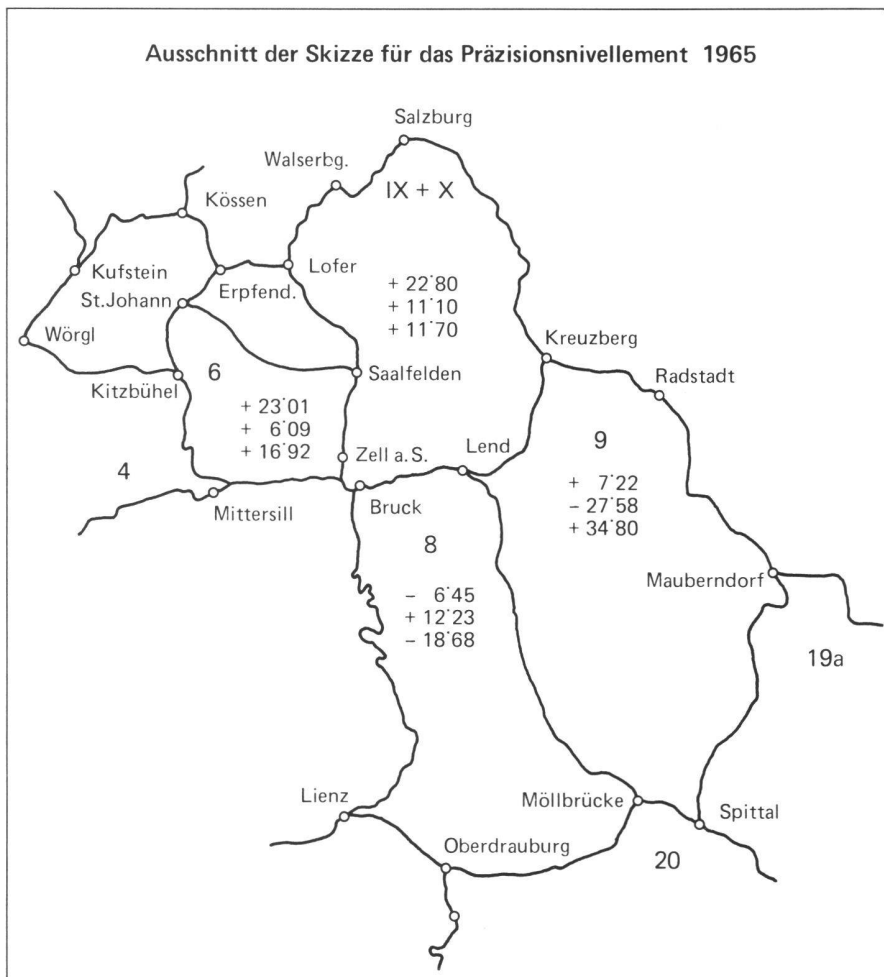


Abb. 1

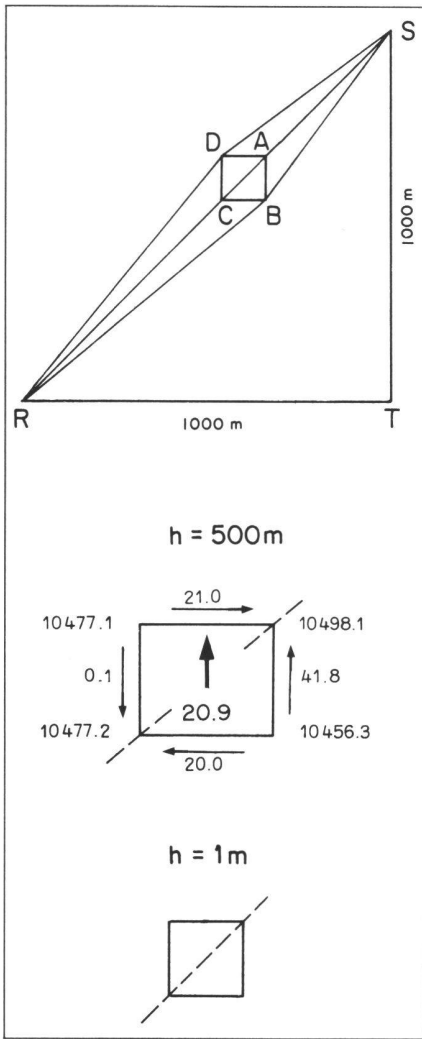


Abb. 2

wurden bestimmt und sind aus dieser Abbildung zu ersehen.

Wir entnehmen der Arbeit [4] des Verfassers die transformierte Grundgleichung zur Berechnung der Vertikalanziehung in den Punkten A, B, C, D (Abb. 2).

$$P_i = 2k^2 \cdot \sigma \cdot (\beta h + d \ln \frac{\overline{PT}}{\overline{PS}}) \quad 5.1$$

In unserem Beispiel ist für die Höhe von 500 m der zweite Ausdruck in der Klammer gleich Null, und es bleibt

$$P = 2k^2 \sigma \beta \cdot h \quad 5.02$$

bzw.

$$h = \frac{P}{2k^2 \sigma \beta} \quad 5.03$$

Nach unserer Definition ist also der Nenner der Gleichung 5.03, $2k^2 \sigma \beta$ der Bezugsgradient. Es gilt nun zu untersuchen, ob dieser Gradient der Trennflächengradient ist. In der Arbeit des Verfassers ([4] Seite 110ff.) wurde dies schon nachgewiesen, nämlich dass die

	km	Diff.	+ T. S. -	M. f.	Δh_{2-1}	M. f. 2-1	
1	161	-44,92		48,88	3,94	38,68	-40,39
2	191	-6,24	30,21		-36,45	-2,54	21,33
3	70	-8,78		6,34	-15,12	-40,07	-7,30
4	186	-48,85		26,43	-22,42	11,93	-9,44
5	110	-36,92		5,06	-31,86	59,93	48,78
6	120	23,01	6,09		16,92	-45,29	-42,44
7	100	-22,28	3,24		-25,52	15,83	-6,84
8	244	-6,45	12,23		-18,68	13,67	53,48
9	216	7,22		27,58	34,80	-1,48	-19,17
V	152	5,74		9,89	15,63	21,51	-23,77
VI	255	27,25	35,36		-8,14	5,25	65,11
VII	132	32,50		24,47	56,97	-15,93	-41,85
VIII	137	32,57	1,45		15,12	6,23	-3,42
IX + X	191	22,80	11,10		11,70	67,72	-7,76
	2365		99,68	148,65			$\pm 2,15 \quad \pm 2,17$
10	258	-46,15		11,15	-35,00	60,61	44,89
11	163	14,46	4,58		9,89	-45,49	-37,01
12	144	-31,03		3,91	-27,12	13,80	11,06
13	158	-17,23		1,17	-16,06	9,03	0,50
14	210	-8,20	7,37		-15,56	-2,44	12,18
15	235	-10,64		7,26	-3,38	-12,01	-20,28
16	113	-22,65	1,01		-23,66	36,27	19,37
17	227	13,62	9,13		4,29	-17,35	-5,12
18	172	-3,73		2,90	-0,83	32,39	46,37
19a	265	36,12		9,42	45,54	-31,39	-44,89
19b	140	4,73	4,08		0,65	35,35	6,80
20	272	40,08	32,64		7,45	-92,64	-59,34
21	226	-52,56		0,67	-51,89	60,78	60,30
32	118	8,22		0,19	8,41	5,84	10,34
33	124	14,06		4,69	18,75	-47,75	-52,60
36	127	-33,69	0,16		-33,85	-12,46	-1,15
	2952		58,97	41,35			$\pm 1,88 \quad \pm 1,78$
42a	189	-37,72	1,32		-36,40	58,35	51,80
43	181	20,63	5,23		15,40	15,59	21,67
48	105	36,22		0,85	37,07	-25,96	-28,86
24	153	10,26	2,05		8,21	-22,60	-18,68
42c	164	-12,34		1,87	-10,47	12,13	-0,79
42b	133	-0,21		11,05	-11,26	18,42	31,46
44	198	18,21	18,01		20,20	-51,90	-54,05
37	127	-33,69	0,16		-33,85	1,27	11,93
38a	238	-32,42		10,42	-21,92	55,67	61,65
39	197	23,25		16,48	39,73	-42,71	-49,01
38b	182	-19,46		9,48	-9,28	21,51	18,59
22	230	2,05		7,26	9,31	-39,77	-45,71
	2323		26,77	58,16			$\pm 1,91 \quad \pm 1,95$
25	210	-3,05	0,03		-3,08	-3,57	-2,68
27	126	-6,62		0,90	-5,72	12,28	9,42
28	96	5,66	1,96		3,70	-4,87	-6,40
26	171	0,79	3,49		-2,70	-4,68	-0,20
29	134	-3,89		0,99	-2,90	26,83	26,94
30	123	22,94		1,01	24,04	-11,26	-13,74
41	163	11,68	1,35		10,33	-13,14	-15,95
31	183	-1,46	4,16		-5,62	-7,06	-1,59
40a	100	-8,52		1,31	-7,21	-14,61	-26,55
40b	154	-23,13	9,63		-33,76	48,81	47,79
40c	212	26,68	12,67		14,03	-37,99	-26,46
34	226	-11,31	1,12		-12,43	67,01	54,55
35	392	55,70	13,58		42,12	-62,09	-49,71
47	170	-6,39	1,20		-7,59	10,58	11,44
23	193	4,19	0,34		3,85	-26,83	-28,98
46	143	-22,64	2,46		-25,13	19,59	22,05
	2796		51,99	4,21			$\pm 1,27 \quad \pm 1,25$
			273,41	252,37			

Tab. 1

Differenz der Vertikalkomponente der Anziehungskraft auf Punkt A weniger dieser auf Punkt C gleich $2k^2 \sigma \beta$ ist. Da, wie schon besprochen, dies auch die

Größe des vertikalen Trennflächengradienten ist, wurde also anhand dieses Modelles gezeigt, dass für den Fall, dass innerer und äusserer Horizontal-

gradient entgegengesetzt gleich gross sind, der Trennflächengradient auch Bezugsgradient ist.

Lassen wir im Modell (Abb. 2) den Winkel β 180° , d.h. 2π werden, so erhalten wir die Bouguersche Platte, deren Anziehung P auf einem Oberflächenpunkt bekanntlich

$$P = 2\pi k^2 \sigma \cdot h \quad 5,04$$

ist, dies stimmt auch mit Glg. 5,02 überein. Der Bezugsgradient ist in diesem Fall $2\pi k^2 \sigma$. Auch hier ist

$$V_T = \frac{V_i + V_a}{2} \quad 1,11$$

denn V_i ist der «Prey-Gradient»: $4\pi k^2 \sigma$ und V_a ist in diesem Fall Null. Auch hier gilt wieder die Erkenntnis, dass dort, wo der horizontale Trennflächengradient Null ist, der vertikale Trennflächengradient zugleich Bezugsgradient ist.

4. Bestimmung der Höhe über dem Niveausphäroid mit dem Bezugsgradienten

Wendet man die Gleichung 4,10 auf zwei Punkte an und bildet ihre Differenz, so erhalten wir

$$\begin{aligned} h_2 - h_1 &= \frac{g_2 - g_1 + \Delta\gamma_0}{\frac{\partial g_2}{\partial h} - 2\frac{\partial \gamma}{\partial h}} \\ &+ \frac{(\frac{\partial g_1}{\partial h} - \frac{\partial g_2}{\partial h}) h_1}{\frac{\partial g_2}{\partial h} - 2\frac{\partial \gamma}{\partial h}} \\ &+ \frac{\frac{\partial \gamma}{\partial h} (z_2 - z_1)}{\frac{\partial g_2}{\partial h} - 2\frac{\partial \gamma}{\partial h}} \quad 4,12 \end{aligned}$$

Auch hier können wir zunächst den letzten Ausdruck wegen seiner Kleinheit vernachlässigen. Man erhält den Höhenunterschied zweier Punkte in Funktion der gemessenen Schwere- und γ_0 -Werte der beiden Bezugsgradienten und der Höhe des Ausgangspunktes. h_1 lässt sich aus Gleichung 4,12 eliminieren, und wir erhalten folgende Gleichungen zur Bestimmung des Bezugsgradienten des Folgepunktes:

$$A = \frac{g_2 - \gamma_2 \sigma}{g_1 - \gamma_1 \sigma} + \frac{1}{\frac{\partial g_2}{\partial h} - 2\frac{\partial \gamma}{\partial h}}$$

$$B = \frac{\Delta g_{21} + \Delta \gamma_{021}}{\Delta h_{21}} + 2\frac{\partial \gamma}{\partial h} - \frac{\partial g_2}{\partial h}$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial h} = \frac{B(1 + A2\frac{\partial \gamma}{\partial h}) + \frac{\partial g_2}{\partial h}}{1 + A \cdot B} \quad 4,14$$

Wenn in einem Punkt der physischen Erdoberfläche der Schwerewert und der Bezugsgradient bekannt sind, kann mit Hilfe des bekannten Höhenunter-

Punkt	H	g	g - γ_0	$\frac{\delta g}{\delta h}$	H - H_s
Aldrans	759,20	539,00	280,78	247,28	+ 0,01
Arzl	673,08	542,00	280,41	200,51	⊖
Planötzen	777,60	526,00	295,58	237,00	⊖
Patscherkofl	2246,55	213,00	602,72	348,83	+ 0,03
Hafelekarak	2333,56	198,00	627,10	348,39	- 0,01
Völs	665,15	551,47	267,61	214,79	+ 0,16
Kranebitten	683,97	546,14	275,11	214,90	- 0,01
Mentelberg	622,65	561,39	257,91	202,91	- 0,01
Peerhof	619,32	561,34	260,14	197,08	⊖
Hochtor	2515,20	156,67	647,66	359,63	- 0,08
Badgastein	1089,09	417,17	388,90	260,04	- 0,02
Iselsberghöhe	1207,12	441,77	339,99	335,14	+ 1,40
Gutenbrunn	1228,02	406,48	389,58	299,88	- 0,01

Tab. 2

schiedes zum Folgepunkt der Bezugsgradient dieses Punktes und somit mit Gleichung 4,10 aus dem gemessenen Schwerewert die Höhe des Punktes über der Bezugsfläche gerechnet werden.

Zur Steigerung der Genauigkeit eines ganzen Netzes von Höhen, welche aus Schweremessungen abgeleitet wurden, kann man die einzelnen Punkte mit Hilfe der Formelgruppe 4,14 verbinden.

Tabelle 2 zeigt die Anwendung dieser Formelgruppe auf verschiedene Punkte im Gebirge. Die ersten 8 Punkte wurden an den Messpunkt «Planötzenhof» des Innsbrucker Testnetzes [2] und die restlichen Punkte an die Station «Embachkapelle» [6] angeschlossen. Bis auf den Punkt «Iselsberghöhe», dessen Schwerewert fehlerhaft sein dürfte, zeigen die abgeleiteten Höhen Übereinstimmung auf Zentimetergenauigkeit mit den bekannten Höhen. Diese angeführte Genauigkeit ist hier deshalb möglich, weil die beiden Bezugsgradienten, von denen ausgegangen wurde, nicht gemessen, sondern rechnerisch (Gleichung 4,14) bestimmt wurden.

5. Bestimmung des Bezugsgradienten aus örtlichen Gavimetermessungen

Im Abschnitt 3 wurde anhand eines einfachen Modelles und auch mit Hilfe der Bouguerschen Platte gezeigt, dass man dort, wo der horizontale Trennflächengradient Null oder sehr klein ist, erwarten kann, dass der mit Hilfe der bisher üblichen Gradientenmessung ([2] Seite 252) bestimmte Trennflächengradient Bezugsgradient ist.

Wir schreiben nochmals die Gleichung für den Bezugsgradienten an:

$$\frac{\partial g}{\partial h} = \frac{g - \gamma_0}{h} + 2\frac{\partial \gamma}{\partial h} \quad 4,111$$

Für einen Punkt einer benachbarten Lotlinie mit einer Höhe $h + \Delta h$ und einer Schwere $g + \Delta g$ beträgt die Änderung des Bezugsgradienten

$$\Delta \left(\frac{\partial g}{\partial h} \right) \Delta g, \Delta h = \frac{\Delta g}{h} - \frac{g - \gamma_0}{h^2} \Delta h \quad 4,112$$

Wir sehen, dass sich die Änderung des Bezugsgradienten auf einem schrägen Hang in bezug auf den Zentralpunkt vergrößert, während diese Änderung auf einem Kuppenpunkt als Zentralpunkt gegen Null gehen kann. Wir schliessen daraus, dass man auch auf einem Kuppenpunkt bei geschickter Messungsanlage aus der üblichen Gradientenmessung ([2] Seite 252) einen brauchbaren Bezugsgradienten erhalten kann. Darüber soll in einer andern Arbeit berichtet werden.

Der allgemeine Fall zur Bestimmung des Bezugsgradienten ist also der schräge Hang. Wir gehen auf das Beispiel «Hochtor» zurück:

Der Messpunkt liegt auf einem schrägen Hang mit einem Geländewinkel $\delta = 23^\circ 73'$, der gemessene Schwereunterschied zu γ_0 beträgt $-647\,660 \text{ mgal} \cdot 10^{-3}$ und der Schwereunterschied in der Falllinie pro m ist

$$\frac{\Delta g}{\Delta h} = -217,00 \cdot 10^{-3} \text{ mgal.}$$

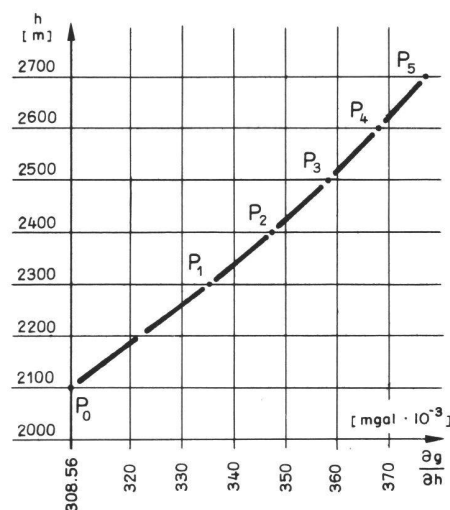


Abb. 3

Wir wissen, dass der Punkt eine Höhe von 2515,20 m hat, doch wir wollen diese Höhe aus den oben gemessenen Grössen erhalten!

In Abb. 3 wurden die Höhen von 5 Punkten von 2300 m bis 2700 m als Ordinaten und die Bezugsgradienten dieser 5 Punkte nach Gleichung 4,111 berechnet, bzw. deren Ergänzung auf $2 \frac{\partial g}{\partial h}$ (da dies nur eine konstante Nullpunktverschiebung bedeutet) als Abszissen aufgetragen. Der Punkt, dessen Bezugsgradient der Höhe von «Hochtor» entspricht, muss auf dem Linienzug P_1 bis P_5 liegen, dessen mittlere Steigung

$$\tan \alpha_m = \frac{\left(\frac{\partial g}{\partial h}\right)_k - \left(\frac{\partial g}{\partial h}\right)_i}{h_k - h_i} \quad 5,0$$

beträgt. Für die Punkte zwischen $h = 2400$ und $h = 2600$ m beträgt $\tan \alpha_m = 0,1038$. Damit haben wir den geometrischen Ort aller Endpunkte der Bezugsgradienten für den vorgegebenen Schwereunterschied und die angenommenen Höhen.

Wir wissen ferner, dass der horizontale Trennflächengradient durch die Gleichung

$$H_T = \left(\frac{\Delta g}{\Delta h} + \frac{\partial g}{\partial h} \right) \cdot \frac{\Delta h}{\Delta s} \quad 5,1$$

$$= \left(\frac{\Delta g}{\Delta h} + \frac{\partial g}{\partial h} \right) \cdot \tan \delta$$

bestimmt ist.

Wir haben bereits weiter oben für den Normalgradienten die Bezeichnung N festgelegt. Mit ΔN bezeichnen wir die Grösse, um die der Bezugsgradient kleiner oder grösser als N ist, und nennen ΔN den «Störgradienten».

Es ist damit

$$\frac{\partial g}{\partial h} - 2 \frac{\partial g}{\partial h} = -N + \Delta N$$

$$\text{und } \frac{\partial g}{\partial h} = N + \Delta N$$

In Abb. 4 liegt wieder dasselbe Koordinatensystem vor wie in Abb. 3.

Der Punkt P_h hat von einer Linie mit der Abszisse $2N$ den Abstand $-N + \Delta N$ und entspräche der Höhe von «Hochtor». Wir können auf dieser Abbildung die Gleichung 5,1 wie folgt ablesen:

$$H_T = \left(N + \Delta N + \frac{\Delta g}{\Delta h} \right) \tan \delta \quad 5,10$$

und

$$h = \frac{g - \gamma_0}{-N + \Delta N} \quad 5,2$$

$\tan \alpha_m$ ist die Steigung der Geraden $P_u P_h$, solange wir diese Verbindung genähert als Gerade annehmen.

Der Bezugsgradient des Punktes P_u ergibt sich mit

$$\left(\frac{\partial g}{\partial h}\right)_u = N + \Delta N - \left(N + \Delta N + \frac{\Delta g}{\Delta h} \right) \tan \delta \tan \alpha_m \quad 5,11$$

und die Höhe h_u ergibt sich mit

$$h_u = \frac{g - \gamma_0}{-N + \Delta N - \left(N + \Delta N + \frac{\Delta g}{\Delta h} \right) \tan \delta \tan \alpha_m} \quad 5,21$$

Nach Abb. 4 gilt die Gleichung

$$h - h_u = H_T \quad 6,0$$

denn man sieht aus der transformierten Gleichung 5,10

$$\frac{H_T}{N + \Delta N + \frac{\Delta g}{\Delta h}} = \frac{\Delta h}{\Delta s} = \tan \delta \quad 6,1$$

dass der Höhenunterschied Δh zwischen den Punkten P_h und P_u zahlenmässig dem horizontalen Trennflächengradienten entspricht.

In Abb. 4 bezeichnen wir die Strecke vom Koordinatenursprung bis P_u mit u . Dann können wir aus Abb. 4 die beiden Gleichungen

$$(N + \Delta N) + \frac{\Delta g}{\Delta h} - H_T \cos \delta = \theta \quad 6,2$$

$$(N + \Delta N) - u - H_T \tan \alpha_m = \theta$$

ablesen. Sie würden bei bekanntem u die Grössen ΔN und H_T ergeben.

Aus Gleichung 6,2 sehen wir, dass der Bezugsgradient für die Höhe h

$$\left(\frac{\partial g}{\partial h}\right) = N + \Delta N = u + H_T \tan \alpha_m \quad 5,21$$

vom Einfluss des Horizontalgradienten H_T auf u abhängt, während der Bezugsgradient u von diesem Einfluss unabhängig ist.

In Abb. 5, bei welcher das selbe Koordinatensystem vorliegt wie in Abb. 4, bezeichnen wir nach Gleichung 4,10 die Höhe im Punkt R mit

$$H_N = \frac{g - \gamma_0}{-N} \quad 6,3$$

und den Winkel α_N mit

$$\tan \alpha_N = \frac{2N + \frac{\Delta g}{\Delta h}}{H_N} \quad 6,4$$

Weder die Höhe H_N noch der Winkel α_N ist vom Horizontalgradienten abhängig. Der geometrische Ort aller Peripheriewinkel mit der Grösse α_N ist der Kreis über die drei Punkte R , S , T .

Wir wissen aus der Geophysik [7] (Abb. 6), dass zwischen einer kleinen horizontalen ebenen Flächenbelegung und dem Winkel Ψ , unter dem sie vom Aufpunkt aus gesehen wird, die Beziehung besteht

$$\delta g^{(P)} = 2f\sigma h\Psi \quad 6,5$$

wobei $\delta g^{(P)}$ die Wirkung eines unendlich langen Trapezbalkens von der Dicke $h = n \cdot dh$ und σ die Dichte ist. In unserem Fall entspricht $\delta g^{(P)}$ dem $(g - \gamma_0)$, die Grössen h und σ sind zwar unbekannt, aber pro Standpunkt konstant. Der Winkel Ψ ist gleich dem Winkel α_N , dessen Tangente durch Gleichung 6,4 festgelegt wurde.

Damit können wir den Kreis über den Punkten RST als geometrischen Ort aller Punkte definieren, deren Winkel

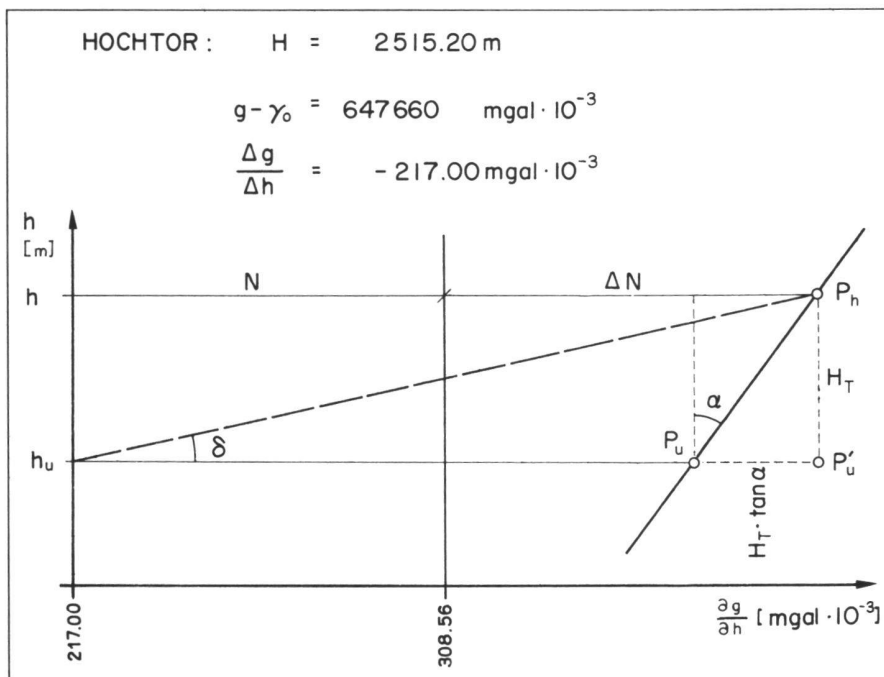


Abb. 4

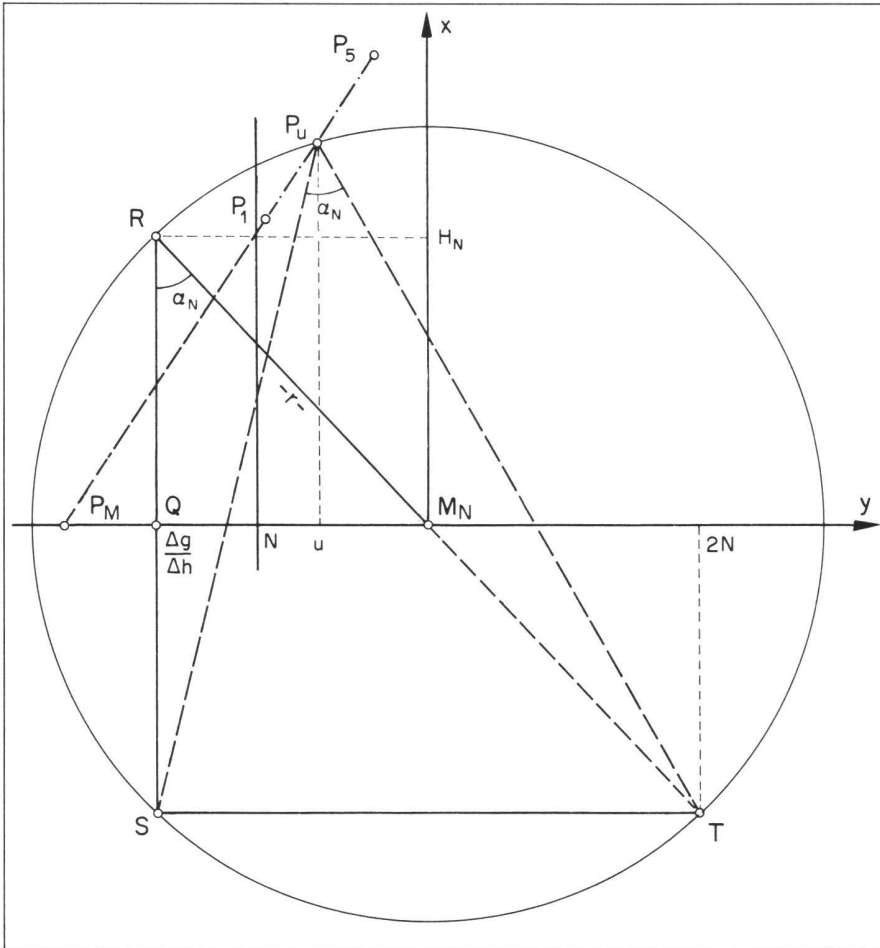


Abb. 5

über der Sehne ST konstant ist. Die Höhe dieser Punkte über der Sehne ST wird aus der konstanten Schweredifferenz $(g - \gamma_0)$ und dem Bezugsgradienten berechnet. Die Schweredifferenz $(g - \gamma_0)$ entspricht dem konstanten Winkel Ψ bzw. α_N , und der Bezugsgradient ist vom zugehörigen horizontalen Trennflächengradienten H_T unabhängig. Im Punkt P_U gilt nach Gleichung 4,10

$$(g - \gamma_0) = h_u (u - 2N) \quad 6,31$$

Wir sehen, dass der Bezugsgradient u vom Einfluss des Horizontalgradienten

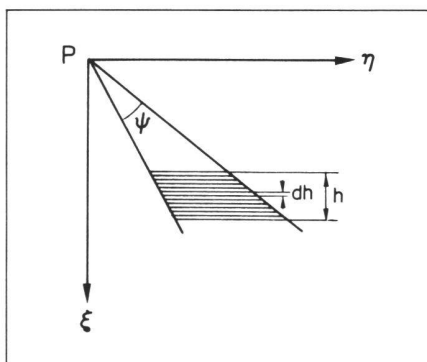


Abb. 6

H_T unabhängig ist, denn $H_T \tan \alpha$ ist dort Null. Nachdem der Kreis mit dem Peripheriewinkel Ψ bzw. α_N der geometrische Ort aller Scheitelpunkte ist, muss der Schnitt dieses Kreises mit dem Linienzug $P_1 - P_5$ den Punkt P_U ergeben.

Die Massstäbe in der Abszissenrichtung und in der Ordinatenrichtung sind willkürlich gewählt. Damit der Kreis mit dem Peripheriewinkel $\Psi = \alpha_N$ tatsächlich ein Kreis ist, soll der Längenmassstab durch den Faktor $\frac{1}{c}$ verändert werden, so dass die beiden Schnittgleichungen

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - r^2 &= e \\ y &= x \tan \alpha'_m + d \end{aligned} \quad 6,6$$

einen Bezugsgradienten u liefern, dessen zugehörige Höhe h_u mit der aus der Höhe h und dem Horizontalgradienten H_T abgeleiteten Höhe h_u (Gleichung 6,0) übereinstimmt.

Am Beispiel Hochtort soll die Höhenbestimmung gezeigt werden. Dazu folgende Angaben:

$$\begin{aligned} (g - \gamma_0) &= -647\,660 \text{ mgal } 10^{-3} \\ \tan \delta &= 0,391, \cot \delta = 2,55754 \\ \frac{\Delta g}{\Delta h} &= -217,00 \text{ mgal } 10^{-3}. \end{aligned}$$

1. Durchrechnung mit $c = 4$:
Nach Gleichung 5,0 wird $\tan \alpha_m = 0,1038$ mit den Höhen $h = 2400 \text{ m}$ und $h = 2600$ berechnet.

Nach Gleichung 6,3 wird $H_N = 2098,98$ bestimmt. H_N dividiert durch $c = 4$ gibt $H'_N = 524,75$. $\tan \alpha'_m = 0,4152$, erhalten aus der Strecke $M_N Q$ und der verkürzten Strecke QR . Aus der Gleichungsgruppe 6,6 erhalten wir den Horizontalabstand des Punktes P_U vom Mittelpunkt M_N mit $76,74$; $417,06$ ist der Abstand des Mittelpunktes vom Ursprung. Wir erhalten u mit $340,32$, den Gradienten ΔN mit $31,76$ und den Bezugsgradienten $(2N - u)$ mit $276,80$; dieser gibt die Höhe $h_u = 2339,81$. Mit Hilfe der Gleichungsgruppe 6,2 erhalten wir H_T mit $50,26$ und die Grösse $(N + \Delta N) = 345,54$, welche die Höhe $h = 2384,78$ und aus Gleichung 6,0 die Höhe $h_u = 2334,52$ ergibt. Wir erkennen eine Klaffung von $+5,29$.

Mit $c = 5$ klaffen nach dem analogen Rechnungsvorgang die beiden h_u um $+0,35$.

Mit $c = 6$ wieder um $-4,12$ Einheiten. Die gesuchte Höhe $h = 2516,85$ scheint mit dem Faktor $\frac{1}{5}$ der Lösung der Aufgabe am nächsten zu kommen. Eine weitere Verengung des Resultates liesse sich durch Wahl entsprechender Faktoren erzielen.

Dazu wieder das Beispiel Hochtort:

(Aufstellung siehe gegenüberliegende Seite)

In gleicher Weise wurde die Höhe für weitere Punkte, wie für Patscherkofl und Hafelekar, für welche 2 Schweremessungen, die entsprechenden γ_0 -Werte und der Schwereunterschied $\frac{\Delta g}{\Delta h}$ in der Falllinie vorlagen, berechnet; auch diese Ergebnisse stehen mit der Messgenauigkeit in Einklang.

Zur Berechnung der Höhe von Punkten, deren $H_N > h$ ist, muss der Bezugskreis zu H_N gespiegelt aufgetragen werden.

6. Schlussfolgerung

Ohne speziell auf Genauigkeitsüberlegungen einzugehen, wurde in den vorangehenden Abschnitten gezeigt, dass der Bezugsgradient auf allen Punkten der physischen Erdoberfläche, auf denen überhaupt Vermessungen durchgeführt werden können, bestimmt werden kann. Damit wurde auch gezeigt, dass es möglich ist, überall Höhen, bezogen auf das gewählte Niveausphäroid, abzuleiten, es gilt nur noch, die Messgenauigkeit zu steigern und die Messanlage dem Verfahren anzupassen. Weiter geht aus vorliegender Arbeit hervor, dass für einen Punkt, der bestimmten topographischen Verhältnissen entspricht, und bei bekannter Höhe dieses Punktes sein absoluter Schwerewert aus Gradientenmessungen abgeleitet werden könnte.

c = 4		H	Gradient
$H_N = 2098,98$	524,75	2400	38,70
		2600	59,46
		200	20,76
		0,1038	
		0,4152	
	$1 + \tan^2 \alpha'_m =$	1,17239	$r = 329,95$
			417,06
	$209,98 + 0,4152 \sqrt{329,95^2 \cdot 1,17239 - 209,98^2}$		76,74
		1,17239	340,32
			31,76
			276,80
$H_T = 50,26$		2339,81	
$N + \Delta N = 345,54$		2384,78	
		50,26	
		2334,52	
<hr/>			
c = 5			$r = 290,01$
419,80	0,519		
	1,26936		
			417,06
	$209,98 + 0,519 \sqrt{290,01^2 \cdot 1,26936 - 209,98^2}$		63,07
		1,26936	353,99
			45,43
			263,13
$H_z = 55,83$		2461,37	
$N + \Delta N = 359,79$		2516,85	
		55,83	
		2461,02	
<hr/>			
c = 6			$r = 265,79$
349,83	0,62286		
	1,38788		
			417,06
	$209,98 + 0,62286 \sqrt{265,79^2 \cdot 1,38788 - 209,98^2}$		47,05
		1,38788	370,01
			61,45
			247,11
$H_z = 66,36$		2620,93	
$N + \Delta N = 376,48$		2691,41	
		66,36	
		2625,05	

Es wurden in dieser Arbeit einige Gradienten neu definiert, daher schlägt der Verfasser vor, in der Gradientenforschung einen neuen Forschungsschwerpunkt zu setzen, da auf diesem Gebiet die Brunsschen Formeln erst einen Beginn darstellen.

Aus Abschnitt 2 erkennt man, dass die Höhenbezeichnungen und Reduktionen neu zu überdenken wären.

Literatur:

[E] B.Thüring: «Die Gravitation und die philosophischen Grundlagen der Physik.» Schriften zur Förderung der Beziehungen zwischen Philosophie und Einzelwissenschaften, Bd. 26.

[1] W.Embacher: «Die Bestimmung der orthometrischen Korrektur des geometrischen Nivellements aus Lotabweichungen und aus dem Störpotential T.» Ö. Z. f. V. 1980, Heft 1.

[2] W.Embacher: «Ein Versuch zur Bestimmung des gestörten Schwerevektors aus lokalen Gravimeternmessungen.» Z. f. V. 1980, Heft 6.

[3] W.Embacher: «Die Lotkrümmung und das Gravimeterversuchsfeld am Buschberg.» Ö. Z. f. V. 1965, Heft 1.

[4] K.Ledersteger: Astronom. und physikal. Geodäsie, Handbuch für Vermessungskunde (Jordan, Eggert, Kneissl) Band V 1969.

[5] W.Embacher: «Ergänzung zur Dichtebestimmung aus Schweremessungen.» Ö. Z. f. V. 1969, Heft 4.

[6] K.Mader: «Die orthometrische Schwerekorrektur des Präzisionsnivellements in den Hohen Tauern.» Ö. Z. f. V. Sonderheft 15, Wien 1954.

[7] K.Jung: «Schwerkraftverfahren in der angewandten Geophysik.» Akadem. Verlagsges. Leipzig 1961.

Adresse des Verfassers:
o. Prof. Dipl.-Ing. Dr. W. Embacher
Institut für Geodäsie der Universität
Innsbruck, Technikerstrasse 13
A-6020 Innsbruck

Der Topomat

H. Matthias

Mit «Topomat» wird die nächste Generation geodätischer Instrumente bezeichnet, die ausserordentliche Schritte in der Automation einzuleiten verspricht. Der Autor ist überzeugt, dass derartige Entwicklungen schon sehr bald bevorstehen.

Le nom «Topomat» désigne la prochaine génération d'instruments géodésiques qui promet de nous lancer d'un pas accéléré dans l'automation. L'auteur est convaincu que de tels développements se présenteront dans un avenir très proche.

1. Einleitung

Die beiden z. Z. am Lehrstuhl für Amtliche Vermessung und Ingenieurvermessung laufenden Forschungsprojekte, die der Instrumentenentwicklung gewidmet

sind, nähern sich dem Abschluss. Deshalb beschäftigen wir uns mit der Einleitung eines nächsten Vorhabens. Dabei sollte es um die sehr genaue Aufnahme von Sohlenprofilen von ste-

henden und fließenden Binnengewässern gehen. Bei der gedanklichen Auseinandersetzung mit möglichen Lösungen reifte die Konzeption des Topomaten. Ein derartiges System wird natürlich auch für Stückvermessungen aller Art, für die Ingenieur-Vermessung und in der Industrie von ausserordentlicher Bedeutung sein.

Eine Umschau in der Literatur, jedoch ohne Anspruch auf Vollständigkeit [1],

Institut für Geodäsie und Photogrammetrie, ETH-Hönggerberg, CH-8093 Zürich, Separata No. 26