

**Zeitschrift:** Vermessung, Photogrammetrie, Kulturtechnik : VPK = Mensuration, photogrammétrie, génie rural

**Herausgeber:** Schweizerischer Verein für Vermessung und Kulturtechnik (SVVK) = Société suisse des mensurations et améliorations foncières (SSMAF)

**Band:** 80 (1982)

**Heft:** 6

**Artikel:** Robuste Ähnlichkeitstransformation und Interpolation nach dem arithmetischen Mittel

**Autor:** Carosio, A.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-231166>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 01.04.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Robuste Ähnlichkeitstransformation und Interpolation nach dem arithmetischen Mittel

A. Carosio

Zwei Aufgaben werden in der geodätischen Praxis sehr oft mit Koordinatentransformationen gelöst: der Vergleich mehrerer unabhängig gemessener Netze mit gemeinsamen Punkten und die Einpassung neuer Netze in bestehende Fixpunktsysteme. Vor kurzem wurde das Programm TRANSINT im Bundesamt für Landestopographie entwickelt, das eine Lösung für die Ähnlichkeitstransformation mit robuster Ausgleichung enthält, sowie ein Verfahren für die Interpolation nach dem arithmetischen Mittel. Der vorliegende Bericht beschreibt die mathematischen Grundlagen beider Aufgaben und weist Angaben über die Anwendung der Computerprogramme auf.

*Dans les applications pratiques de la géodésie, il y a deux problèmes qui sont résolus très souvent par transformation de coordonnées: la comparaison de réseaux géodésiques indépendants avec points communs et l'intégration de nouveaux réseaux dans un système global préexistant. L'Office fédéral de topographie a développé récemment le programme TRANSINT qui contient une solution pour la transformation de Helmert par compensation robuste et un procédé pour l'interpolation selon la moyenne arithmétique. Le présent travail décrit les modèles mathématiques et donne des indications pour l'utilisation du logiciel.*

## 1. Einführung

In der angewandten Geodäsie wird man sehr oft mit Problemen konfrontiert, die mathematisch mit einfachen oder komplexen Koordinatentransformationen gelöst werden können. Zwei Aufgaben treten besonders oft in Erscheinung: der Vergleich zweier unabhängig gemessener Netze und die Einpassung eines neuen Netzes in ein bestehendes Fixpunktsystem.

### 1.1 Der Vergleich geodätischer Netze

In zwei verschiedenen Koordinatensystemen (global und lokal) werden ganz unabhängig die Koordinaten der gleichen Punkte bestimmt ( $Y_i, X_i$  und  $y_i, x_i$ ), und nun möchte man feststellen, ob tatsächlich die Werte in den beiden Systemen zu den gleichen Punkten gehören und wie gross die eventuellen gegenseitigen Abweichungen sind. Zur Lösung solcher Aufgaben werden in den meisten Fällen die Koordinaten des lokalen Systems ähnlich transformiert (z. B. durch Helmert-Transformation):

$$\begin{aligned} y' &= y_0 + m \cdot \cos \omega \cdot y + m \cdot \sin \omega \cdot x \\ x' &= x_0 - m \cdot \sin \omega \cdot y + m \cdot \cos \omega \cdot x \end{aligned} \quad (1)$$

Die unbekanntenen Transformationsparameter werden mit einer Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt, damit die kleinstmögliche Summe der Quadrate der Koordinatendifferenzen zwischen beiden Systemen entsteht. Die Koordinatenverbesserungen

$$\begin{aligned} DY &= Y - y' \\ DX &= X - x' \end{aligned} \quad (2)$$

geben dann Hinweise auf die gegenseitigen Abweichungen der Koordinaten der beiden Systeme.

### 1.2 Die Einpassung eines Netzes in bestehende Fixpunkte

Diese zweite Aufgabenstellung ist z. B. in [2] beschrieben: Gegeben sind zwei Systeme, die die gleichen Punkte enthalten. Im ersten System (globales System) sind nur die Koordinaten einiger Punkte (Passpunkte) bekannt, während im zweiten System (lokales System) die Koordinaten aller Punkte vorliegen. Gesucht sind die Koordinaten aller Punkte im globalen System.

Für die Lösung des Problems wird eine geeignete mathematische Abbildung (Interpolationsfunktion) zwischen den Koordinaten im lokalen System und jenen im globalen System benötigt. Nur selten kann eine solche Abbildung eine einfache geometrische Transformation (Translation, Rotation) sein, da in den meisten Fällen globale und lokale Koordinaten verschiedene Ungenauigkeiten zufälliger und systematischer Natur aufweisen.

Für die Wahl einer geeigneten Interpolationsfunktion müssen die funktionalen und statistischen Eigenschaften der vorhandenen Koordinaten (das mathematische Modell) genügend genau bekannt sein. Je nach Modell ist die eine, die andere oder überhaupt keine Interpolationsfunktion zweckmässig.

Es ist daher für diese Aufgabe nicht möglich, eine allgemeine Lösung für alle geodätischen Anwendungen zu finden. In jedem einzelnen Fall muss überprüft werden, welches Interpolationsverfahren sich am besten eignet.

Die häufigste Anwendung in der Landestriangulation ist die Einpassung von zwangsfrei berechneten Netzen in ein bestehendes übergeordnetes Fixpunktsystem. Die Eigenart dieser Applikation liegt in der Tatsache, dass das lokale System, welches verändert werden darf, aus einer modernen, sehr guten Triangulation stammt (mittlerer Fehler der Punkte ca. 1–2 cm). Das globale System, das gegeben ist und vor allem aus wirtschaftlichen Gründen nicht modifiziert wird, enthält hingegen oft Fehler, die wesentlich grösser sind als die Ungenauigkeit der lokalen Punkte. Diese Fehler können mit Hilfe des lokalen Netzes genau bestimmt werden und gelten daher als fest und bekannt. Sie sind also keine zufälligen Fehler, sondern Grössen mit funktionalem Charakter.

### 1.3 Praktische Lösung

Zur Lösung beider Aufgaben, der Ähnlichkeitstransformation und der Interpolation von neuen Triangulationsnetzen in bestehende Fixpunktsysteme, wurde im Bundesamt für Landestopographie das Computerprogramm TRANSINT entwickelt, das mit geringem Aufwand zu den gewünschten Resultaten führt. Im folgenden wird über das mathematische Modell und über die möglichen Anwendungen in der Praxis berichtet.

## 2. Robuste Ähnlichkeitstransformation

### 2.1 Allgemeines

Der Vergleich von Triangulationsnetzen mittels Ähnlichkeitstransformation ist ein klassisches und häufig verwendetes Verfahren in der angewandten Geodäsie.

Zur Veranschaulichung können folgende mögliche Anwendungen dienen:

– Beispiel 1

Nach der Messung eines neuen Operates 4. Ordnung wurden die Beobachtungen in einem zwangsfreien Netz ausgeglichen, um die innere Genauigkeit zu prüfen. Danach möchte man durch eine Ähnlichkeitstransformation die Übereinstimmung zwischen der neuen Triangulation und dem übergeordneten Fixpunktsystem kontrollieren.

– Beispiel 2

Bei Deformationsmessungen möchte man die Koordinaten der Fixpunkte der Ausgangsmessung mit denjenigen einer Wiederholungsmessung

vergleichen. Das Netz der Fixpunkte wird für beide Epochen zwangsfrei ausgeglichen und dann das neuere Netz in das ältere ähnlich transformiert.

Bei beiden Anwendungen hat die Transformation folgende Eigenschaften:

- Die Ähnlichkeitstransformation hat 2, 3 oder 4 Parameter (Translation, Translation-Rotation, Helmert-Transformation).
- Die Transformationsparameter müssen so bestimmt werden, dass die transformierten Lokalkoordinaten so gut wie möglich in das globale Koordinatensystem passen.
- Die Beobachtungen der Ausgleichung sind die Globalkoordinaten (alte Koordinaten) der Punkte (Passpunkte), die in den beiden Netzen auftreten (pro Punkt Y und X, d. h. 2 Beobachtungen). Die Passpunkte sind in der Regel zahlreich (10 bis 100 und mehr), so dass die Anzahl überschüssiger Beobachtungen gross ist.
- Vor allem in grossen Netzen wird vermutet, dass die Lokalkoordinaten (neue Koordinaten) einiger weniger Punkte aus irgendeinem Grund von den globalen (alten) abweichen. Ziel der Analyse ist in diesen Fällen die Identifikation solcher Punkte.

## 2.2 Das mathematische Modell

### 2.2.1 Ähnlichkeitstransformation

Die Ähnlichkeitstransformation kann, wie bekannt, mit den folgenden Formeln berechnet werden:

$$\begin{aligned} y' &= y_0 + m \cdot \cos \omega \cdot y + m \cdot \sin \omega \cdot x \\ x' &= x_0 - m \cdot \sin \omega \cdot y + m \cdot \cos \omega \cdot x \end{aligned} \quad (3)$$

und daher, wenn die Transformationsparameter mit einer Ausgleichung nach kleinsten Quadraten gesucht werden, sind die Beobachtungsgleichungen:

$$\begin{aligned} Y + v_y &= y_0 + m \cdot \cos \omega \cdot y + m \cdot \sin \omega \cdot x \\ X + v_x &= x_0 - m \cdot \sin \omega \cdot y + m \cdot \cos \omega \cdot x \end{aligned} \quad (4)$$

Wenn alle 4 Parameter ( $y_0$ ,  $x_0$ ,  $m$ ,  $\omega$ ) unbekannt sind (Helmert-Transformation) oder wenn nur  $y_0$  und  $x_0$  zu finden sind (d. h.  $m = 1$  und  $\omega = 0$ , Translation), können die Beobachtungsgleichungen, evtl. durch geeignete Substitutionen, in Linearform geschrieben werden. Hingegen sind, wenn  $m = 1$  eingesetzt wird und  $y_0$ ,  $x_0$  und  $\omega$  als Unbekannte auftreten, die Beobachtungsgleichungen keine linearen Funktionen mehr; man kann sie nur in einem kleinen Intervall um die gesuchte Lösung linearisieren. Da für die Praxis alle Varianten von Bedeutung sind, wurde für die Programmierung die allgemeinere Lösung mit den nicht-linearen Beobachtungsgleichungen (4) gewählt: Die Beobachtungsgleichungen werden vor jeder Iteration

durch numerische Differentiation um den Näherungswert linearisiert. Damit kann der Programmbenutzer jede beliebige Variante mit 2, 3 oder 4 Parametern wählen.

### 2.2.2 Robuste Transformation

Da der eine oder andere Passpunkt möglicherweise keine gut übereinstimmenden Koordinaten in beiden Systemen hat, schien es angebracht, die Transformationsparameter mit einer «robusten Ausgleichung» zu ermitteln, welche wirklichkeitsnahe Resultate liefert, auch wenn sich unter den Messungen noch einige (wenige) grobe Fehler befinden. Die theoretischen Grundlagen dafür wurden von P. J. Huber erarbeitet und in verschiedenen Publikationen veröffentlicht [7, 8, 9]. Ein Lösungsansatz für geodätische Anwendungen bei dem Gauss-Markov-Modell (vermittelnde Ausgleichung) ist in [1] beschrieben. Hier wird nur das Grundprinzip der robusten Ausgleichung wiederholt: Es seien

$$\begin{aligned} v_i &= a_i x_0 + b_i y_0 + \dots + L_i \\ i &= 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (5)$$

die Verbesserungsgleichungen, die durch Linearisierung der Beobachtungsgleichungen entstanden sind.

Die Unbekannten ( $x$ ,  $y$ ,  $z$ , ...) werden so bestimmt, damit

$$\sum \rho(v) = \min \quad (6)$$

Die Funktion  $\rho(v)$  ist für die klassische Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate wie bekannt

$$\rho(v) = v^2 \quad (7)$$

Die Unbekannten werden so gewählt, dass die Summe der Quadrate der Verbesserungen minimal wird. Wenn grobe Fehler (im behandelten Fall Koordinatenunstimmigkeiten) vorhanden sind, führt die klassische Ausgleichung sehr rasch zu unbrauchbaren Unbekannten.

Bei der robusten Ausgleichung wird für die Bedingung

$$\sum \rho(v) = \min \quad (8)$$

eine andere Funktion  $\rho(v)$  gewählt, damit die Unbekannten von eventuellen groben Fehlern weniger beeinflusst werden. Gemäss einem Vorschlag von P. J. Huber

wurde folgende Funktion für das Programm TRANSINT verwendet

$$\begin{aligned} \rho(v_i) &= \frac{1}{2} v_i^2 \\ &\text{für } |v_i| < k \cdot m_i \\ &= k \cdot m_i \cdot |v_i| - \frac{1}{2} (k \cdot m_i)^2 \\ &\text{für } |v_i| \geq k \cdot m_i \end{aligned} \quad (9)$$

wo  $k$  eine Konstante und  $m_i$  der mittlere Fehler der entsprechenden Beobachtung sind. Die Konstante  $k$  kann im Programm frei gewählt werden; für übliche Anwendungen sind  $k$ -Werte zwischen 2 und 3 zweckmässig. Für  $k \rightarrow \infty$  erhält man die gewöhnliche Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate (das Programm berechnet diese Variante, wenn  $k = 0$  eingesetzt wird).

Mehrere Versuche mit der robusten Ausgleichung in verschiedenen geodätischen Applikationen sind in [16] beschrieben.

### 2.2.3 Zuverlässigkeitsbetrachtungen

Die Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate, die für die Bestimmung der Transformationsparameter benötigt wird, ist in der Regel sehr einfach, und die empirische Beurteilung der Passpunktconfiguration sollte normalerweise keine Schwierigkeiten bereiten. Trotzdem schien es angebracht, ein numerisches Kriterium vorzusehen, um die Zuverlässigkeit nachzuweisen. Bei der Verwendung der robusten Ausgleichung werden die Zuverlässigkeitsbetrachtungen weniger einfach, und ein numerisches Verfahren ist dann sehr vorteilhaft.

Die gewählte Methode ist die Bestimmung des Koeffizienten der «geometrischen Zuverlässigkeit» für jede Beobachtung der Ausgleichung, d. h. im vorliegenden Fall wird für jede Globalkoordinate:

$$GZ_i = \frac{q_{vv}^{(ii)}}{q_{11}^{(ii)}}$$

berechnet, wo  $q_{vv}^{(ii)}$  und  $q_{11}^{(ii)}$  die  $i$ -ten Diagonalelemente der Kofaktorenmatrizen der Verbesserungen und der Beobachtungen sind (für die Berechnung siehe z. B. [13]).  $GZ$  ist ein Mass für den Überbestimmungsgrad der gemessenen Grössen im Netz und erlaubt den Vergleich mit bekannten einfachen Messanordnungen. Hier einige Beispiele:

GZ	Beispiel
0,00	Messung ohne Überbestimmung
0,33	Drei gemessene Winkel in einem Dreieck (1 Freiheitsgrad)
0,50	Doppelmessung (2 unabhängige Bestimmungen der gleichen Grösse)
0,67	Dreifache Messung (3 unabhängige Bestimmungen der gleichen Grösse)
1,00	Totale Überbestimmung des Netzes (Messung einer Grösse, die schon «unendlich genau» bekannt ist)

Für die Berechnung von GZ bei robusten Transformationen wurde die Näherung verwendet, wie sie in [16] empfohlen wird. Die daraus hervorgegangenen GZ-Werte sind dann als Grenzwerte zu verstehen, d. h. die entsprechende Beobachtung ist mindestens so gut vom Netz überbestimmt, wie der berechnete Koeffizient der geometrischen Zuverlässigkeit angibt.

### 2.3 Einsatz der robusten Ähnlichkeitstransformation

Die robuste Transformation soll zum Einsatz kommen, wenn man vermutet, dass nicht alle Passpunkte fehlerfrei sind, und wenn man schnell brauchbare Resultate haben möchte. Für geodätische Anwendungen sollte dann der Parameter  $k$  der robusten Ausgleichung zwischen 2,0 und 3,0 gewählt werden. Kleine  $k$ -Werte stärken die Unempfindlichkeit der Ausgleichung gegen grobe Fehler, erhöhen aber die Gefahr, dass die Berechnung zu einer singulären Matrix führt, wenn zu viele Beobachtungen von den ausgeglichenen Werten stark abweichen.

Das folgende Beispiel aus der Deformationsmessung der Staumauer Rempen zeigt eine mögliche Anwendung der robusten Transformation. Aus dem Vergleich mit der gewöhnlichen Helmert-Transformation lassen sich die Vorteile der robusten Version bei Netzvergleichen sehr gut ersehen.

Die Staumauer Rempen ist die kleine Sperre eines Ausgleichsbeckens des Kraftwerkes Wägital. Diese ältere Mauer wurde in den Jahren zwischen 1973 und 1979 geodätisch neu untersucht, damit ein neues Deformationsüberwachungsnetz entworfen werden konnte. Ein besonderes Problem stellte dabei die grosse Unstabilität der Talflanken dar. Ein Vergleich der Pfeilerbestimmungen in den Jahren 1973 und 1979 zeigt zum Beispiel deutliche Zwänge.

#### a) Die gewöhnliche Helmert-Transformation

Die Einpassung der Koordinaten von 1979 in die Koordinaten 1973 durch eine 4-Parameter-Ähnlichkeitstransformation (Helmert-Transformation) führt zu den folgenden Restfehlern, wenn alle 4 Pfeiler als Passpunkte eingesetzt werden:

Ähnlichkeitstransformation  
Passpunkte und Verbesserungen

Passpunkt	VY (mm)	VX (mm)
PF,1	1,1	2,7
PF,2	3,0	-1,0
PF,3	-0,2	-0,8
PF,4	-3,9	-0,9

Die graphisch dargestellten Restfehler geben dann das folgende Bild und können mit einem einfach berechneten Konfidenzintervall ( $2 \cdot m_{\text{PF}}$ ) verglichen werden:

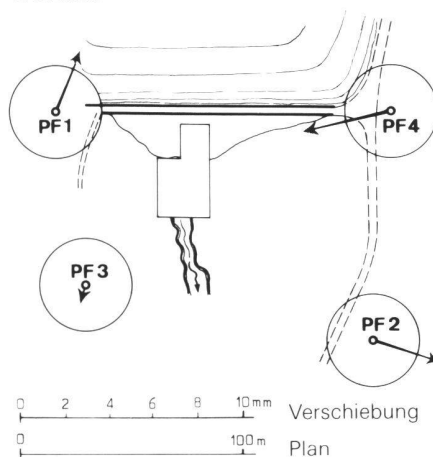


Abb. 1 Restfehler bei der üblichen Helmert-Transformation

Es ist leicht feststellbar, dass die 2 Netze (1973 und 1979) nicht gut zusammenpassen. Es ist aber nicht sofort ersichtlich, ob nur ein Punkt eine starke Abweichung aufweist oder ob mehrere Punkte ihre Lage geändert haben.

#### b) Die robuste Transformation

Die gleiche Transformation mit 4 Parametern wurde dann robust mit  $k = 2,0$  berechnet, um die Wirkung auf die Resultate zu zeigen. Die robuste Transformation führt in einem Rechenschritt zu folgenden Restfehlern:

Ähnlichkeitstransformation Rempen  
robuste Transformation (mit  $k = 2,0$ )  
Passpunkte und Verbesserungen

Passpunkt	VY (mm)	VX (mm)
PF,1	0,6	1,8
PF,2	1,7	-0,0
PF,3	-0,3	-0,9
PF,4	-5,9	-0,9

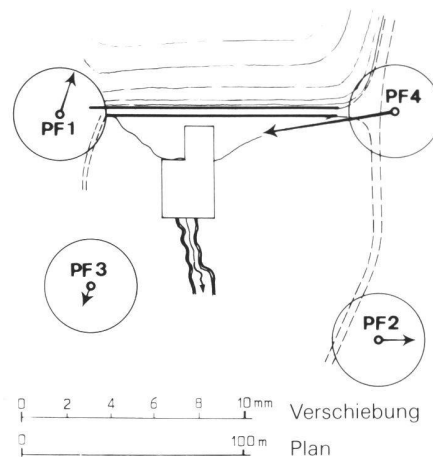


Abb. 2 Restfehler bei der robusten Transformation ( $k = 2$ )

Das graphische Bild zeigt, dass die Lageänderung von Pfeiler 4 sehr wahrscheinlich die Ursache der Unstimmigkeit ist.

Der Einsatz in grösseren Netzen mit mehreren Passpunkten und im Verhältnis weniger häufigen Abweichungen (z. B. nur 10% der Passpunkte falsch) führt zu noch besseren und leichter interpretierbaren Resultaten.

### 3. Interpolation nach dem arithmetischen Mittel

#### 3.1 Allgemeines

Die Landestriangulation wird etappenweise aufgebaut: Neue Netze werden in die bestehende Triangulation höherer Ordnung eingeführt und müssen mit den älteren Nachbaroperaten verbunden werden. Das Problem der Anpassung wurde bis jetzt durch Einzwängen des Netzes bei der Ausgleichung gelöst: Die Koordinaten aller Punkte der übergeordneten Netze wurden als fest betrachtet. Diese Lösung hat sich in der Praxis durchgesetzt, da sie weniger Rechenaufwand erfordert als alle Alternativmöglichkeiten. Im Zeitalter des Computers wird der Rechenaufwand immer unbedeutender, so dass die Suche nach besseren Wegen hochaktuell ist.

Das Einzwängen der Netze führt zu befriedigenden Resultaten, wenn die als fest angenommenen Punkte tatsächlich mit den Messungen der Ausgleichung übereinstimmen oder beim Vorhandensein einiger Zwänge, wenn das eingezwängte Netz sehr homogen ist und somit eine regelmässige Verteilung der Widersprüche entsteht. Da in der Praxis diese Bedingungen nicht leicht einzuhalten sind, haben explizite Interpolationsverfahren im letzten Jahrzehnt an Bedeutung gewonnen, weil sie die Restzwänge unabhängig vom Netzaufbau regelmässig verteilen [2].

#### 3.2 Anwendungen in der Landestriangulation

Die häufigste Applikation ist die Einpassung neuer Triangulationsnetze in das bestehende Fixpunktsystem. Das neue Netz (lokales System) ist mit den heutigen genauen Messgeräten gemessen und zwangsfrei ausgeglichen, die Ungenauigkeiten betragen daher wenige (1–2) cm. Die Fixpunkte (globales System) hingegen sind eine Erbschaft der Vergangenheit und enthalten oft örtliche systematische Fehler (im Dezimeterbereich); sie dürfen aber oft aus organisatorischen und wirtschaftlichen Gründen nicht geändert werden.

Die Fixpunktfehler sind fest und bekannt, da sie mit Hilfe des praktisch fehlerfreien neuen Netzes ermittelt werden können. Man darf sie daher nicht

als stochastische Größen interpretieren.

Für die Einpassung des lokalen Netzes in das globale spielen dann nur die funktionalen Eigenschaften der Interpolationsmethode eine Rolle. Die Interpolationsmethode sollte die folgenden Bedingungen einhalten:

- die interpolierten Passpunkte müssen die Sollkoordinaten (Globalkoordinaten) behalten
- die Zwischenpunkte müssen möglichst homogen und ohne Überkorrekturen interpoliert werden
- die Berechnung muss möglichst schnell und preisgünstig durchgeführt werden können
- die Modellparameter sollten eine möglichst anschauliche Bedeutung haben.

Die meisten vorhandenen Interpolationsprogramme halten die obenerwähnten Bedingungen nicht ein, da sie von einer eher statistischen Modellvorstellung ausgehen (s.z.B. [4, 6, 10, 11, 14]).

Das Bundesamt für Landestopographie hat daher für den Einsatz in der Landes-triangulation ein einfaches Verfahren entwickelt, die sogenannte Interpolation nach dem arithmetischen Mittel, die die gewünschten Eigenschaften aufweist. Dieses Verfahren ist im Programm TRANSINT verwirklicht und wird bereits in der Praxis eingesetzt.

### 3.3 Das mathematische Modell

#### 3.3.1 Das Problem

Wenn ein neues Netz mit zahlreichen Punkten zwangsfrei ausgeglichen wird, erhalten die Netzpunkte im Koordinatensystem der Berechnung (lokales System) neue Koordinaten. Um das neue Netz in eine bestehende Triangulation einzupassen, werden geeignete Punkte festgelegt, von denen man die Koordinaten in der bestehenden Triangulation (globales System) bereits kennt und, meist aus wirtschaftlichen Gründen, unverändert behalten will. Diese Punkte werden Passpunkte genannt. Da für die Passpunkte lokale und globale Koordinaten vorliegen, sind die entsprechenden Inkremente DX und DY, für welche

$$\begin{aligned} Y_{10k} + DY &= Y_{g1} \\ X_{10k} + DX &= X_{g1} \end{aligned} \quad (10)$$

gilt, mit den folgenden Formeln direkt berechenbar:

$$\begin{aligned} DY &= Y_{g1} - Y_{10k} \\ DX &= X_{g1} - X_{10k} \end{aligned} \quad (11)$$

Die Interpolationsfunktion berechnet darauf von den Inkrementen der Pass-

punkte ausgehend passende Korrekturen DY, DX auch für die anderen Punkte des lokalen Netzes und liefert dann ihre gesuchten Globalkoordinaten.

#### 3.3.2 Die Wahl der Interpolationsfunktion

Man kann die Interpolationsfunktion für die vorgesehenen Applikationen weitgehend frei aufbauen, wie in Punkt 3.2 erklärt wurde. Nur die vier dort erwähnten Bedingungen sollen eingehalten werden. Es ist daher zweckmässig, mit ganz einfachen Funktionen zu beginnen, um dann durch sukzessive Verbesserungen zu einer voll befriedigenden Interpolationsfunktion zu gelangen.

Bereits das allgemeine arithmetische Mittel

$$\begin{aligned} DY_p &= \frac{\sum p_i DY_i}{\sum p_i} \\ DX_p &= \frac{\sum p_i DX_i}{\sum p_i} \end{aligned} \quad (12)$$

liefert bei einem geeigneten Gewichteinsatz, wie z. B.

$$p_i = \frac{1}{d_i^2} \quad (13)$$

gute Koordinaten für die interpolierten Punkte und befriedigt die gestellten Bedingungen, wenn die Passpunktdichte ungefähr konstant ist ( $d_i$  ist die Distanz zwischen Neupunkt und i-tem Passpunkt).

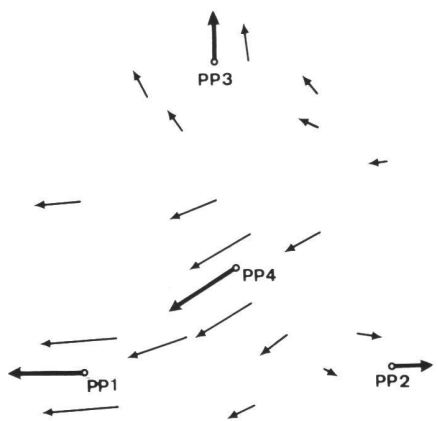


Abb. 3 Gegebene Inkremente für die Passpunkte und interpolierte Werte für die Zwischenpunkte

Das allgemeine arithmetische Mittel kann wie eine vermittelnde Ausgleichung in Matrizenform dargestellt werden:

$$\begin{aligned} DY_p &= (A^T P A)^{-1} \cdot A^T P DY \\ DX_p &= (A^T P A)^{-1} \cdot A^T P DX \end{aligned} \quad (14)$$

wo  $A^T = (1, 1, \dots, 1)$  ein Vektor mit Einheitskomponenten,

P die Diagonalmatrix der Gewichte und DY bzw. DX die Vektoren der Inkremente aller Passpunkte sind.

Ein Schönheitsfehler entsteht, wenn mehrere Passpunkte sich an einem Ort treffen (z.B. wenn mehrere Exzentren vorliegen). Diese mehrfachen Passpunkte würden dann ein Übergewicht bekommen und die Homogenität der Interpolation stören. Um dies auch zu berücksichtigen, kann man eine Korrelationsmatrix R zwischen den Passpunkten einführen:

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nn} \end{pmatrix} \quad (15)$$

Zur Berechnung der einzelnen Korrelationskoeffizienten  $r_{ij}$  wurden zahlreiche Netze untersucht, um eine geeignete Korrelationsfunktion zu bilden. Die folgende Formel hat sich als gute Näherung für die üblichen Applikationen erwiesen:

$$r_{ij} = 0.9 \cdot e^{-\ln(1.8)(d_{ij}/d_0)^2} \quad (16)$$

wobei  $d_{ij}$  die Distanz zwischen dem i-ten und j-ten Passpunkt und die Konstante  $d_0$  die Distanz zwischen zwei Passpunkten ist, für welche die Korrelation  $r=0,5$  gesetzt wird. Aus der Formel können die Werte der folgenden Tabelle berechnet werden, die das Variieren der Korrelation in Funktion der Distanz zeigen:

$d_{ij}/d_0$	$r_{ij}$
0	0,90
0,5	0,78
1	0,50
2	0,09
3	0,005
4	0,001

Da in Triangulationsnetzen mit Maschenweite =  $d_0$  in der Praxis festgestellt werden kann, dass die Werte der Tabelle eine recht gute Näherung für die Korrelation zwischen den ausgeglichenen Koordinaten darstellen, bekommt der Parameter  $d_0$  eine anschauliche Bedeutung. Er kann als mittlere Maschenweite der Netze angesehen werden, aus welchen die Passpunkte ursprünglich bestimmt wurden.

Selbstverständlich gilt diese Bedeutung nur unter der Voraussetzung, dass die Herkunftsnetze keine wesentlichen systematischen Fehler enthalten, was z. B. bei neuen Netzen der Fall ist. Bei der Interpolation von neuen Triangulationen in alten, systematisch verfälschten Fixpunktnetzen muss  $d_0$  einfach als Distanz zwischen den Passpunkten gel-



ten, bei welchen die Korrelation 0,5 ist. Sie muss empirisch durch die Betrachtung der graphischen Darstellung der Koordinatenänderungen der Passpunkte bestimmt werden.  $d_0$  wird dann so klein gewählt, dass  $d_0$  entfernte oder nähere Passpunkte tatsächlich sehr ähnliche Änderungsvektoren aufweisen. Ganz unterschiedliche Änderungsvektoren dürfen nur zwischen Passpunkten, die mehr als 2  $d_0$  voneinander entfernt sind, auftreten. Die Korrelationsmatrix ist nach der Festlegung von  $d_0$  bestimmt, und daraus berechnet man aus [17] die entsprechende vollständige Gewichtsmatrix:

$$P = P_d^{1/2} \cdot R^{-1} \cdot P_d^{1/2} \quad (17)$$

$P_d$  ist die Diagonalmatrix der Gewichte, die für das allgemeine arithmetische Mittel verwendet wurde.

Die Matrizenformeln des allgemeinen arithmetischen Mittels (14) können für diese allgemeinere Lösung unverändert übernommen werden:

$$\begin{aligned} DY_p &= (A^T P A)^{-1} \cdot A^T P DY \\ DX_p &= (A^T P A)^{-1} \cdot A^T P DX \end{aligned} \quad (18)$$

Zu bemerken ist nur, dass im vorliegenden Fall die Matrix  $P$  keine Diagonalmatrix mehr ist.

Die gesuchten Korrekturen für die interpolierten Punkte sind, wie aus der Formel (18) ersichtlich ist, lineare Funktionen der Koordinateninkremente der Passpunkte, d. h.:

$$\begin{aligned} DY_p &= c_1 \cdot dy_1 + c_2 \cdot dy_2 + \dots + c_n \cdot dy_n \\ DX_p &= c_1 \cdot dx_1 + c_2 \cdot dx_2 + \dots + c_n \cdot dx_n \end{aligned} \quad (19)$$

in jedem Fall mit  $\sum c_i = 1$

Die Koeffizienten  $c_i$  sind in der Regel, wie es auch sinnvoll ist, positiv und führen daher zu keinen Überkorrekturen. Nur in Spezialfällen, wenn man stark korrelierte Passpunkte sehr unterschiedlich gewichtet, werden einige  $c_i$  negativ. Um dies zu vermeiden, werden die dazugehörigen Passpunkte bei der Interpolation nicht berücksichtigt. Die übrigen  $c_i$  erhalten nach Neubildung der inversen Korrelationsmatrix und anschließender Neuberechnung, die gewünschten positiven Werte ( $c_i \geq 0$ ). So bleiben auch in extremen Fällen die geforderten funktionalen Eigenschaften der Interpolation erhalten.

### 3.4 Die numerische Lösung

Die numerische Lösung, die für die Programmierung gewählt wurde, ist relativ einfach, so dass hier nur in Stichworten die Reihenfolge der Operationen angegeben wird.

#### a) Nur einmal für die ganze Interpolation

- Bilden der Korrelationsmatrix gemäss Formel (16)
- Inversion der Korrelationsmatrix
- Bilden der Vektoren der Passpunktinkremente ( $DY$  und  $DX$ ) für  $Y$  und  $X$  getrennt aus Formel (10)

#### b) Für jeden zu interpolierenden Punkt

- Bilden des Gewichtsvektors  $P_d$  gemäss Formel (13)
- Berechnen des Vektors  $C$  aus

$$P = P_d^{1/2} \cdot R^{-1} \cdot P_d^{1/2}$$

und

$$c = (A^T P A)^{-1} \cdot A^T P$$

- Prüfen, ob kein  $c_i$  negativ ist. Wenn mindestens ein  $c_i$  negativ ist, wird für den Passpunkt, bei welchem  $c_i$  am kleinsten ist, das Gewicht auf Null gesetzt und die Inverse der Korrelationsmatrix durch einen Austauschschritt [15] entsprechend reduziert. Das Verfahren wird wiederholt, bis alle  $c_i$  die Bedingung  $c_i \geq 0$  erfüllen. Dann folgt die Berechnung von

$$DY_p = C^T \cdot DY \quad \text{und} \quad DX_p = C^T \cdot DX$$

## 4. Das Programm TRANSINT

Geometrische Transformationen und Interpolationen sind organisatorisch sehr ähnliche Verfahren, so dass es zweckmässig schien, beide Operationen in einem einzigen Programm zu kombinieren. Es wird so möglich sein, eine Ähnlichkeitstransformation oder eine Interpolation oder beide Berechnungen hintereinander einfach durch entsprechende Angaben in den Programmoptionen auszuführen.

Die genauen Angaben für die Programmbedienung sind der Benutzeranleitung zu entnehmen. Die Einfachheit des Modells erlaubt, die Anzahl erforderlicher Erklärungen auf ein Minimum zu reduzieren.

Gemeinsame Eingabedaten sind lediglich:

- das File der Globalkoordinaten (Passpunkte)
- das File der Lokalkoordinaten (Passpunkte und Neupunkte)
- die Liste der Passpunkte

Die Berechnung erfolgt dann vollautomatisch, und es wird ein File der transformierten oder interpolierten Punkte erzeugt zur Weiterverwendung in anderen Computerprogrammen. Ein Papierausdruck mit den notwendigen Angaben wird ebenfalls bereitgestellt.

Für die Ähnlichkeitstransformation sind zusätzlich einige Modellparameter anzugeben. Die wichtigsten:

- Anzahl Unbekannte (um zu wählen zwischen Translation, Translation-Rotation und Helmert-Transformation)

- Die Transformationsparameter, wenn man sie vorgeben will, sonst werden sie durch Ausgleichung berechnet (Normalfall)
- Der Parameter  $K$  für die robuste Ausgleichung (für  $K=0$  wird eine gewöhnliche Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate durchgeführt).

Für die Interpolation wird ein einziger Modellparameter benötigt: Die Netzmaschenweite  $d_0$  des globalen Netzes (für neue Netze 3. Ordnung ca. 3000–5000 m, für 4. Ordnung ca. 500–1000 m, für Polygonnetze 50–100 m usw.), welche bei der Bildung der Korrelationsmatrix verwendet wird (Formel 16).

#### Literatur

- [1] A. Carosio: Robuste Ausgleichung. VPK 11/79.
- [2] A. Carosio: Anwendung von Interpolationsverfahren in der Landestriangulation. VPK 10/80.
- [3] R. Conzett: Fehlertheorie und Ausgleichsrechnung. Institut für Geodäsie und Photogrammetrie, ETH Zürich 1976 (Vorlesung).
- [4] H. Engelhardt: Die Überführung der Soldner-Koordinaten in das Gauss-Krüger-Koordinatensystem. Karlsruhe 1978.
- [5] W. Grossmann: Grundzüge der Ausgleichsrechnung. Springer, Berlin 1969.
- [6] G. W. Hein, K. Lenze: Zur Genauigkeit und Wirtschaftlichkeit verschiedener Interpolations- und Prädiktionsmethoden. ZfV 11/79.
- [7] P. J. Huber: Robust Estimation of a Location Parameter. Ann. Math. Statist., 1964.
- [8] P. J. Huber: Robust Estimation. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete, 10/68.
- [9] P. J. Huber: Robust Regression: Asymptotics, conjectures and Monte Carlo, Ann. Math. Statist., 1/5, 1973.
- [10] K. Kraus: Interpolation nach kleinsten Quadraten in der Photogrammetrie. ZfV 9/70.
- [11] K. Kraus: Interpolation nach kleinsten Quadraten in der Photogrammetrie. Bildmessung und Luftbildwesen 1/72.
- [12] K. Kraus: QUINT Programmbeschreibung. Stuttgart 1972.
- [13] K. Linkwitz: Über die Systematik verschiedener Formeln der Ausgleichsrechnung. ZfV 5/60.
- [14] D. Schneider: QUINT Programmbeschreibung (Version L + T). Bulletin des RZ-Landestopographie Nr. 2, 1979.
- [15] E. Stiefel: Einführung in die numerische Mathematik. Teubner, Stuttgart 1963.
- [16] M. Walter: Compensation d'observations médiates par le méthode robuste. Institut für Geodäsie und Photogrammetrie, ETH Zürich 1980, Bericht Nr. 37.
- [17] H. Wolf: Ausgleichsrechnung. Dümmler, Bonn 1975.

Adresse des Verfassers:  
Dipl. Ing. A. Carosio  
Bundesamt für Landestopographie  
Dienststelle Datenverarbeitung  
CH-3084 Wabern