

**Zeitschrift:** Vermessung, Photogrammetrie, Kulturtechnik : VPK = Mensuration, photogrammétrie, génie rural

**Herausgeber:** Schweizerischer Verein für Vermessung und Kulturtechnik (SVVK) = Société suisse des mensurations et améliorations foncières (SSMAF)

**Band:** 85 (1987)

**Heft:** 3

**Artikel:** Zuverlässigkeitsbeschreibung bei der Partitionierung von Netzen

**Autor:** Hahn, M. / Jäger, R.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-233441>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 11.03.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Zuverlässigkeitsbeschreibung bei der Partitionierung von Netzen

M. Hahn, R. Jäger

**In Theorie und Anwendungen wird die Charakterisierung der äusseren Zuverlässigkeit bei der Beschränkung auf einen Koordinatensubvektor (Netzteil) in diesem Aufsatz behandelt. Eine Unterteilung des Koordinatenvektors kann beispielsweise vorgegeben sein, wenn ein Teil der Punkte ausschliesslich aus Hilfspunkten besteht und nur die Koordinaten der restlichen Punkte für eine weitere Verwendung von Bedeutung sind. Die Datumsunabhängigkeit des äusseren Zuverlässigkeitsmasses (Netzverzerrung, Einflussfaktor) bleibt auch bei der Partitionierung in Netzteile erhalten. An Beispielen aus Landes- und Ingenieurvermessung wollen wir die Auswirkungen einer solchen Partitionierung betrachten.**

*La théorie et des applications d'une séparation de la fiabilité externe se référant aux coordonnées principales de l'influence de la part des coordonnées de réparage sont présentées. Il est démontré que la fiabilité externe est indépendante du choix du système de référence en cas de cette séparation. Les effets de ce partage sont montrés par quelques exemples.*

### 1. Einleitung

Die Zuverlässigkeitsbeschreibung wird üblicherweise in die innere und äussere Zuverlässigkeit untergliedert. Erstere gibt ein beobachtungsbezogenes Mass zur Sensitivität gegenüber groben Fehlern oder allgemeinen Modellfehlern an, während letztere, die äussere Zuverlässigkeit, sich den Auswirkungen auf die geschätzten Parameter widmet.

Im ebenen geodätischen Netz umfassen die Parameter die ausgeglichenen Koordinaten sowie i.a. Orientierungsparameter für Richtungssätze und evtl. Massstabsfaktoren und Additionskonstanten für Streckengruppen. Lassen sich die Koordinaten weiter unterteilen, und zwar in einen Part, dem das eigentliche Interesse gilt, und einen zweiten Part, der nur Hilfskoordinaten enthält, so sollte sich das Mass der äusseren Zuverlässigkeit auf den erstgenannten Subvektor der Koordinaten beziehen. Ein solches Beispiel aus der Katasterpraxis wollen wir in Kapitel 3 diskutieren. Auch in der Ingenieurvermessung werden immer wieder Fälle auftreten, in denen Hilfsstandpunkte (z.B. Exzentren) oder Hilfszielpunkte (z.B. Fernziele zur Stabilisierung der Geometrie) eingeführt werden müssen, deren ausgeglichene Koordinaten für den Auftraggeber keine weitere Bedeutung haben. Auch hier ist es sinnvoll, das Mass der äusseren Zuverlässigkeit, die sog. Netzverzerrung oder Netzverformung, auf den ausschliesslich interessierenden Subvektor der Koordinaten zu beziehen, durch den nur ein Netzteil repräsentiert wird. Das auf alle Parameter oder auch alle Koordinaten bezogene Mass gibt im allgemei-

nen eine zu pessimistische Abschätzung an.

### 2. Grundlagen

Auf der Basis der Hypothesenformulierung lassen sich Testgrössen entwickeln, die sich zur Prüfung der Konsistenz zwischen Messdaten und gewähltem Auswertemodell eignen. Abweichungen vom Modell, und hierbei wollen wir speziell grobe Fehler ansprechen, lassen sich durch Hinzufügen von Parametern in einer einfachen Alternativhypothese modellieren und durch die sog. Ausreissertests einer statistischen Prüfung unterwerfen. Der verwendete Ausreissertest lässt die Frage nach der Sensitivität der Teststatistik bezüglich der Aufdeckbarkeit eines groben Fehlers aufkommen. Ein hierfür charakteristisches Mass ist der Grenzwert  $\nabla_0 l_i$ , der sich wie alle Zuverlässigkeitsmasse bereits in der Planungsphase ermitteln lässt und angibt, wie gross ein Fehler in der Beobachtung  $l_i$  mindestens sein muss, um mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit (Güte  $\beta$ ) in der statistischen Prüfung erkannt zu werden (innere Zuverlässigkeit).

Unser eigentliches Interesse in diesem Artikel gilt der äusseren Zuverlässigkeit. Formulieren wir wie üblich – im Modell der vermittelnden Ausgleichung – den linearen (linearisierten) Zusammenhang zwischen Beobachtungen  $l$ , Verbesserungen  $v$  und den zu schätzenden Unbekannten  $x$

$$l+v=A\hat{x} \quad (2.1)$$

mit der ebenfalls bekannt vorausgesetzten Kovarianzmatrix der unkorrelierten

Beobachtungen  $C=\sigma^2P^{-1}$ , so ergeben sich nach der Methode der kleinsten Quadrate die Schätzungen für

$$\begin{aligned} \text{die Parameter } \hat{x} &= Q_x A^T P l \\ \text{die Verbesserungen } v &= -Q_v P l \end{aligned} \quad (2.2)$$

Die Kofaktorenmatrix  $Q_x$  erhält man als generalisierte Inverse der Normalgleichungsmatrix  $N=A^T P A$ , wenn die Designmatrix  $A$  einen Rangdefekt aufweist, bzw. als reguläre Inverse bei vollem Spaltenrang von  $A$ . Die aus dem Produkt  $Q_v P$  resultierende Matrix

$$Q_v P = E - A Q_x A^T P \quad (2.3)$$

ist auf der Hauptdiagonalen mit den Redundanzanteilen  $r_i$  besetzt. Auch ohne die statistische Hypothesenprüfung zu bemühen, lässt sich aus (2.2) sofort ersehen, dass ein grober Fehler  $\nabla l_i$  in der  $i$ -ten Beobachtung eine Nichtzentralität der Verbesserung

$$\nabla v_i = -r_i \nabla l_i \quad (2.4a)$$

und eine Nichtzentralität  $\delta$  der Testgrössen  $v_i/\sigma_{v_i}$  des data-snoopings

$$\nabla v_i/\sigma_{v_i} = -\sqrt{r_i} \nabla l_i/\sigma_{l_i} = -\delta \quad (2.4b)$$

hervorruft. Der Nichtzentralitätsparameter  $\delta = \delta(\alpha, \beta)$  ist eine Funktion der Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha$  und der Güte  $\beta$  des Tests und liegt fest ( $\delta = \delta_0$ ), wenn  $\alpha$  und  $\beta$  vorgegeben werden (siehe hierzu das DVW-Sonderheft «Beurteilung geodätischer Netze», 1986). Aus der Auflösung von (2.4b) folgt der Grenzwert  $\nabla_0 l_i$  (Mass der inneren Zuverlässigkeit bei  $\delta = \delta_0$ ; ein Fehler, der den Grenzwert überschreitet, kann durch den Test (data-snooping) mit mindestens  $\beta$ -iger Wahrscheinlichkeit aufgedeckt werden).

Die Verfälschung der Parameter  $\hat{x}$  und beliebiger Funktionen  $f(\hat{x})$  von  $\hat{x}$  stehen, worauf schon hingewiesen wurde, im Blickpunkt der äusseren Zuverlässigkeit. Partitionieren wir die Unbekannten  $x$  in die zwei Teilgruppen  $x_1$  und  $x_2$ , so lauten die Beobachtungsgleichungen (2.1)

$$l+v=A_1 \hat{x}_1 + A_2 \hat{x}_2 \quad (2.5)$$

In den entsprechend partitionierten Normalgleichungen

$$\begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{12}^T & N_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1^T P l \\ A_2^T P l \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

können wir die Unbekannten  $\hat{x}_2$  eliminieren. In  $\hat{x}_2$  seien die Hilfskoordinaten und die Zusatzparameter (Orientierung etc.) zusammengefasst, die uns hauptsächlich interessierenden Koordinaten in  $\hat{x}_1$ . Wir setzen voraus, dass in  $\hat{x}_1$  mindestens  $d$  Netzkoordinaten enthalten sind, wobei  $d$  den Datumsdefekt des Netzes bezeichnet. Dadurch ist garantiert, dass die Submatrix  $N_{22}$  regulär invertierbar ist (Konfigurationsdefekte schliessen wir aus).

Durch Elimination von  $\hat{x}_2$  ergibt sich aus (2.6)

$$(N_{11} - N_{12} N_{22}^{-1} N_{21}^T) \hat{x}_1 = (A_1^T - N_{12} N_{22}^{-1} A_2^T) P_1$$

bzw.  $\bar{N}_{11} \hat{x}_1 = \bar{A}_1^T P_1$  (2.7)

wobei die reduzierte Submatrix  $\bar{N}_{11}$  sich auch mit der reduzierten Designmatrix  $\bar{A}_1$  gemäss

$$\bar{N}_{11} = \bar{A}_1^T P \bar{A}_1$$

berechnen lässt. Die reduzierte Matrix  $\bar{N}_{11}$  ist mit dem selben Defekt behaftet wie die ursprüngliche Normalgleichungsmatrix  $N$ , d.h. bei der Reduktion bleibt der Rangabfall erhalten (siehe Illner, I., 1985, S. 12). Geben wir uns ein Datum durch Formulierung einer generalisierten Inversen

$$Q_{x11} = \bar{N}_{11}^-$$

vor, so bezieht sich auch der Subvektor

$$\hat{x}_1 = Q_{x11} \bar{A}_1^T P_1$$

auf dieses Datum. Ein Fehler der Grösse  $\nabla_{0i}$  in der  $i$ -ten Beobachtung führt zur Verfälschung der ausschliesslich auf den Unbekanntenteil  $\hat{x}_1$  bezogenen linearen (bzw. linearisierten) Funktion  $f(\hat{x}_1) = c^T \hat{x}_1$  gemäss

$$\nabla_{0i} f(\hat{x}_1) = c^T Q_{x11} \bar{a}_{1i} p_i \nabla_{0i} \quad (2.8)$$

Mit  $\bar{a}_{1i}$  wird hierbei die  $i$ -te Zeile der reduzierten Designmatrix  $\bar{A}_1$  bezeichnet. Zur Charakterisierung der äusseren Zuverlässigkeit ist es üblich, die aufgrund der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung gültige Abschätzung

$$\nabla_{0i} f(\hat{x}_1) \leq \sqrt{c^T Q_{x11} c} \sqrt{\bar{a}_{1i}^T Q_{x11} \bar{a}_{1i}} p_i \nabla_{0i}$$

vorzunehmen, in der der 1. Wurzelausdruck bis auf  $\sigma$  a priori gleich der Standardabweichung  $\sigma_f$  der Funktion ist. Für jede beliebige Funktion der Unbekanntengruppe  $\hat{x}_1$  kann die maximale Verfälschung durch einen nicht aufdeckbaren groben Fehlers  $\nabla_{0i}$  gemäss

$$\nabla_{0i} f(\hat{x}_1) \leq \sigma_f \bar{\delta}_{0i}$$

mit (2.9a,b)

$$\bar{\delta}_{0i} = \sqrt{\bar{a}_{1i}^T Q_{x11} \bar{a}_{1i}} \cdot \nabla_{0i} / \sigma_{ii} = \sqrt{u_{1i}} \cdot \nabla_{0i} / \sigma_{ii}$$

nach oben abgeschätzt werden. Das Mass der äusseren Zuverlässigkeit  $\bar{\delta}_{0i}$ , als Einflussfaktor oder Netzverzerrung bezeichnet, wäre in unserem Fall besser als Teilnetzverzerrung zu bezeichnen, da der Subvektor  $\hat{x}_1$  nur ein Teilnetz repräsentiert.

Der Faktor  $\bar{\delta}_{0i}$  ist eine datumsunabhängige Grösse, denn

$$\bar{A}_1 \bar{N}_{11} \bar{A}_1^T$$

ist invariant gegenüber der Wahl der generalisierten Inversen  $\bar{N}_{11}^-$  (Koch, 1980, S. 50). Es spielt also keine Rolle, ob  $Q_{x11}$  aus einer Datumsgebung im Teilnetz durch Festhalten von  $d$  Koordinaten oder aus einer Spurminimierung über  $\hat{x}_1$  hervorgegangen ist, nur um zwei Beispiele

zu nennen.  $Q_{x11}$  kann aber auch aus  $Q_x = N^-$  herausgegriffen sein. Beispielsweise könnte das Datum von  $Q_x$  auch ausserhalb des durch  $\hat{x}_1$  definierten Teilnetzes liegen. Zum Beweis transformieren wir die Kofaktorenmatrix  $Q_x$  mittels S-Transformation in ein anderes Datum. Es gilt die Identität

$$(\bar{A}_1 \ 0) S Q_x S^T (\bar{A}_1 \ 0)^T = \bar{A}_1 Q_{x11} \bar{A}_1^T$$

da  $(\bar{A}_1 \ 0) S = (\bar{A}_1 \ 0)$

ist (siehe Illner, I., 1985); d.h. die Teilnetzverzerrung ist invariant bezüglich beliebiger Datumsgebung von  $Q_x$ . Unter der Voraussetzung der Regularität von  $N_{22}$  gilt die Beziehung

$$\bar{A}_1 Q_{x11} \bar{A}_1^T = A Q_x A^T - A_2 N_{22}^{-1} A_2^T, \quad (2.10)$$

die einfach abzuleiten ist, wenn man die Beziehungen zwischen den Submatrizen von  $N$  und  $Q_x$  (siehe z.B. Schwintzer, 1982, S. 512) nützt. Das  $i$ -te Diagonalelement dieses Matrixproduktes benötigen wir für die Teilnetzverzerrung, so dass folgt

$$\bar{\delta}_{0i} = \sqrt{a_{1i}^T Q_x a_{1i} - a_{2i}^T N_{22}^{-1} a_{2i}} \cdot \nabla_{0i} / \sigma_{ii}$$

Der erste Term unter der Wurzel ergibt sich zu  $1 - r_i$  (siehe Gleichung (2.3)), den zweiten Term bezeichnen wir mit  $u_{2i}$ . Setzen wir noch den Grenzwert  $\nabla_{0i}$  aus (2.4b) ein, so erhalten wir schliesslich

$$\bar{\delta}_{0i} = \sqrt{1 - r_i - u_{2i}} \cdot \delta_{0i} / \sqrt{r_i} \quad (2.11)$$

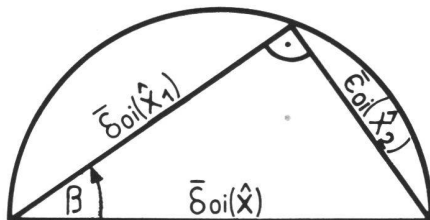


Abb. 1: Geometrische Veranschaulichung

$\bar{\delta}_{0i}(x)$ : Netzverzerrung über alle Parameter

$\bar{\delta}_{0i}(x_1)$ : Teilnetzverzerrung über  $\hat{x}_1$

$\bar{\epsilon}_{0i}(x_2)$ : Absorption durch  $\hat{x}_2$

$\beta$ : mit der Anzahl der Parameter  $\hat{x}_2$  wachsender Winkel

Aus (2.9b) und (2.11) folgt  $u_{1i} + u_{2i} + r_i = 1$ , eine Zerlegung, in der jede der Variablen  $\geq 0$  ist, da sie einer quadratischen Form entstammt. Ein grosser Anteil  $u_{2i}$  hat eine relativ kleine Teilnetzverzerrung zur Folge. Das Mass der äusseren Zuverlässigkeit (2.11) fällt günstiger aus, was auf die mit  $u_{2i}$  wachsende Absorption  $\bar{\epsilon}_{0i}(x_2)$  der Fehler durch den Subvektor  $\hat{x}_2$  zurückzuführen ist (siehe Abb. 1). An einem Beispiel aus der Katasterpraxis wollen wir uns den Einfluss der Partitionierung des Parametervektors auf die Netzverzerrung anschauen.

### 3. Beispiel aus der Katasterpraxis

Die Katasterpraxis sieht herkömmlich die hierarchische Berechnung von Polygonnetzen häufig noch in Form der Näherungsausgleichung der einzelnen Polygonzüge vor. In neueren Katastervorschriften wie z.B. der AP-Vorschrift des Landes Baden-Württemberg (IM Baden-Württemberg, 1984) sind Kriterien mit aufgenommen, durch welche die Zuverlässigkeit garantiert werden soll. Auch die Empfehlungen der Arbeitsgemeinschaft der Vermessungsverwaltungen der Länder der Bundesrepublik Deutschland (AdV, 1985) sehen die Berücksichtigung der Zuverlässigkeit in ähnlicher Form vor. Eine der Konsequenzen, die aus der nun nachzuweisenden Zuverlässigkeit resultieren, ist die Stützung von Polygonzügen, wenn diese aus mehr als 8 Brechungspunkten bestehen. Auf diesen Voraussetzungen beruht unser Beispiel (siehe Abb. 2), ein gestützter Polygonzug, bei dem die Hilfspunkte ( $H_i$ ) zur Einhaltung der Zuverlässigkeitskriterien eingeführt sind. Der Polygonzug, der entlang einer Strasse geführt ist, wurde im Bereich der Kurve ( $P_3 \dots P_6$ ) nur durch die Richtungsbeobachtungen (Zwischenorientierungen) zu einem gemeinsamen Hilfspunkt ( $H_2$ ) gestützt; ansonsten erfolgt die Stützung durch Strecken- und Richtungsbeobachtungen zu den Hilfspunkten ( $H_1, H_3$  und  $H_4$ ) ausgehend von den benachbarten Punkten des Polygonzuges. Den Koordinaten der Hilfspunkte kommt keine weitere Bedeutung zu; sie werden also z.B. nicht in eine Koordinatendatei zur weiteren Verwendung mit aufgenommen, sondern sind reine Hilfsgrössen. Den Parametervektor  $x$  unseres Ausgleichsmodells können wir in die Anteile

$$\begin{aligned} x_1 &- \text{Koordinaten der Punkte } P_1 \dots P_9 \\ x_2 &- \text{Koordinaten der Punkte } H_1 \dots H_4, \\ &\text{Orientierungsparameter} \\ &\text{der Richtungssätze} \end{aligned} \quad (3.1)$$

partitionieren. Die berechneten  $\bar{\delta}_{0i}$ -Werte aufgrund dieser Partitionierung sind in Tabelle 1 den  $\bar{\delta}_{0i}$ -Werten zweier weiterer Unterteilungsmöglichkeiten gegenübergestellt, wobei zur Berechnung der Nichtzentralitätsparameter  $\delta_0 = 4.13$  ( $\alpha_0 = 0.1\%$ ,  $\beta_0 = 80\%$ ) gewählt wurde und für die Streckengenauigkeit 8 mm, für die Richtungsgenauigkeit 1,5 mgon vorausgesetzt sind. Besonders interessant ist der Vergleich zu der üblicherweise vorgenommenen Partitionierung in  $x_1$  «alle Koordinaten» und  $x_2$  «Orientierungen». Eine dritte Möglichkeit, die dadurch gegeben ist, dass  $x_1$  den gesamten Parametervektor umfasst, haben wir in der Tabelle vorangestellt. Die zehn grössten  $\bar{\delta}_{0i}$ -Werte (bezogen auf alle Parameter) geben die Reihenfolge

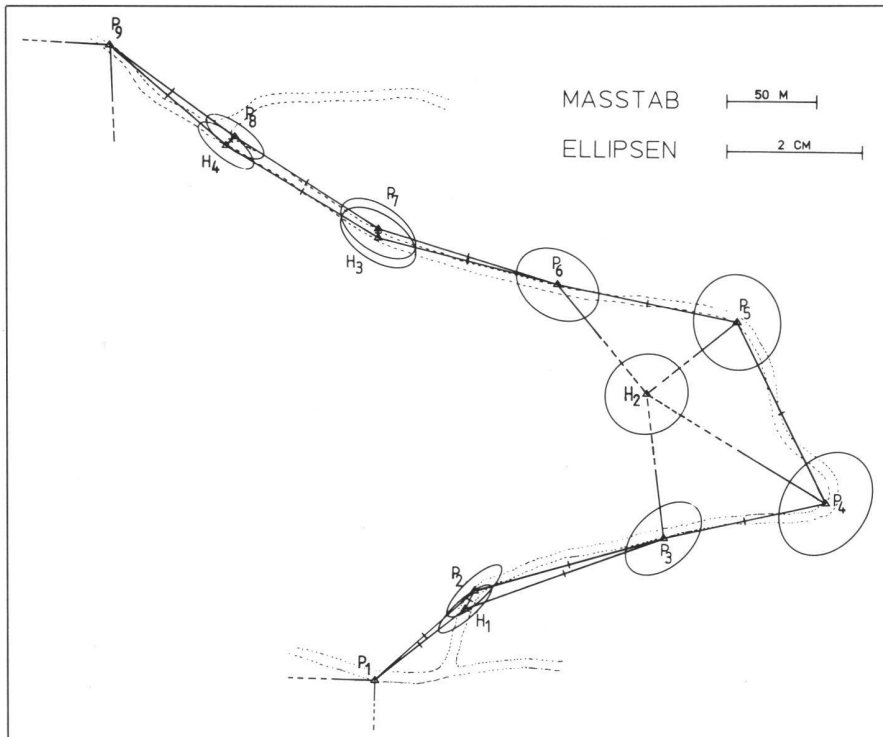


Abb. 2: Gestützter Polygonzug

Richtungen		alle Parameter	$\bar{\delta}_{01}$ -Werte		Koordinaten $P_1 \dots P_9$
von	nach		alle Koordinaten		
P <sub>5</sub>	H <sub>2</sub>	31.6	25.7	9.8	
P <sub>3</sub>	H <sub>2</sub>	16.9	14.5	10.4	
P <sub>6</sub>	H <sub>2</sub>	13.8	11.7	7.6	
P <sub>5</sub>	P <sub>6</sub>	11.1	8.7	7.5	
P <sub>5</sub>	P <sub>4</sub>	10.9	8.5	7.4	
P <sub>3</sub>	P <sub>4</sub>	10.7	9.0	8.6	
P <sub>4</sub>	H <sub>2</sub>	10.1	7.9	6.6	
P <sub>6</sub>	P <sub>5</sub>	9.2	7.7	7.2	
P <sub>4</sub>	P <sub>3</sub>	8.5	6.5	6.3	
H <sub>3</sub>	P <sub>6</sub>	7.8	5.9	1.9	

Tab. 1: Die Netzverzerrung ( $\bar{\delta}_{01}$ -Werte) bei unterschiedlicher Partitionierung des Parametervektors

der Auflistung in Tabelle 1 vor; sie sollen uns im Umfang genügen. Für die Strecken dieses Beispiels sind die  $\bar{\delta}_{01}$ -Werte generell geringer als 4. Die Ergebnisse zeigen die deutlichen Unterschiede zwischen den verschiedenen Unterteilungsvarianten des Parametervektors auf. Für den Vergleich in Tabelle 1 gilt zeilenweise die  $\geq$  Restriktion (von links nach rechts). Die maximale Verfälschung einer Funktion bis zum 10-fachen ihrer Standardabweichung (gemäss (2.9)) wird im geodätischen Sektor meist als befriedigend angesehen. Diesem Kriterium hält in unserem Beispiel (siehe Tab. 1) nur die Partitionierung gemäss (3.1) stand, während die maximalen  $\bar{\delta}_{01}$ -Werte von 26 bzw. 32 der beiden anderen Partitionierungsvarianten als unzureichend zu betrachten wären. Durch eine verstärkte Stützung im Kurvenbereich, z.B. durch Streckenbeobachtungen zu H<sub>2</sub>, liessen

sich die grossen  $\bar{\delta}_{01}$ -Werte aller drei Varianten noch merklich senken. Wir wollen abschliessend festhalten, dass die Netzverzerrung ausschliesslich auf jene Koordinaten bezogen werden sollte, die in amtliche Unterlagen einfließen oder die zur weiteren Verwendung für den Auftraggeber von Belang sind, da dadurch kleinere  $\bar{\delta}_{01}$ -Werte hervorgerufen werden, die vor allem aber eine für den Koordinatensubvektor charakteristische Grösse annehmen.

## 4. Beispiel aus der Ingenieurvermessung

Im Gegensatz zum angeschlossenen Polygonzug (Kap. 3) werden die Ingenieurnetze nahezu ausschliesslich als freie Netze ausgeglichen, so dass hier unsere Betrachtungen zur Datums-

gebung Anwendung finden. Im Bereich der Ingenieurvermessung gibt es viele Konfigurationen, bei denen die Netzverzerrung auf einen Koordinatensubvektor bezogen werden sollte. Beispielhaft wären Deformationsnetze anzuführen, bei denen der Objektpunktbereich oder der Stützpunktbereich durch die Teilnetzverzerrung charakterisiert wird. Bei der Partitionierung des Parametervektors in  $x_1$  und  $x_2$  fallen bei dreidimensionalen Netzen insbesondere die i.a. grosse Anzahl an Zusatzparametern (z.B. 2 Lotrichtungen pro Punkt, Refraktionsunbekannte bei gleichzeitig gegenseitigen Zenitdistanzen, Orientierungsparameter etc.) ins Gewicht.

Neben den einzelnen groben Fehlern sind im Ingenieurbereich die systematischen oder deterministischen Fehler in die Zuverlässigkeitsbeschreibung mit einzubeziehen. Für Systematiken, die sich durch eine Erweiterung des Modells (2.1) gemäss  $l+v=A\hat{x}+B\hat{s}$  erfassen lassen ( $\dim(s) < r$ ), kann die Teilnetzverzerrung analog zu Kapitel 2 abgeleitet werden (siehe Förstner, 1983). Die Teilnetzverzerrung aufgrund einer nicht aufdeckbaren Systematik  $s_0$  oder aber auch für bekannte ( $s$ ) oder geschätzte ( $\hat{s}$ ) systematische Fehler kann gemäss

$$\bar{\delta} = \sqrt{s^T B^T P A Q_{x11} A^T P B s} / \sigma_0 \quad (4.1)$$

in allgemeiner Form berechnet werden. Durch Umformung mit (2.10) kann (4.1) in die Differenz zweier quadratischer Formen aufgespalten werden, womit die Analogie zu Kapitel 2 hergestellt ist.

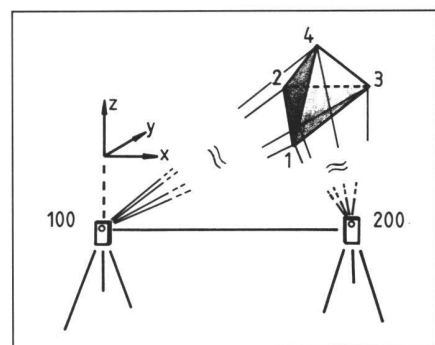


Abb. 3: Industriemesssystem: Prinzipskizze der Aufnahmesituation

Als Beispiel, das wir nun näher betrachten wollen, haben wir ein Industriemesssystem ausgewählt. Ausgehend von zwei Theodolitstandpunkten erfolgt die 3-d-Erfassung des Objekts durch räumliche Vorwärtsschnitte (Abb. 3). Als Ergebnisse interessieren vor allem die Objektpunktkoordinaten, deren Genauigkeit und die Beurteilung ihrer Zuverlässigkeit (Bill et al, 1985). Da man sich auf die innere Geometrie der Objektpunkte konzentriert, wird man zum einen die Genauigkeitsangaben aus einer Teilnormminimierung über die Objektpunkte

gewinnen und zum anderen die Zuverlässigkeitsbeschreibung ausschliesslich auf die Koordinaten des Objektes beziehen. Aufgrund der im Beispiel gewählten Symmetrie (Abb. 3) ist es ausreichend, die Ergebnisse eines Standpunktes aufzulisten, wobei den Berechnungen die Genauigkeitsannahmen für Richtungen und Zenitdistanzen zu  $1''$ , die Genauigkeit der Basis zu  $0,1\text{mm}$  zugrundeliegen. Die berechneten  $\bar{\sigma}_{0i}$ -Werte der beiden Unterteilungsvarianten: (1) Funktion aller Parameter, (2) Funktion der Koordinaten der Punkte 1..4 sind in Tabelle 2 gegenübergestellt.

Richtungen		$\bar{\sigma}_{0i}$ -Werte	
von	nach	(1) alle Parameter	(2) Koordinaten Pkte 1 - 4
100	1	11.7	9.3
100	2	14.2	10.3
100	3	11.3	7.3
100	4	11.8	10.0
100	200	8.5	0.7
Zenitdistanzen			
100	1	6.3	4.8
100	2	6.0	4.5
100	3	5.8	4.7
100	4	6.1	4.9
100	200	3.3	0.2

**Tab. 2: Netzverzerrung ( $\bar{\sigma}_{0i}$ -Werte)**  
**(1) ohne Elimination von Parametern**  
**(2) bei Elimination von Orientierung und Aufnahmepunktkoordinaten**

Die Unterschiede sind nicht so gravierend, wie die des Beispiels aus Kapitel 3; dennoch ist die Elimination der Orientierungsparameter und Aufnahmepunktkoordinaten lohnend. Sehr deutlich zeigt Tabelle 2, dass die Objektpunktgeometrie aufgrund von Fehlern in den Beobachtungen zwischen den Aufnahmepunkten kaum verfälscht wird. Exemplarisch für die Problemstellung «Netzverzerrung infolge systematischer Fehler» soll beim Industriemesssystem die Horizontierungsunsicherheit der Theodolite angesprochen werden. Modelliert man die Unterschiede in den Stehachskomponenten, so lässt sich deren Einfluss auf die Objektpunktgeometrie gemäss (4.1) abschätzen. In einfacher Weise kann die Wirkung der Systematik auf die Objektpunktgeometrie erfasst werden, wenn die Zuverlässigkeitsberechnung im allgemeinen geometrischen 3-D-Modell (Bleich, 1985) erfolgt.

#### Literatur:

- AdV (1985): Koordinatenkataster - Grundzüge und Aufbau. Arbeitsgemeinschaft der Vermessungsverwaltungen der Länder der Bundesrepublik Deutschland. Sonderheft. Arbeitskreis Liegenschaftskataster.
- Bill, R., Fohl, G., Quasnitza, H., Staiger, R. (1985): Fehlertheoretische Untersuchungen des elektronischen Mess- und Berechnungssystems ECDS1 von Kern. Zeitschrift für Vermessungswesen 110, S. 399 - 409.
- Bleich, P. (1985): Programmerstellung und Untersuchungen zur Modellbildung, Genauigkeit und Zuverlässigkeit im geometrischen 3-D-Modell. Diplomarbeit am

Geodätischen Institut der Universität Karlsruhe, unveröffentlicht.

- DVW-Sonderheft (1986): Beurteilung geodätischer Netze. Deutscher Verein für Vermessungswesen, Landesverein Baden-Württemberg.
- Förstner, W. (1983): Reliability and Discernability of extended Gauss-Markov-Models. Deutsche Geodätische Kommission, Reihe A, Heft Nr. 98, München.
- Illner, I. (1985): Datumsfestlegung in freien Netzen. Deutsche Geodätische Kommission, Reihe C, Heft Nr. 309, München.
- IM Baden-Württemberg (1984): Verwaltungsvorschrift für das Aufnahmepunktfeld und die Einführung des Gauss-Krüger-Meridianstreifensystems bei der Katasterverwaltung (AP-Vorschrift-VwVAP) vom 24.08.1984
- Koch, K.R. (1980): Parameterschätzung und Hypothesentests in linearen Modellen. Dümmler Verlag, Bonn.
- Schwintzer, P. (1982): Zur Berechnung von Inversen mit minimaler Teilspur. Zeitschrift für Vermessungswesen 107, S. 514-516.

Adresse der Verfasser:  
 Michael Hahn, Dipl.-Ing.  
 Institut für Photogrammetrie  
 Universität Stuttgart  
 Keplerstrasse 11  
 D-7000 Stuttgart 1

Reiner Jäger, Dipl.-Ing.  
 Geodätisches Institut  
 Universität Karlsruhe  
 Englerstrasse 7  
 D-7500 Karlsruhe 1

## Vermarktungsarbeiten

übernimmt und erledigt

- genau
- prompt
- zuverlässig
- nach Instruktion GBV

für Geometerbüros und Vermessungsämter in der deutschsprachigen Schweiz

**Josef Lehmann, Vermarktungsunternehmer,**  
 9555 Tobel TG  
 Tel. 073 / 45 12 19 oder 9556 Affeltrangen, Tel. 073 / 45 15 42

Gesucht

**Klein-Phantograph  
 OTT**

Anfragen erwarten wir unter  
 Chiffre 155, Diagonal Verlags AG,  
 Täferstr. 2 - 5405 Baden-Dättwil

**Manuskripte bitte immer  
 im Doppel einsenden**

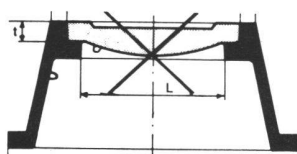
Mehr Sicherheit im Strassenverkehr mit

## Chrétien-Polygonkappen



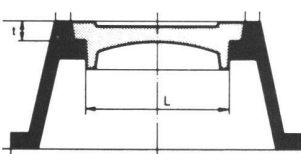
seit **1883**

**Bisher:**



Deckel nur eingelegt

**Verbesserte Ausführung:**



Deckel geführt

**Chrétien & Co.**

Eisen- und Metallguss  
**4410 Liestal**

**Tel. 061 / 91 56 56**